①

Föreläsning 12

Andra ordningens linjära homogena ODE:er med konstanta koefficienter

Betrakta ODE:n

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0} \qquad (*)$$

där a, b, c konstanter ($a \neq 0$). Detta är en s.k. <u>andra ordningens linjära homogena ODE med konstanta koefficienter</u>

Man kan skriva $(*)$ som

$$P_2(D)y = 0$$

där $P_2(r) = ar^2 + br + c$ och $D = \frac{d}{dx}$.

Låt oss faktorisera $P_2(r)$. Nollställen:

$$P_2(r) = 0 \Leftrightarrow \boxed{ar^2 + br + c = 0} \qquad (**)$$

$$\Leftrightarrow r^2 + \frac{b}{a}r + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kalla dessa r_1 resp. r_2 d.v.s.

$$P_2(r) = a(r - r_1)(r - r_2)$$

$$\Rightarrow P_2(D) = a(D - r_1)(D - r_2)$$

$(*)$ kan skrivas $a(D - r_1)(D - r_2)y = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (D - r_1)(D - r_2)y = 0$$

$(**)$ kallas för den <u>karaktäristiska ekvationen</u>.

Tre möjliga fall:

- r_1, r_2 reella och $r_1 \neq r_2$:

$$(D-r_1)(D-r_2)y = 0 \quad , \text{ låt } u = (D-r_2)y$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} - r_1 u = 0 \underset{\text{sep.}}{\Leftrightarrow} \int \frac{du}{u} = \int r_1\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|u| = r_1 x + C_1 \Leftrightarrow |u| = C_2 e^{r_1 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u = C_3 e^{r_1 x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - r_2 y = C_3 e^{r_1 x} \underset{IF}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{IF}{\Leftrightarrow} \frac{d}{dx}\left(e^{-r_2 x} y\right) = C_3 e^{r_1 x + r_2 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-r_2 x} y = A e^{r_1 x + r_2 x} + B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}} \quad (\dagger)$$

- r_1, r_2 reella och $r_1 = r_2 = r$:

$$(D-r)^2 y = 0 \quad , \text{ låt } u = (D-r)y$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} - ru = 0 \Leftrightarrow [\text{se ovan}] \; u = Be^{rx} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - ry = Be^{rx} \underset{IF}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{IF}{\Leftrightarrow} \frac{d}{dx}\left(e^{-rx} y\right) = B \Leftrightarrow e^{-rx} y = Bx + A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(x) = (A + Bx)e^{rx}}$$

- $r_{1,2} = k \pm i\omega$ (icke-reella, d.v.s. $\omega \neq 0$):

Låt $r_1, r_2 = k \pm i\omega$, $\omega \neq 0$, i $(\dagger)$:

$$y(x) = C e^{(k+i\omega)x} + D e^{(k-i\omega)x} =$$

$$= C e^{kx} e^{i\omega x} + D e^{kx} e^{-i\omega x} =$$

$$= C e^{ux}(\cos \omega x + i \sin \omega x) +$$
$$+ De^{ux}(\cos \omega x - i \sin \omega x) =$$
$$= (C+D)e^{ux}\cos \omega x + (C-D)e^{ux}\sin \omega x$$

Kalla $A = C+D$, $B = C-D$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = Ae^{ux}\cos \omega x + Be^{ux}\sin \omega x}$$

<u>Exempel:</u> Hitta allmänna lösningen till $y'' + 6y' + 9y = 0$.

<u>Lösning:</u> Karaktäristisk ekvation:

$$r^2 + 6r + 9 = 0 \Leftrightarrow r = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3$$

d.v.s. en reell dubbelrot $r = \dots$

$\Rightarrow$ Allmän lösning $\boxed{y(x) = (A+Bx)e^{-3x}}$ □

<u>Exempel:</u> Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$

<u>Lösning:</u> Karaktäristisk ekvation:

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$$

d.v.s. ett konjugerat komplext par rötter

$\Rightarrow$ Allmän lösning $y(x) = Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x$

• $y(0) = 2 \Leftrightarrow Ae^0 \underbrace{\cos 0}_{=1} + Be^0 \underbrace{\sin 0}_{=0} = 2 \Leftrightarrow A = 2$

$$\Rightarrow y(x) = 2e^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x$$

$$\Rightarrow y'(x) = -2e^{-x}\cos x - 2e^{-x}\sin x -$$
$$- Be^{-x}\sin x + Be^{-x}\cos x =$$
$$= (B-2)e^{-x}\cos x + (-2-B)e^{-x}\sin x$$

• $y'(0) = -3 \Leftrightarrow (B-2)e^0 \underbrace{\cos 0}_{=1} + (-2-B)e^0 \underbrace{\sin 0}_{=0} = -3$

$$\Leftrightarrow B-2=-3 \Leftrightarrow B=-1$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(x)=2e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x} \qquad \square$$

Exempel: Hitta allmänna lösningen till $y''+y'-2y=0$

Lösning: Karaktäristisk ekvation:

$$r^2+r-2=0 \Leftrightarrow r=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=$$
$$=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$$

d.v.s. två reella rötter $r_1=-2$, $r_2=1$.

$$\Longrightarrow \boxed{y(x)=Ae^{-2x}+Be^{x}} \qquad \square$$

(Skumla i avsnitten om harmonisk rörelse i boken.)

Högre ordningens linjära homogena ODE:er med konstanta koefficienter

En godtycklig högsta ordningens linjär homogena ODE med konstanta koefficienter kan skrivas

$$(*) \qquad \boxed{a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0}$$

eller $P_n(D)y=0$ där P_n är polynomet

$$P_n(r)=a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0$$

och $D=\frac{d}{dx}$ (differentialoperator), samt $a_n \neq 0$.

Man inser att lösningsmetoden för specialfallet $n=2$ som redan behandlats kan generaliseras till godtyckligt n. Man får en karaktäristisk ekvation:

$$\boxed{P_n(r)=0} \qquad (**)$$

⑤ d.v.s. en n:te-gradsekvation. Man får en faktorisering $P_n(r) = (r-r_1)\cdots(r-r_n)$ så att ODE:n blir

$$(D-r_1)\cdots(D-r_n)y = 0$$

vilken man löser (separabel ODE, integrerande faktor upprepade ggr) och får lösning

$$y(x) = C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x)$$

där $y_1, \ldots, y_n$ linjärt oberoende.

Så här konstruerar man $y_1, \ldots, y_n$:

1. Om r_1 är en rot till (**) av multiplicitet k (d.v.s. $(r-r_1)^k$ är en faktor i $P_n(r)$) så är

$$e^{r_1x}, xe^{r_1x}, x^2e^{r_1x}, \ldots, x^{k-1}e^{r_1x}$$

k st linjärt oberoende lösningar till (*).

2. Om $r_{1,2} = a \pm ib$ är ett par av komplext konjugerade rötter till (**) av multiplicitet k (d.v.s. $((r-a)^2+b^2)^k$ är en faktor i $P_n(r)$) så är

$$\begin{cases} e^{ax}\cos bx, xe^{ax}\cos bx, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\cos bx, \\ e^{ax}\sin bx, xe^{ax}\sin bx, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\sin bx \end{cases}$$

2k st linjärt oberoende lösningar till (*)

Exempel: Lös $(D+4)^3(D^2+4D+13)^2y = 0$ där $D = d/dx$ (diff-op.).

Exempel: Den karaktäristiska ekvationen är

$$(r+4)^3(r^2+4r+13)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r+4=0 \text{ eller } r^2+4r+13=0 \Leftrightarrow$$
(ggr 3) (ggr 2)

$$\Leftrightarrow r=-4 \text{ eller } r=-2\pm\sqrt{4-13}=-2\pm 3i$$
(ggr 3) (ggr 3)

d.v.s. rötterna är $r=-4$ (mult. 3) och

$r=-2\pm 3i$ (mult. 2)

$\Longrightarrow$ Linjär oberoende lösningar är

1. $e^{-4x}, xe^{-4x}, x^2e^{-4x}$ (3 st)

och 2. $\begin{cases} e^{-2x}\cos 3x, xe^{-2x}\cos 3x \\ e^{-2x}\sin 3x, xe^{-2x}\sin 3x \end{cases}$ (4 st) $=2\cdot 2$

$\Longrightarrow$ Den allmänna lösningen är:

$$y(x) = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x} + C_3x^2e^{-4x} +$$
$$+ C_4e^{-2x}\cos 3x + C_5xe^{-2x}\cos 3x +$$
$$+ C_6e^{-2x}\sin 3x + C_7xe^{-2x}\sin 3x$$

d.v.s.
$$\boxed{\begin{aligned} y(x) = &(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-4x} + \\ &+ (C_4+C_5x)e^{-2x}\cos 3x + \\ &+ (C_6+C_7x)e^{-2x}\sin 3x \end{aligned}}$$

Eulerekvationer

En andra ordningens linjära homogena ODE av typen

$(a\neq 0)$
$$\boxed{ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0} \quad (*)$$

7

kallas för en Eulerekvation (eller alt. "ekvidimensionell ekvation": $x^2 \sim dx^2$, $x \sim dx$, $x^0 \sim dx^0$).
Eulerekvationer har inte konstanta koefficienter.

Ansätt en lösning $y = |x|^r$, vill bestämma r.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = r|x|^{r-1}\,\text{sgn}\,x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)|x|^{r-2}(\text{sgn}\,x)^2 = r(r-1)|x|^{r-2}$$

$$\boxed{\text{sgn}\,x = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}}$$

Sätt in i (†):

$$ax^2 r(r-1)|x|^{r-2} + bx\,r|x|^{r-1}\text{sgn}\,x + c|x|^r = 0$$

$$a|x|^2 r(r-1)|x|^{r-2} + b|x|r|x|^{r-1} + c|x|^r = 0$$

$$(ar(r-1) + br + c)|x|^r = 0$$

$$\boxed{x\,\text{sgn}\,x = |x|}$$

d.v.s. man får en karakteristisk ekvation

$$(*) \quad \boxed{\begin{array}{c} ar(r-1) + br + c = 0 \\ \text{eller} \\ ar^2 + (b-a)r + c = 0 \end{array}} \Rightarrow \text{Rötter } r_1, r_2$$

Vi har tre möjliga fall:

- r_1, r_2 reella och $r_1 \neq r_2$:

  Då är $y_1 = |x|^{r_1}$, $y_2 = |x|^{r_2}$ linjärt oberoende lösningar till (†) och allmän lösning blir:

$$\boxed{y(x) = A|x|^{r_1} + B|x|^{r_2}} \quad (††)$$

- r_1, r_2 reella och $r_1 = r_2 = r$:

  Dubbelrot men har fortfarande två linjärt

Oberoende lösningar y_1, y_2 ... Låt $y_1 = |x|^r$, (8)
då är det en lösning. Låt $y_2 = |x|^r \ln|x|$.

Påstående: y_2 löser (†) om r dubbelrot.

Bevis:
$$y_2 = |x|^r \ln|x|$$

$$\frac{dy_2}{dx} = r|x|^{r-1}(\operatorname{sgn} x)\ln|x| + |x|^r \underbrace{\frac{1}{|x|}(\operatorname{sgn} x)}_{=1/x} =$$

$$= \frac{1}{x}|x|^r(r\ln|x| + 1)$$

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(r|x|^{r-1}(\operatorname{sgn} x)\ln|x| + |x|^{r-1}(\operatorname{sgn} x)\right)$$

$$= r(r-1)|x|^{r-2}(\operatorname{sgn} x)^2 \ln|x| +$$

$$+ r|x|^{r-1}(\operatorname{sgn} x)\frac{1}{|x|}(\operatorname{sgn} x) +$$

$$+ (r-1)|x|^{r-2}(\operatorname{sgn} x)(\operatorname{sgn} x) =$$

$$= \frac{1}{x^2}|x|^r\left(r(r-1)\ln|x| + 2r - 1\right)$$

Stoppa in i $VL_{(†)}$ och div. m. $|x|^r$:

$$a\left(r(r-1)\ln|x| + 2r - 1\right) + b\left(r\ln|x| + 1\right) +$$

$$+ c\ln|x| =$$

$$= \underbrace{\left(ar(r-1) + br + c\right)}_{=0 \text{ enl. } (*)}\ln|x| + a(2r-1) + b =$$

$$= a(2r-1) + b = (**)$$

(*) kan skrivas: $r^2 + \frac{b-a}{a}r + \frac{c}{a} = 0$

$$\Leftrightarrow r = -\frac{b-a}{2a} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}}_{=0 \text{ om dubbelrot!}} = \frac{a-b}{2a}$$

$$\Rightarrow (**) = a\left(2\frac{a-b}{2a} - 1\right) + b =$$

$$= (a-b) - a + b = 0 = HL_{(†)}$$

d.v.s. $y_2 = |x|^r \ln|x|$ löser (†). $\square$

Slutsats: $\boxed{y(x) = (A + B\ln|x|)|x|^r}$

- $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ icke-reella, d.v.s. ($\beta \neq 0$):

I detta fall kan (††) användas. Vi har

$$|x|^{r_{1,2}} = |x|^{\alpha \pm i\beta} = |x|^\alpha (e^{\ln|x|})^{\pm i\beta} =$$

$$= |x|^\alpha e^{\pm i\beta\ln|x|} =$$

$$= |x|^\alpha (\cos(\beta\ln|x|) \pm i\sin(\beta\ln|x|)) =$$

$$= |x|^\alpha \cos(\beta\ln|x|) \pm i|x|^\alpha \sin(\beta\ln|x|)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = A|x|^\alpha \cos(\beta\ln|x|) + B|x|^\alpha \sin(\beta\ln|x|)}$$

Minnesregel: I motsvarande problem med konstanta koefficienter, byt ut lösningens $\boxed{e^x \text{ mot } |x|}$ för att få lösningen till Eulerekvationen med samma rötter till karakteristiska ekvationen! (Notera: $x = \ln(e^x)$, så x byts mot $\ln|x|$.)

Exempel: Lös Eulerekvationen $x^2y'' - 3xy' + 13y = 0$.

Lösning: Det är en Eulerekv. ty $\underbrace{x^2 \frac{d^2y}{dx^2}}, \underbrace{x\frac{dy}{dx}}, \underbrace{x^0\frac{d^0y}{dx^0}}$

Karakteristisk ekvation: $r(r-1) - 3r + 13 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r^2 - 4r + 13 = 0 \Leftrightarrow r = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

d.v.s. ett konjugerat komplext par icke-reellt)

$\Rightarrow$ Allmän lösning är

$$\boxed{y(x) = Ax^2\cos(3\ln|x|) + Bx^2\sin(3\ln|x|)}$$

(Notera: $|x|^2 = x^2$.)

(Jmf. $Ae^{2x}\cos(3x) + Be^{2x}\sin(3x)$ (konst. koeff.))

$\square$

Inhomogena linjära ODE:er

Betrakta problem av typen

$$\boxed{a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)} \qquad (*)$$

d.v.s. en inhomogen andra ordningens linjär ODE med konstanta koefficienter. Den motsvarande homogena ODE:n ($f(x)=0 \ \forall x$) är

$$\boxed{a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0} \qquad (**)$$

Den allmänna lösningen y till $(*)$ kan skrivas

$$y = y_p + y_h$$

där y_p är vilken lösning till $(*)$ som helst (en s.k. <u>partikulärlösning</u>) och y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ODE $(**)$ (den s.k. <u>komplementära lösningen</u>).

Det finns ett effektivt recept för att hitta partikulärlösning y_p till inhomogena $(*)$:

Låt $A_n(x)$, $B_n(x)$ och $P_n(x)$ vara n:te-gradspolynomen

$$\begin{cases} A_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n \\ B_n(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_n x^n \\ P_n(x) = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \dots + P_n x^n \end{cases}$$

För att hitta y_p pröva följande:

- Om $f(x) = P_n(x)$, pröva
$$y_p(x) = x^m A_n(x)$$
- Om $f(x) = P_n(x)e^{rx}$, pröva
$$y_p(x) = x^m A_n(x) e^{rx}$$
- Om $f(x) = P_n(x)e^{rx}\cos kx$, pröva
$$y_p(x) = x^m e^{rx}(A_n(x)\cos kx + B_n(x)\sin kx)$$
- Om $f(x) = P_n(x)e^{rx}\sin kx$, pröva
$$y_p(x) = x^m e^{rx}(A_n(x)\cos kx + B_n(x)\sin kx$$

där m är det minsta av talen 0, 1 och 2 sådant att ingen term i y_p löser homogena (ekv).

Exempel: Lös $y'' + 4y = \sin 2x$.

Lösning:
- Homogen ODE: $y'' + 4y = 0$

Karaktäristisk ekv.: $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2i$

$$\Rightarrow y_h(x) = C\cos 2x + D\sin 2x$$

- Partikulärlösning till inhomogen ODE:

$f(x) = \sin 2x$, d.v.s. $P_n(x) = 1 \Rightarrow n = 0$

$$\Rightarrow \text{Pröva } y_p(x) = x^m(A_n(x)\cos 2x + B_n(x)\sin 2x) \overset{(n=0)}{=} x^m(A\cos 2x + B\sin 2x) =$$
$$= [m = 0 \Rightarrow y_p \text{ löser homogena, måste välja } m = 1] = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

Bestäm A och B: Derivera y_p:

$$y_p'(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x) +$$
$$+ x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) =$$
$$= (A + 2Bx)\cos 2x +$$
$$+ (B - 2Ax)\sin 2x$$
$$\Rightarrow y_p''(x) = 2B\cos 2x - 2(A+2Bx)\sin 2x$$
$$- 2A\sin 2x + 2(B - 2Ax)\cos 2x$$
$$= 4(B - Ax)\cos 2x -$$
$$- 4(A + Bx)\sin 2x$$

Sätt in y_p, y_p' och y_p'' i inhomogena ODE:n:

$$\left(4(B-Ax)\cos 2x - 4(A+Bx)\sin 2x\right) +$$
$$+ 4x(A\cos 2x + B\sin 2x) = \sin 2x$$
$$\Leftrightarrow (4B - 4Ax + 4Ax)\cos 2x +$$
$$+ (-4A - 4Bx + 4Bx)\sin 2x = \sin 2x$$
$$\Leftrightarrow 4B\cos 2x - 4A\sin 2x = \sin 2x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4B\cos 2x - (4A+1)\sin 2x = 0,$$

vilket gäller $\forall x$

$$\Rightarrow 4B = 0 \text{ och } 4A + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow B = 0 \text{ och } A = -1/4$$

$$\Rightarrow y_p(x) = x\left(-\frac{1}{4}\cos 2x + 0\cdot\sin 2x\right) =$$
$$= -\frac{1}{4}x\cos 2x$$

$\Rightarrow$ Den allmänna lösningen $y = y_p + y_h$ är

$$y(x) = -\frac{1}{4}x\cos 2x + C\cos 2x + D\sin 2x$$

d.v.s. $\boxed{y(x) = \left(C - \frac{1}{4}x\right)\cos 2x + D\sin 2x}$ $\square$

Några jämna uppgifter

3.7:6

Lös $y'' - 2y' + y = 0$.

Lösning: Karakteristisk ekvation:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = 1 \quad \text{(dubbelrot)}$$

$\Rightarrow$ Allmän lösning $\boxed{y(x) = (A + Bx)e^x}$

3.7:12

Lös $y'' + y' + y = 0$.

Karaktäristisk ekvation:

$$r^2 + r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} =$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(konjugrat komplext par)

$\Rightarrow$ Allmän lösning ges av

$$\boxed{y(x) = Ae^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + Be^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x}$$

17.5:4

Lös $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 6y'' + 4y' + y = 0$.

Lösning: Karaktäristisk ekvation:

$$r^4 + 4r^3 + 6r^2 + 4r + 1 = 0$$

Testa reella rötter. Dessa måste vara negativa.

$r = -1$: $(-1)^4 + 4(-1)^3 + 6(-1)^2 + 4(-1) + 1 =$

$= 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 8 - 8 = 0$, en rot!

Polynomdividera:

$$\begin{array}{l} \quad r^3+3r^2+3r+1 \\ \hline r^4+4r^3+6r^2+4r+1 \;\big|\; r+1 \\ -r^3(r+1) \\ \hline \quad 3r^3+6r^2+4r+1 \\ \quad -3r^2(r+1) \\ \hline \qquad 3r^2+4r+1 \\ \qquad -3r(r+1) \\ \hline \qquad\quad r+1 \\ \qquad\quad -(r+1) \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$\longleftarrow$ Jämnt ut!

$$\Rightarrow r^4+4r^3+6r^2+4r+1 = (r+1)(r^3+3r^2+3r+1)$$

Vi ser direkt att $r=-1$ är ett nollställe även till r^3+3r^2+3r+1. Pol.-div. igen:

$$\begin{array}{l} \quad r^2+2r+1 \\ \hline r^3+3r^2+3r+1 \;\big|\; r+1 \\ -r^2(r+1) \\ \hline \quad 2r^2+3r+1 \\ \quad -2r(r+1) \\ \hline \qquad r+1 \\ \qquad -(r+1) \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

$\longleftarrow$ Jämnt ut!

$$\Rightarrow r^4+4r^3+6r^2+4r+1 = (r+1)^2(r^2+2r+1) =$$
$$= (r+1)^2(r+1)^2 = (r+1)^4$$

d.v.s. $r=-1$ är en kvadrupelrot (multiplicitet 4). Enligt receptet är (se sid. 5)

$$e^{-x}, \quad xe^{-x}, \quad x^2e^{-x} \text{ och } x^3e^{-x}$$

de fyra linjärt oberoende lösningarna till ODE:n så att allmän lösning blir:

(15)

$$\boxed{y(x) = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3)e^{-x}}$$

17.5:8 Lös Eulerekvationen $x^2y'' - xy' - 3y = 0$.

Lösning: [Notera att det är en Eulerekv. eftersom
y''-koefficienten (d.v.s. $y^{(2)}$) har grad 2,
y'- —— " ——— $y^{(1)}$ — " — 1 och
y - —— " ——— $y^{(0)}$ — " — 0]

Karaktäristisk ekvation:

$$r(r-1) - r - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2 - 2r - 3 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \pm \sqrt{1-(-3)} =$$

$$= 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

d.v.s. två reella rötter $r_1 = -1$, $r_2 = 3$

$\Longrightarrow$ Allmän lösning är

$$y(x) = A|x|^{-1} + B|x|$$

d.v.s. $\boxed{y(x) = \dfrac{A}{|x|} + B|x|^3}$ (*)

Jmf m. $y(x) = Ae^{-x} + Be^{3x}$ (†) för motsv. probl. m. konst. koeff. (*) genom att låta e^x bli $|x|$ i lösningen (†).

17.6:2 Lös $y'' + y' - 2y = x$. (Inhomogen)

Lösning: • Motsv. homogena ODE: $y'' + y' - 2y = 0$.

Karaktäristisk ekv.: $r^2 + r - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Komplementär lösning

$$y_h(x) = Ce^{-2x} + De^x$$

- <u>Partikulärlösn. till inhomogen ODE:</u>

$$f(x) = x \text{ , d.v.s. } P_n(x) = x \Rightarrow n = 1$$

$$\Rightarrow \text{Pröva } y_p(x) = x^m A_n(x) = [n=1] =$$
$$= x^m(A+Bx) =$$
$$= [y_p \text{ löser ej homogena ODE:n för } m=0] =$$
$$= x^0(A+Bx) = A+Bx$$

Derivera y_p: $y_p'(x) = B \Rightarrow y_p''(x) = 0$

Sätt in y_p, y_p' och y_p'' i inhomogena ODE:n:

$$0 + B - 2(A+Bx) = x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -(2B+1)x + (B-2A) = 0 \quad \forall x$$
$$\Leftrightarrow 2B+1 = 0 \text{ och } B-2A = 0$$

d.v.s. $B = -1/2$ och $A = \frac{1}{2}B = -1/4$

$$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{4}(2x+1)$$

$\Longrightarrow$ Allmän lösning $y = y_p + y_h$ är

$$y(x) = -\frac{1}{4}(2x+1) + Ce^{-2x} + De^{x}$$

d.v.s. $\boxed{y(x) = Ce^{-2x} + De^{x} - \frac{1}{4}(2x+1)}$

17.6:8 Lös $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ (Inhomogen)

<u>Lösning:</u> • <u>Motsv. homogena ODE:</u> $y'' + 4y' + 4y = 0$

Karakteristisk ekv.: $r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (r+2)^2 = 0$$

d.v.s. dubbelrot $r_{1,2} = -2$

17

$\Rightarrow$ Komplementär lösning

$$y_h(x) = (C+Dx)e^{-2x}$$

- Partikulärlösn. till inhomogen ODE:

$$f(x) = e^{-2x} \Rightarrow P_n(x) = 1 \Rightarrow n = 0$$

$$\Rightarrow \text{Pröva } y_p(x) = x^m A_n(x) e^{-2x} = [n=0] =$$

$$= x^m A e^{-2x} =$$

$= [m=0 \Rightarrow y_p = Ae^{-2x}$ löser den homogena ODE:n $\Rightarrow$ V.
$m=1 \Rightarrow y_p = Axe^{-2x}$ löser också den homogena ODE:n $\Rightarrow m=2] =$

$$= Ax^2 e^{-2x}$$

Derivera: $y_p'(x) = 2Axe^{-2x} - 2Ax^2e^{-2x} =$

$$= 2A(x - x^2)e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y_p''(x) = 2A(1-2x)e^{-2x} - 4A(x-x^2)e^{-2x}$$

$$= 2A(1-2x-2x+2x^2)e^{-2x} =$$

$$= 2A(1-4x+2x^2)e^{-2x}$$

Sätt in y_p, y_p' och y_p'' i inhomogena ODE:n:

$$2A(1-4x+2x^2)e^{-2x} + 8A(x-x^2)e^{-2x} +$$

$$+ 4Ax^2e^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2A - 8Ax + 4Ax^2 + 8Ax - 8Ax^2 + 4Ax^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2A = 1 \Leftrightarrow A = 1/2$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-2x}$$

$\Rightarrow$ Allmän lösning $y = y_p + y_h$ är

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-2x} + (C+Dx)e^{-2x}$$

d.v.s. $\boxed{y(x) = (C + Dx + \frac{1}{2}x^2)e^{-2x}}$ 18

Se även RÖ 13 & 14 HT09 där jag löst bl.a.

3.7:10 , 3.7:14 , 17.5:6 ,

17.5:10 , 17.6:6 , 17.6:10