

①

MVS och olikheter

Medelvärdesatsen (MVS) i Föreläsning 5 kan användas för att visa vissa olikheter.

Exempel: Visa m.h.a. MVS olikheten

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$$

för $x > 0$.

Lösning: Börja med att välja lämpligt f att använda i MVS, vanligen något som innehåller den mest "komplexa" delen:

$$f(x) = \sqrt{1+x} \quad (f \text{ kontinuerlig})$$

Fixera $x > 0$ och tillämpa MVS på f på intervallet $[0, x]$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$$

för något $c \in (0, x)$.

Detta betyder

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+0}}{x-0} = \frac{1}{2\sqrt{1+c}}$$

eller

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{1+c}}$$

(2)

Men $c \in (0, x) \Rightarrow c > 0 \Rightarrow 1+c > 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{1+c} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+c}} < 1 \Rightarrow$$

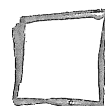
$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+c}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow_{(x>0)} \sqrt{1+x} - 1 < \frac{1}{2}x$$

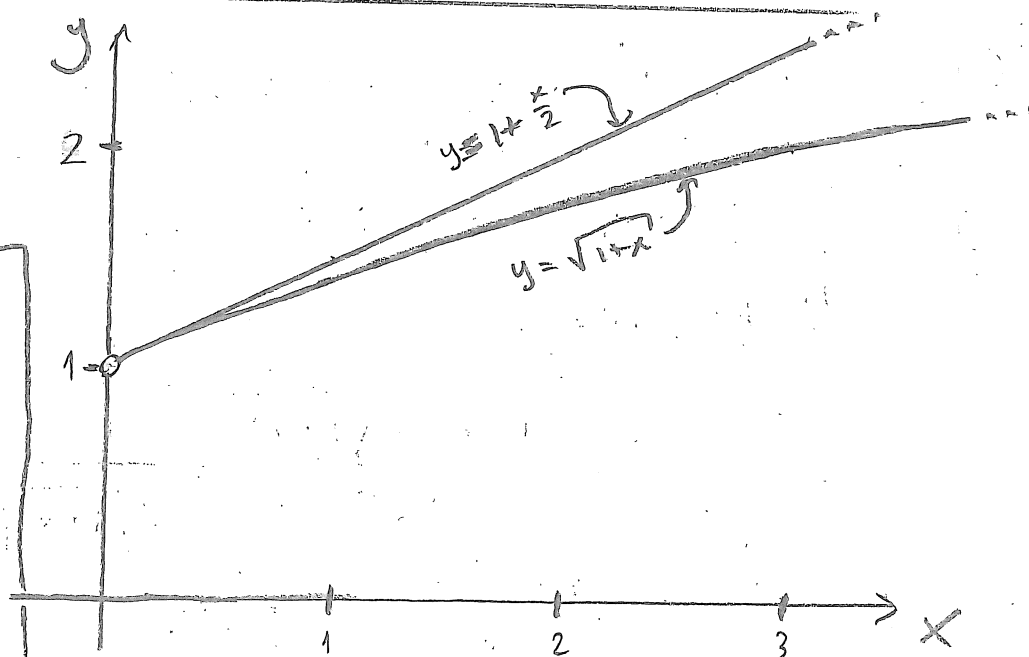
$$\text{d.v.s. } \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$$

vilket gäller $\forall x > 0$.



Notera: Som sagt, det svåra ligger i att definiera rätt funktion f att använda i MVS.

Grafiskt:



Notera att

$$1 + \frac{x}{2} = P_1(x)$$

$$\text{för } f(x) = \sqrt{1+x}$$

o.s.s.

$$f(x) \approx P_1(x)$$

Taylorapproximation