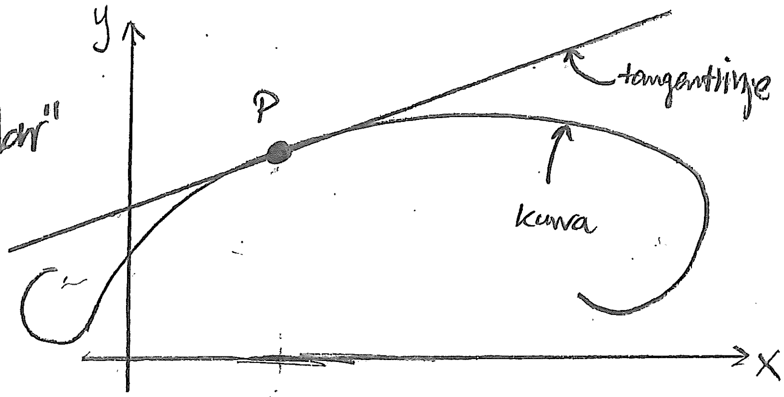
①

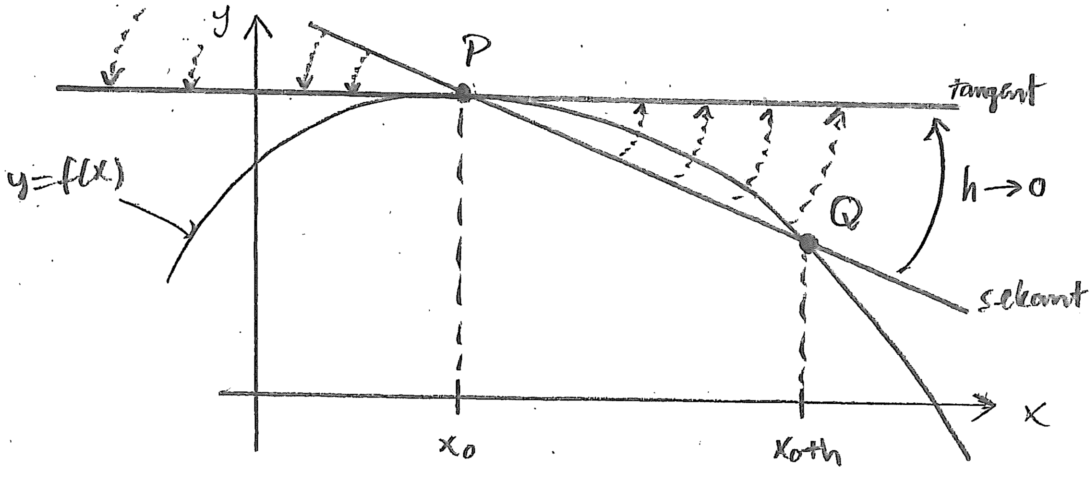
Föreläsning 4

Tangentlinjer En tangentlinje till en kurva (t.ex. en funktionsgraf) är en rät linje som går genom kurvan i en bestämd punkt och har samma lutning som kurvan där.

Tangenten "nuddar" alltså bara kurvan där.



För en funktion $y=f(x)$:



Sekantlinje PQ där $P=(x, f(x))$ och $Q=(x_0+h, f(x_0+h))$. Lutningen är

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Sekantlinjen $\longrightarrow$ tangentlinjen då $h \to 0$

d.v.s. lutningen för tangentlinjen är

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad (*)$$ ②

Man inser att tangentens ekvation ges av

$$y = m(x - x_0) + y_0 \qquad \text{(icke-vertikal)}$$

(m lutningen, $y(x_0) = m(x_0 - x_0) + y_0 = y_0$, stämmer)

Om gränsvärdet $(*)$ är oändligt (antingen $+\infty$ eller $-\infty$) så har man en vertikal tangent i $x = x_0$. Om gränsvärdet $(*)$ saknas så saknas även tangent.

Normaler: Linjen genom P som är vinkelrät mot tangenten kallas för normalen.

Horisontell (vertikal) tangent har vertikal (horisontell) normal, i övrigt gäller:

$$\text{normallutningen} = -\frac{1}{\text{tangentlutningen}}$$

Exempel: Hitta tangent och normal till $y = x^{3/2}$ i $(4, 8)$.

Lösning: Tangentlutning i $(x_0, y_0) = (4, 8)$:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^{3/2} - 8}{(4+h) - 4} =$$

③

$$= \lim_{h \to 0} \frac{((4+h)^{3/2}-8)((4+h)^{3/2}+8)}{h((4+h)^{3/2}+8)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^3-64}{h((4+h)^{3/2}+8)} = [(a+b)^3 = a^3+3a^2b+ + 3ab^2+b^3] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(64+48h+12h^2+h^3)-64}{h((4+h)^{3/2}+8)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{48+12h+h^2}{(4+h)^{3/2}+8} = \frac{48}{8+8} = 3$$

$\Longrightarrow$ Tangentlinjens ekvation är

$$y = m(x-x_0)+y_0 =$$
$$= 3(x-4)+8 = 3x-4$$

d.v.s. $\boxed{3x-y+4=0}$

För normalen gäller lutningen:

$$m_{normal} = -\frac{1}{m_{tangent}} = -\frac{1}{3}$$

$\Longrightarrow$ Normallinjens ekvation är

$$y = m(x-x_0)+y_0 =$$
$$= -\frac{1}{3}(x-4)+8$$
$$\Longleftrightarrow -3y = (x-4)-24$$

d.v.s. $\boxed{x+3y-28=0}$ □

Derivatan Om man betraktar lutningen av tangenten till en funktionsgraf som en funktion så har man den s.k.

derivatan:

Definition: Derivatan till en funktion f är en funktion f' definierad genom

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (*)$$

i de punkter x för vilka gränsvärdet existerar, d.v.s. där f är deriverbar.

Derivatan beskriver hur snabbt en storhet $y = f(x)$ ändras m.a.p. en storhet x.
(T.ex. $y =$ läge, $x =$ tid $\Rightarrow f'(x) =$ hastighet)

Notera: Alt. kan man skriva $(*)$ som

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(inses genom variabelsubstitution)

Höger- och vänsterderivator: Vi definierar:

- Högerderivata i $x = a$: $f'_+(a) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Vänsterderivata i $x = b$: $f'_-(b) = \lim_{h \to 0_-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$

Definition: f är deriverbar på $[a,b]$ om $f'(x)$ finns $\forall x \in (a,b)$ och både $f'_+(a)$ och $f'_-(b)$ finns.

⑤ (I denna definition inkluderas alltså även ändpunkterna och inte bara inre punkter.)

Leibnitznotation: Det finns många sätt att skriva en derivata på. För en funktion $y=f(x)$ kan man t.ex. skriva:

$$D_x y,\ y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x),\ f'(x),\ D_x f(x),\ Df(x)$$

D_x, $\frac{d}{dx}$ och D är differentialoperatorer.

(På linjär algebra-språk så är det en linjär avbildning: $D(af+bg)=aDf+bDg$.)

Tecknet $|$ kallas insättningstecknet:

$$D_x y\big|_{x=x_0} = y'\big|_{x=x_0} = \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0} =$$

$$= \frac{d}{dx}f(x)\bigg|_{x=x_0} = f'(x_0) = D_x f(x_0)$$

Differentialer: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ är en kvot. Kan derivatan (d.v.s. gränsvärdet då $\Delta x \to 0$) betraktas som kvot?

Låt dx vara en oberoende variabel (differentialen av x) och låt dy vara en beroende variabel (differentialen av y) m.a.p. x och dx:

$$dy = \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{derivatan!}} dx = f'(x)\,dx$$

På detta sätt kan man betrakta $\frac{dy}{dx}$ som en kvot, och värdet är $f'(x)$.

Differentialer dx och dy kan i vissa tillämpningar ses som "infinitesimala", d.v.s. oändligt små men nollskilda. (Detta gränsar till filosofi och sysselsatte äldre matematiker.)

Deriveringsregler Givetvis så använder vi inte derivatans definition vid uträkning av derivator. Man använder diverse regler. Låt oss lista de grundläggande:

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- (Produktregeln) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

  (Speciellt: $(Cf)'(x) = Cf'(x)$, $g(x) = C$)
- Generalisering: $(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n'$
- (Kvotregeln) $(f/g)'(x) = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, $g(x) \neq 0$

  (Speciellt: $(1/f)'(x) = -f'(x)/(f(x))^2$, $f(x) \neq 0$)

Låt oss bevisa $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, med produktregeln och induktion:

- Startsteg: $\frac{d}{dx} x^1 = \frac{d}{dx} x = 1 = x^0 = 1x^{1-1}$,

  d.v.s. formeln sann för $n=1$.

- Induktionssteg: Antag formeln sann för $n=p$,

  d.v.s. $\frac{d}{dx} x^p = p x^{p-1}$. Då gäller:

$$\frac{d}{dx} x^{p+1} = \frac{d}{dx}(x^p x) = [\text{produktregeln}] =$$
$$= \left(\frac{d}{dx} x^p\right)x + x^p\left(\frac{d}{dx} x\right) = [\text{antagande}] =$$
$$= (p x^{p-1})x + x^p \cdot 1 =$$
$$= p x^p + x^p = (p+1)x^{(p+1)-1}$$

  d.v.s. formeln sann för $n=p+1$.

Induktionsaxiomet säger nu att formeln sann för alla $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Kedjeregeln Tar hand om sammansatta funktioner, d.v.s. av typen

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

där $\circ$ uttalas "boll".

Sats: (kedjeregeln) Om $f(u)$ deriverbar i $u=g(x)$ och $g(x)$ deriverbar i x så är sammansättningen $(f \circ g)(x)$ deriverbar i x och

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

För $y=f(u)$ och $u=g(x)$ så blir det med Leibnitznotation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Exempel: Derivera $y=(2x^2-3x+1)^{3/2}$

Lösning: Sätt $y=f(u)=u^{3/2}$ och

$u=g(x)=2x^2-3x+1$

Enligt kedjeregeln:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \left(\frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_{u=g(x)}(4x-3) =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{g(x)}\,(4x-3) =$$

$$= \left(6x-\frac{9}{2}\right)\sqrt{2x^2-3x+1} \qquad \square$$

Bevis av satsen: Antag f deriverbar i $u=g(x)$ och g deriverbar i x.

Låt $E(k)$ definieras enligt

$$E(k) = \begin{cases} 0 & , k=0 \\ \dfrac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u), & k\neq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lim_{k\to 0} E(k) = \lim_{k\to 0}\frac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u) =$$

$$= f'(u) - f'(u) = 0,$$

d.v.s. E kontinuerlig i $k=0$ ty $E(0)=0$.

(9) Låt $u = g(x)$ och $k = g(x+h) - g(x)$

$$\Rightarrow u + k = g(x) + (g(x+h) - g(x)) = g(x+h)$$

Eftersom $f(u+k) - f(u) = (f'(u) + E(k))k$ (gäller även för $k=0$) så fås därför

$$f(g(x+h)) - f(g(x)) = (f'(g(x)) + E(k)) \cdot (g(x+h) - g(x))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(g(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f'(g(x)) + E(k))(g(x+h) - g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (f'(g(x)) + E(k)) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$= \left(f'(g(x)) + \lim_{h\to 0} E(k)\right) g'(x) =$$

$$= [\text{E kontinuerlig i } k=0] =$$

$$= \left(f'(g(x)) + E\left(\lim_{h\to 0} k\right)\right) g'(x)$$

Det återstår att visa att $\lim_{h\to 0} k = 0$ ty $E(0) = 0$.

$$\lim_{h\to 0} k = \lim_{h\to 0} (g(x+h) - g(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} h =$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0} h\right) =$$

$$= g'(x) \cdot 0 = 0, \text{ det gäller.} \quad \square$$

Notera: I sista delen av beviset visade vi faktiskt att en deriverbar funktion även är kontinuerlig.

Högre ordningens derivator

Om derivatan $y' = f'(x)$ till funktion $y = f(x)$ är deriverbar i x så kan vi derivera derivatan. Resultatet kallas andra-derivatan till f och skrivs $y'' = f''(x)$.

Allmänt kan man erhålla n:te-derivatan $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$. Beteckningar:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = D_x^n y = D_x^n f(x)$$

(Man använder prim till och med y''', sen $y^{(4)}, y^{(5)}, y^{(6)}, \ldots$)

Användning av derivator

Derivator beskriver många fenomen. Låt oss titta på ett exempel där derivatan kan användas.

Notera först att om $f'(x_0) = 0$ så säger man att f är stationär i x_0 och att x_0 är en kritisk punkt.

Exempel: Temperatur T (°C) efter t (timmar):

$$T = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 10, \quad t \in [0, 5]$$

(11) Hur snabbt faller/stiger tempraturen efter 1 timme? efter 3 timmar? Vid vilka tidpunkter är Temperaturen stationär?

__Lösning:__ Temperaturförändring (°C/timme):

$$\frac{dT}{dt} = t^2 - 6t + 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\text{Ändring } t=1:} \quad \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=1} = 1^2 - 6\cdot 1 + 8 = \\ \qquad = \underline{3 \text{ °C/timme}} \text{ (stiger)} \\ \underline{\text{Ändring } t=3:} \quad \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=3} = 3^2 - 6\cdot 3 + 8 = \\ \qquad = \underline{-1 \text{ °C/timme}} \text{ (faller)} \end{cases}$$

__Stationär:__ $\frac{dT}{dt} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} = 3 \pm 1 = \begin{cases} 4 \text{ timmar} \\ 2 \text{ timmar} \end{cases}$$

d.v.s. temperaturen stationär efter __2 timmar__ och __4 timmar__ $\square$

Några jämna övningsuppgifter

2.1:22 Kurva $y = 1/x$, linje $y = 4x-3$

Kurvan har i punkten $(a, 1/a)$ lutningen

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{(a+h)-a} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{a-(a+h)}{(a+h)a}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{(a+h)ah} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{(a+h)a} = -\frac{1}{a^2}$$

Detta är tangentens lutning i $x=a$.

Normalen till tangenten har lutningen $-\frac{1}{m}$.

Å andra sidan vet vi att normalen är $y=4x-3$

Så $\quad 4 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-1/a^2} = a^2$

$$\Rightarrow a = \pm 2 \Rightarrow 1/a = \pm 1/2$$

Punkterna är $\underline{(\pm 2, \pm 1/2)}$ (kopplade tecken)

2.2:18 $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{2-x}$

a) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{4}\sqrt{2-(x+h)} - \frac{3}{4}\sqrt{2-x}}{h} =$$

$$= \frac{3}{4}\lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{2-x-h}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2-x-h}+\sqrt{2-x})}{h(\sqrt{2-x-h}+\sqrt{2-x})} =$$

$$= \frac{3}{4}\lim_{h\to 0} \frac{(2-x-h)-(2-x)}{h(\sqrt{2-x-h}+\sqrt{2-x})} =$$

⑬

$$= -\frac{3}{4}\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2-x-h}+\sqrt{2-x}} =$$

$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2-x}} = \boxed{-\frac{3}{8\sqrt{2-x}}}$$

b) Med differentialer:

$$dy = f'(x)\,dx = -\frac{3}{8\sqrt{2-x}}\,dx$$

d.v.s. $\boxed{dy = -\frac{3\,dx}{8\sqrt{2-x}}}$

2.3:54 $(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n'$
Visa med induktion $(n \in \mathbb{N})$

Lösning: • Startsteg: $f_1' = f_1'$ (trivialt)

$\Longrightarrow$ Stämmer för $n=1$

• Induktionssteg: Antag sant för $n=p$:

$$(f_1 f_2 \cdots f_p)' = f_1' f_2 \cdots f_p + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_p' \quad (*)$$

Då får vi för $n=p+1$:

$$(f_1 f_2 \cdots f_p f_{p+1})' = ((f_1 f_2 \cdots f_p) f_{p+1})' =$$

$$= (f_1 f_2 \cdots f_p)' f_{p+1} +$$

$$+ (f_1 f_2 \cdots f_p) f_{p+1}' \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} (f_1' f_2 \cdots f_p + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_p') f_{p+1} +$$

$$+ f_1 f_2 \cdots f_p f_{p+1}' =$$

$$= f_1' f_2 \cdots f_p f_{p+1} + \cdots +$$
$$+ f_1 f_2 \cdots f_p' f_{p+1} +$$
$$+ f_1 f_2 \cdots f_p f_{p+1}'$$

d.v.s. vi har verifierat att det stämmer för $n = p+1$, induktionssteget klart.

Induktionsaxiomet ger att formeln stämmer för alla $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2.4:30 Vi ska beräkna $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1}\right)\Big|_{x=-2}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1}\right)\Big|_{x=-2} = [\text{använd först kvotregeln}] =$$

$$= \frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1}\,\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}\Bigg|_{x=-2} =$$

$$= \left[\text{kedjeregeln: } \frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx}\right] =$$

$$= \frac{(x^2+1)\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\frac{d}{dx}(x^2-1) - \sqrt{x^2-1}\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\Bigg|_{x=-2} =$$

$$= \frac{(x^2+1)\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}2x - 2x\sqrt{x^2-1}}{(x^2+1)^2}\Bigg|_{x=-2} =$$

$$= \frac{\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}} - 2x\sqrt{x^2-1}}{(x^2+1)^2}\Bigg|_{x=-2} =$$

$$= \frac{\frac{(-2)(4+1)}{\sqrt{4-1}} - 2\cdot(-2)\sqrt{4-1}}{(4+1)^2} =$$

$$= \frac{-10/\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{5^2} = \frac{4\cdot 3 - 10}{25\sqrt{3}} =$$

$$= \boxed{2/25\sqrt{3}}$$

15

2.6:16

$f(x) = \sqrt{x}$, bestämma $f^{(n)}(x)$.

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \qquad (n=0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad (n=1)$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} \qquad (n=2)$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}} \qquad (n=3)$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-\frac{7}{2}} \qquad (n=4)$$

$$\vdots$$

Förmodan: $f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)x^{-\frac{2n-1}{2}} =$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n}x^{\frac{1}{2}-n}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}x^{\frac{1}{2}-n}, \quad n \geq 2$$

(Notera: $m!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(m-2)m$, m udda, en s.a. semifakultet.)

Induktionsbevis:
- Startsteg: $n=2$ redan klart, se ovan.
- Induktionssteg: Antag formeln sann för $n=p$. Då fås:

$$f^{(p+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(f^{(p)}(x)\right) = [\text{Sann } n=p] =$$

$$= \frac{d}{dx}\left((-1)^{p-1}\frac{(2p-3)!!}{2^p}x^{\frac{1}{2}-p}\right) =$$

$$= (-1)^{p-1}\frac{(2p-3)!!}{2^p}\left(\frac{1}{2}-p\right)x^{\frac{1}{2}-p-1} =$$

$$= (-1)^{p-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-3)}{2^p}\left(-\frac{2p-1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-(p+1)} =$$

$$= (-1)^{p-1}(-1)\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-3)(2p-1)}{2^{p+1}}x^{\frac{1}{2}-(p+1)} =$$

$$= (-1)^{(p+1)-1}\frac{(2p-1)!!}{2^{p+1}}x^{\frac{1}{2}-(p+1)} =$$

$$= (-1)^{(p+1)-1}\frac{(2(p+1)-3)!!}{2^{p+1}}x^{\frac{1}{2}-(p+1)}$$

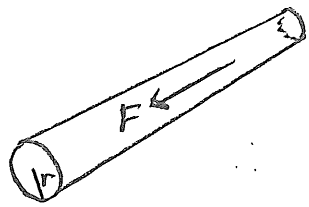
d.v.s. formeln sann för $n=p+1$.

Enligt induktionsaxiomet sann $\forall n \geq 2$. $\square$

2.7:32 (Poiseuilles lag)

Flöde av vätska genom ett rör:

$$F = kr^4 \quad \text{(liter/min)}$$



där r är rörets radie och k konstant.

(k beror på tryckskillnaden, rörets längd och vätskans viskositet.)

Vilken procentuell ökning i r ger $+10\%$ hos F?

$$\frac{dF}{dr} = 4kr^3 \Rightarrow \Delta F \approx \frac{dF}{dr}\Delta r = 4kr^3\Delta r,$$

ΔF och Δr är ökning hos F & r. Vi vill ha

$$\frac{\Delta F}{F} = +10\% \Leftrightarrow \frac{4kr^3\Delta r}{F} \approx 0.1 \Leftrightarrow \frac{4kr^3\Delta r}{kr^4} \approx 0.1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\frac{\Delta r}{r} \approx 0.1 \Leftrightarrow \frac{\Delta r}{r} \approx \frac{0.1}{4} = 0.025 = +2.5\%$$

d.v.s. radien ska approximativt öka 2.5%

17. Se även RÖ 3 HT09 där jag löst bl.a.
2.2:24, 2.2:32 och 2.2:46