1

Föreläsning 2

Summor

Sigmanotation: $$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m)+f(m+1)+\cdots+f(n)$$

Exempel: $$\sum_{i=2}^{4} i^3 = 2^3+3^3+4^3 = 8+27+64 = 99$$
(Här: $f(i) = i^3$)

Variabeln i är stum variabel, n är övre summationsgräns och m undre summationsgräns.

Ibland använder man notationen:
$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Notera:

- $$\sum_{i=m}^{n} (Af(i)+Bg(i)) = A\sum_{i=m}^{n} f(i) + B\sum_{i=m}^{n} g(i)$$
- $$\sum_{j=m}^{m+n} f(j) = \sum_{i=0}^{n} f(i+m)$$

Första påståendet: Summation är linjär operation
Andra   "   : Man kan substituera index

Ibland kan summor uttryckas på sluten form, d.v.s. som ett kompakt uttryck.

Sats: (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ termer}} = n$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = 1+r+r^2+\cdots+r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1}$,

där $r \neq 1$

Bevis: (a) Uppenbart.

(b) Gauß' trick: $\displaystyle S = \sum_{i=1}^{n} i$, dvs.

ß = /ss/

$$\left.\begin{aligned} S &= 1+2+\cdots+(n-1)+n \\ \text{eller} \quad S &= n+(n-1)+\cdots+2+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{n \text{ termer}}$$

$$= n(n+1)$$

$$\Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

(c) Notera först:

$$\sum_{i=m}^{n} \big(f(i+1)-f(i)\big) = f(n+1)-f(m),$$

en s.k. <u>teleskopsumma</u> (alla utom första och sista termen tar ut varann)

③

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left((i+1)^3 - i^3\right) = (n+1)^3 - 1^3$$
$$= (n+1)^3 - 1$$

Å andra sidan:

$$\sum_{i=1}^{n} \left((i+1)^3 - i^3\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(i^3 + 3i^2 + 3i + 1 - i^3\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (3i^2 + 3i + 1) =$$
$$= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 =$$
$$= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)\right) =$$
$$= \frac{1}{3}(n+1)\left((n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)\left(2(n^2+2n+1) - 3n - 2\right) =$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(d) $S = \sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}$

$$\Rightarrow rS = \sum_{i=1}^{n} r^i = r + r^2 + r^3 + \dots + r^n$$

$$\Rightarrow (r-1)S = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} + r^n -$$
$$-(1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1}) =$$
$$= r^n - 1$$

$$\Rightarrow S = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$ $\square$

Induktion

Betrakta summor

$$\begin{aligned} 1 &= 1 &= 1^2 \\ 1+3 &= 4 &= 2^2 \\ 1+3+5 &= 9 &= 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 16 &= 4^2 \end{aligned}$$

och så vidare ...

Tydligen tycks gälla:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

d.v.s.

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2 \quad (*)$$

Detta kan förstås bevisas genom (b) på förr-förra sidan. Alternativt kan induktion användas

Induktionsaxiomet: Om M delmängd av $\mathbb{N}$ som uppfyller

(i) $1 \in M$ (startsteg)

(ii) $p \in M \Rightarrow p+1 \in M$ (induktions-steg)

för alla $p \in \mathbb{N}$

så gäller att $M = \mathbb{N}$

Tillämpat på påstående $(*)$ så betyder induktionsaxiomet att man kan bevisa det

5 på följande sätt:

- $$\sum_{i=1}^{1} (2i-1) = 2\cdot 1 - 1 = 2-1 = 1 = 1^2$$

  d.v.s. (*) sant för $n=1$.

  Vi har visat (i), d.v.s. Startsteget.

- Antag (*) sant för $n=p$, d.v.s.

  $$\sum_{i=1}^{p} (2i-1) = p^2 \qquad (**)$$

  Då gäller för $n=p+1$ (nästa steg):

  $$\sum_{i=1}^{p+1} (2i-1) = \sum_{i=1}^{p} (2i-1) + (2(p+1)-1) =$$

  $$\overset{(**)}{=} p^2 + (2(p+1)-1) =$$

  $$= p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$$

  d.v.s. (*) är isåfall sant för $n=p+1$.

  Vi har visat (ii), d.v.s induktionssteget.

Enligt induktionsaxiomet så är då (*) sant för alla $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsbevis

Detta kallas för ett induktionsbevis.

Man kan likna det vid att ha en oändlig rad med dominobrickor. Peta till den första ($1 \in M$) och givet att de faller varann i följd ($p \in M \Rightarrow p+1 \in M$) så faller alla ($M = \mathbb{N}$). ($M$ = alla fallande brickor.)

Konvergens av talföljder

En *talföljd* är en ordnad lista med ett första men inget sista element (oändlig).

Man brukar beteckna termerna (d.v.s. elementen) som a_n och följden $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$.

Exempel: • $\{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$

— explicit definition ($a_n = n^2$)

• $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \{a_n\} = \{1, 2, 1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{1+\sqrt{2}}, \ldots\}$

— rekursiv definition

Lite terminologi:

Definition: (a) $\{a_n\}$ nedåt begränsad av L och L undre begränsning till $\{a_n\}$ om $a_n \geq L \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\forall$: "för alla"

(P.s.s. uppåt begr. av M, M övre begr., om $a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$)

Speciellt: $\{a_n\}$ begränsad om både nedåt & uppåt begr.

$|a_n| \leq K$, $K = \max\{|L|, |M|\}$ funkar

(b) $\{a_n\}$ positiv om $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

(och negativ $\leq$ ")

(c) $\{a_n\}$ växande om $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

(och avtagande $\leq$)

Allmänt: $\{a_n\}$ monoton om antingen växande eller avtagande

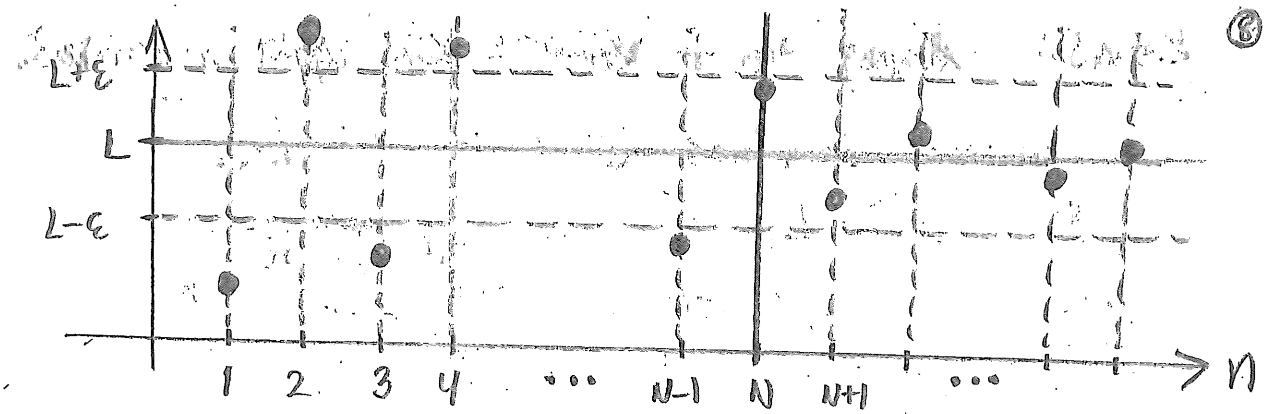
(d) $\{a_n\}$ alternerande om $a_n a_{n+1} < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, d.v.s. två på varandra följande termer har olika tecken (t.ex. $\{-1, 2, -3, 4, \ldots\}$)

Angående (b), (c) & (d), det intressanta är egentligen bara vad som händer på lång sikt. Därför säger man att om $\{a_n\}$ är växande först fr.o.m. $N > 1$ (d.v.s. $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \geq N$) så är talföljden slutligen växande. (Motsvarande för slutligen avtagande, slutligen positiv, slutligen negativ samt slutligen alternerande.)

Konvergens av talföljder:

Vi har konvergens av $\{a_n\}$ om $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ existerar, och $\{a_n\}$ sägs då konvergera mot L. Mer exakt så har vi:

Definition: $\{a_n\}$ sägs konvergera mot gränsvärdet L, d.v.s. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, om för varje $\varepsilon > 0$ finns ett heltal N sådant att om $n \geq N$ så $|a_n - L| < \varepsilon$



<u>Notera:</u> Om $\{a_n\}$ inte konvergerar så <u>divergerar</u> den.

Eftersom det gäller att

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \text{ och } a_n = f(n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

så kan man räkna med gränsvärden till talföljder p.s.s. som med gränsvärden för funktioner.

<u>Sats:</u> Om $\{a_n\}$ konvergerar så är $\{a_n\}$ begränsad.

<u>Bevis:</u> Antag $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Fixera $\varepsilon = 1$.

Finns N s.a. $\underbrace{|a_n - L| < 1 \quad \forall n \geq N.}$

$$\Longrightarrow |a_n| = |(a_n - L) + L| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L|$$

$$\Longrightarrow |a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |L|\}$$

d.v.s. $\{a_n\}$ begränsad. $\square$

<u>Sats:</u> Om $\{a_n\}$ slutligen växande och uppåt begränsad så konvergerar den.

⑨ <u>Bevis:</u> Antag $\{a_n\}$ växande och uppåt begränsad.

Definiera delmängd $S = \{a_n\}$ till $\mathbb{R}$.

S har alltså en övre begränsning.

P.g.a. fullständighetsaxiomet finns minsta övre begränsning $\sup S$. Låt $L = \sup S$.

$\Longrightarrow$ $a_n \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$ och det gäller

för $\varepsilon > 0$ att det finns $N \geq 1$ s.a.

$a_N > L - \varepsilon$ (ty annars $a_n \leq L - \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$, d.v.s. $L - \varepsilon$ <u>ännu mindre</u> än <u>minsta</u> övre begränsning !!!)

$\{a_n\}$ växande $\Rightarrow$ $a_n > L - \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$\Longrightarrow$ $|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

d.v.s. $\{a_n\}$ konvergerar (mot L) $\square$

(Motsvarande resultat för slutligen avtagande och nedåt begränsade talföljder.)

<u>Notera:</u> Antog i beviset egentligen växande, men det spelar ingen roll för slutsatsen.

<u>Sats:</u> Om $\{a_n\}$ slutligen växande så gäller:

- $\{a_n\}$ uppåt begränsad ($\Rightarrow$ konvergent)

eller

- $\{a_n\}$ ej uppåt begränsad ($\Rightarrow$ divergerar mot oändligheten)

Bevis: Antag $\{a_n\}$ växande, d.v.s. antar att det finns $N \geq 1$ s.a. $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Två fall:

- Finns $K \in \mathbb{R}$ s.a. $a_n \leq K$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (dv.s $\{a_n\}$ uppåt begränsad)
- Finns <u>inte</u> sådant K, dv.s. för varje $K \in \mathbb{R}$ finns $N \geq 1$ sådant att $a_N > K$

  Men $\{a_n\}$ växande

  $\Rightarrow$ för varje $K \in \mathbb{R}$ finns $N \geq 1$ sådant att $n \geq N \Rightarrow a_n > K$

  Detta är precis definitionen att $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ $\square$

(Motsvarande resultat för slutligen avtagande talföljder.)

<u>Notera:</u> Antog växande i beviset, men slutsatsen samma för slutligen växande.

<u>Sats:</u> Om $a \leq a_n \leq b$ $\forall n \in \mathbb{N}$ och $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ så gäller $a \leq L \leq b$

<u>Bevis:</u> Antag $L > b$. (Vi kör ett motsägelsebevis!) Låt $\varepsilon = L - b$ (>0)

$\lim_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow$ Finns $N \in \mathbb{N}$ s.a. $|a_N - L| < \varepsilon$

$\Rightarrow a_N > L - \varepsilon =$
$= L - (L-b) = b$

Motsäger att $a_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow L \leq b$

P.s.s. fås $L \geq a$ $\square$

<u>Sats:</u> (a) Om $|x| < 1$ så $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

(b) Om $x \in \mathbb{R}$ så $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

<u>Bevis:</u> (a) Visa $\lim_{n\to\infty} |x|^n = 0$ först.

Betyder: För varje $\varepsilon > 0$ finns $N \geq 1$ s.a. $n \geq N \Rightarrow \left||x|^n - 0\right| < \varepsilon$

$\left||x|^n - 0\right| = |x|^n < \varepsilon \underset{\varepsilon<1 \text{ antas}}{\Leftrightarrow} n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|x|}$

tg $|x| < 1$ (d.v.s. $\ln|x| < 0$). Välj $N = \left\lceil \frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|} \right\rceil$

$\lceil a \rceil$ = minsta heltal $\geq a$

Eftersom $\overbrace{-|x|^n}^{\to 0} \leq x^n \leq \overbrace{|x|^n}^{\to 0}$ så ger instängningssatsen $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

(b) Låt $N > |x|$. För $n > N$ gäller:

12

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\frac{|x|}{N}\frac{|x|}{N+1}\cdots\frac{|x|}{n-1}\frac{|x|}{n}$$

$$< \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\underbrace{\frac{|x|}{N}\frac{|x|}{N}\cdots\frac{|x|}{N}\frac{|x|}{N}}_{n-N+1 \text{ faktorer}} =$$

$$= \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-N+1} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\left(\frac{|x|}{N}\right)^{1-N}\right)}_{=K}\left(\frac{|x|}{N}\right)^n =$$

$$= K\left(\frac{|x|}{N}\right)^n \qquad (*)$$

oberoende av n

Vi har $N > |x| \Leftrightarrow \frac{|x|}{N} < 1$

$\Rightarrow$ [Tillämpa (a)] $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|}{N}\right)^n = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right| = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$ $\square$

Notera: Instängningssatsen i de två sista stegen i beviset.

13

Några jämna övningsuppgifter

5.1:12

$$1-x+x^2-x^3+\dots+x^{2n}=$$

$$=(-1)^0x^0+(-1)^1x^1+(-1)^2x^2+$$
$$+(-1)^3x^3+\dots+(-1)^{(2n)}x^{(2n)}=$$

$$=\boxed{\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i x^i}$$

5.1:16

$$\sum_{k=-5}^{m}\frac{1}{k^2+1}=\left[\begin{array}{l} i=k+6 \text{ tg då} \\ k=-5 \Leftrightarrow i=1 \end{array}\right]=$$

$$=\sum_{i=-5+6}^{m+6}\frac{1}{(i-6)^2+1}=$$

$$=\boxed{\sum_{i=1}^{m+6}\frac{1}{(i-6)^2+1}}$$

5.1:20

$$\sum_{i=1}^{n}(2^i-i^2)=\sum_{i=1}^{n}2^i-\sum_{i=1}^{n}i^2=$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}2^{i-1}-\sum_{i=1}^{n}i^2=$$

$$=2\,\frac{2^n-1}{2-1}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=$$

$$=\boxed{2^{n+1}-2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

5.1:38

Visa $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}r^{i-1}=\frac{r^n-1}{r-1}\quad(r\neq 1)$

med induktion.

(14)

- **Startsteg:** $VL_{n=1} = \sum_{i=1}^{1} r^{i-1} = r^{1-1} = r^0 = 1$

$HL_{n=1} = \frac{r^1 - 1}{r-1} = \frac{r-1}{r-1} = 1$

$\Longrightarrow$ Startsteget $n=1$ verifierat

- **Induktionssteg:** Antag $VL_p = HL_p$ (*)

$\Longrightarrow VL_{p+1} = \sum_{i=1}^{p+1} r^{i-1} = \sum_{i=1}^{p} r^{i-1} + r^{(p+1)-1} =$

$= VL_p + r^p \overset{(*)}{=} HL_p + r^p =$

$= \frac{r^p - 1}{r-1} + r^p = \frac{(r^p - 1) + r^p(r-1)}{r-1} =$

$= \frac{r^p - 1 + r^{p+1} - r^p}{r-1} = \frac{r^{p+1} - 1}{r-1} = HL_{p+1}$

$\Longrightarrow$ Induktionssteget verifierat

Induktionsaxiomet ger påståendet. $\square$

9.1:8 $\left\{ \frac{(-1)^n n}{e^n} \right\}$, $a_n = \frac{(-1)^n n}{e^n}$

(a) Begränsad ty $n/e^n \longrightarrow 0$

(b),(c) Alternerande ty $\{-1/e, +2/e^2, -3/e^3, \dots\}$

(d) Konvergerar mot 0 ty $\frac{n}{e^n} \longrightarrow 0$ då $n \to \infty$

samt instängningssatsen $\left(\underbrace{-\frac{n}{e^n}}_{\to 0} \le a_n \le \underbrace{\frac{n}{e^n}}_{\to 0} \right)$

(15) **9.1:18**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2\sqrt{n}+1}{1-n-3n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-2n^{1/2}+1)/n^2}{(1-n-3n^2)/n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-2n^{-3/2}+1/n^2}{1/n^2-1/n-3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2-2/n\sqrt{n}+1}{1/n^2-1/n-3} =$$

$$= \frac{0-0+1}{0-0-3} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

9.1:26

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \Big/ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{(-1)}{n}\right)^n \Big/ \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a\right] =$$

$$= e^{-1}/e^{1} = \underline{e^{-2}}$$

Se även RÖ 9 HT09 där jag löst bl.a. 9.1:10, 9.1:24, 9.1:28