1

Föreläsning 6

Grafskissering

Inför s.k. asymptoter:

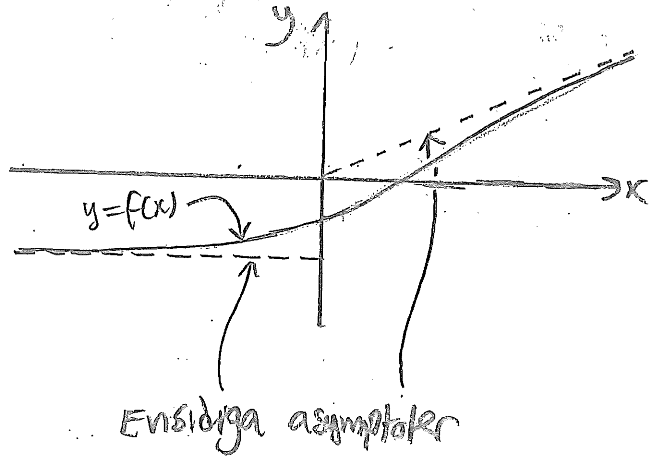
Definition:

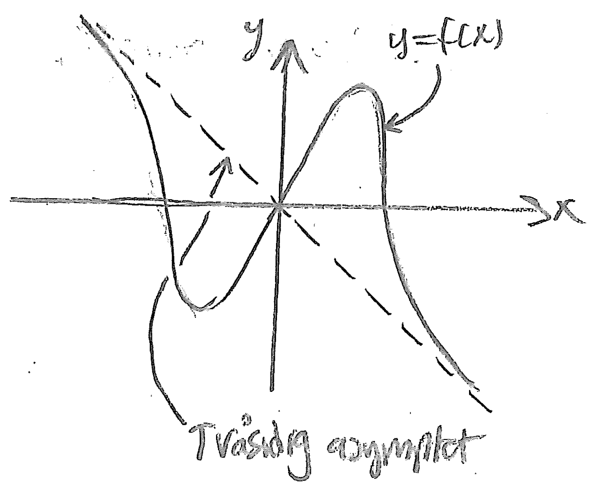
- Vertikal asymptot i $x=a$ om
$$\lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty \quad \text{eller}$$
$$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$$

- Horisontell asymptot $y=L$ om
$$\lim_{x\to \infty} f(x) = L \quad \text{eller}$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

- Sned asymptot $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ om
$$\lim_{x\to -\infty} (f(x)-(ax+b)) = 0 \quad \text{eller}$$
$$\lim_{x\to \infty} (f(x)-(ax+b)) = 0$$

Asymptoterna är en- eller tvåsidiga.





Hur hitta sneda asymptoter? Enkelt om rationellt:

Exempel: Rationell funktion

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+x-2}$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l|l} \quad x - 1 & \\ \hline x^3 & x^2+x-2 \\ \underline{-x(x^2+x-2)} & \\ -x^2+2 & \\ \underline{-(-1)(x^2+x-2)} & \\ x-2 & \end{array}$$

$$\Longrightarrow f(x) = (x-1) + \underbrace{\frac{x-2}{x^2+x-2}}_{\to 0 \text{ då } x\to\pm\infty}$$

$\Rightarrow$ Sned asymptot $\boxed{y = x-1}$

(Dessutom finns det vertikala asymptoter där $x^2+x-2=0 \iff x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} =$

$= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$,

d.v.s. vertikala asymptoter $\boxed{x=-2, x=1}$.)

Formell grafskissering: Följ receptet:

1. Beräkna $f'(x)$ och $f''(x)$ (faktorisera om möjligt)

2. Undersök $f(x)$:

   (a) Vertikala asymptoter (Nämnaren noll)

   (b_1) Horisontella asymptoter ($\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$)

   (b_2) Sneda asymptoter ($\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax+b))$)

③

(c) Symmetrier (f udda/jämn)

(d) Koordinataxelsskärningspunkter

3. Undersök $f'(x)$:

(a) Kritiska punkter ($f'(x)=0$)

(b) Punkter där $f'(x)$ ej definierad

(singulära punkter, ändpunkter, vertikala asymptoter (se 2.(a)))

(c) Intervall där $f'(x)$ positiv eller negativ

(d.v.s teckmet "+" eller "−" i tabell, för f skriver man "↗" (växande) resp. "↘" (avtagande))

4. Undersök $f''(x)$:

(a) Punkter där $f''(x)=0$.

(b) Punkter där $f''(x)$ ej definierad

(singulära punkter, ändpunkter, vertikala asymptoter (se 2.(a)) etc.)

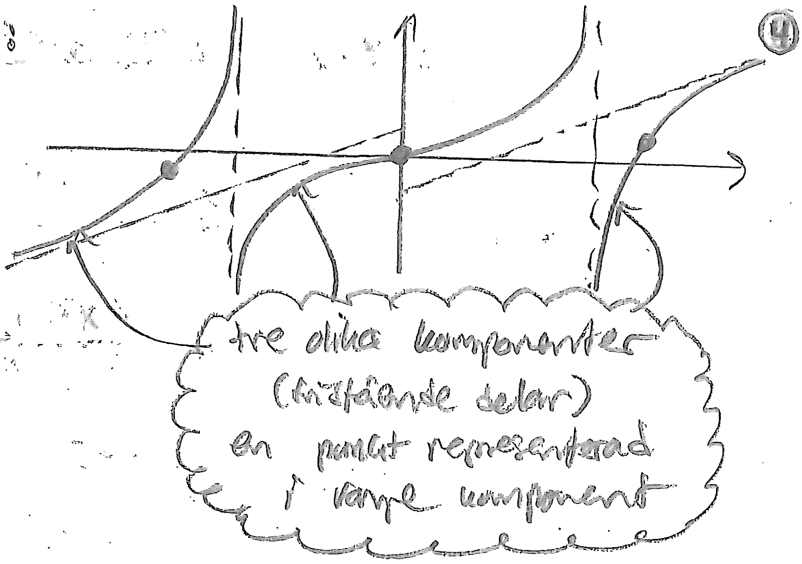
(c) Intervall där $f''(x)$ positiv eller negativ

(d.v.s. teckmet "+" eller "−" i tabell, för f skriver man "∪" (konvex) resp. "∩" (konkav))

(d) Inflexionspunkter

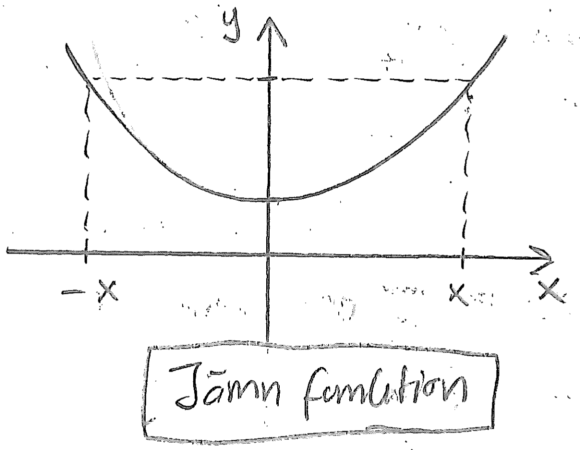
Notera: Skriv med koordinater för kritiska punkter, singulära punkter och inflexionspunkter. Se också till att få med minst en punkts koordinat i varje "komponent" av grafen

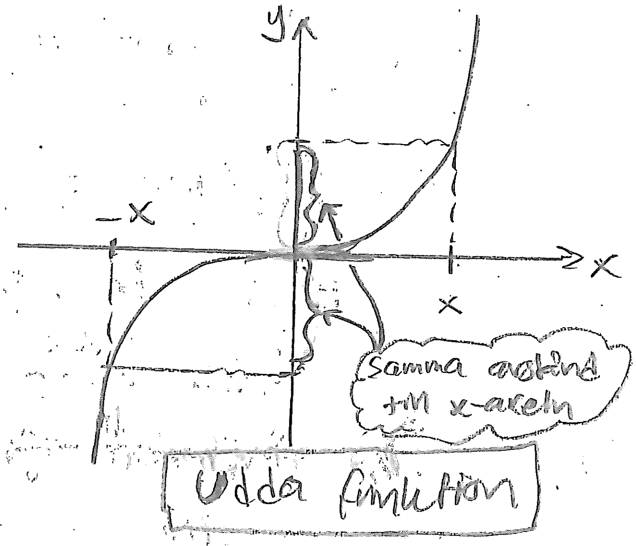
Komponent:



Notera: (F 2.(c))

- **Jämn funktion:** $f(-x) = f(x)$
- **Udda funktion:** $f(-x) = -f(x)$





Exempel: Skissera $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

Lösning: (1.) $$f'(x) = \frac{(x^2-4)\frac{d}{dx}(x^2-1) - (x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2-4)}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{(x^2-4)\cdot 2x - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 + 2x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= -6\frac{x}{(x^2-4)^2}$$

⑤

$$f''(x) = -6\,\frac{(x^2-4)^2\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}((x^2-4)^2)}{((x^2-4)^2)^2} =$$

$$= -6\,\frac{(x^2-4)^2 - x\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4} =$$

$$= -6\,\frac{(x^2-4) - 4x^2}{(x^2-4)^3} =$$

$$= -6\,\frac{-3x^2-4}{(x^2-4)^3} = 6\,\frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3}$$

2. (a) Vertikala asymptoter där $x^2-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$

$$\lim_{x\to -2_-} f(x) = \lim_{x\to -2_-} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \frac{3}{0_+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2_+} f(x) = \qquad = -\infty$$

P.S.S. $\lim_{x\to 2\pm} f(x) = \mp\infty$ (kompletta tecken)

$\Longrightarrow x=\pm 2$ vert. asympt.

(b₁) Horisontella asymptoter:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-1/x^2}{1-4/x^2} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

$\Longrightarrow y=1$ horis. asympt. (dubbelsidig)

(b₂) Sneda asymptoter: utesluts av att det finns en tvåsidig horisontell asymptot!

(c) Symmetrier: $f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2-4} =$

$= \frac{x^2-1}{x^2-4} = f(x) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f$ jämn funktion

(d) Skärning med y-axeln:

$$f(0) = \frac{0^2-1}{0^2-4} = \frac{-1}{-4} = 1/4$$

d.v.s. $(0, 1/4)$

Skärning med x-axeln:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

d.v.s. $(\pm 1, 0)$

3\. (a) Kritiska punkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -6\frac{x}{(x^2-4)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 1/4)$$

(se 2.(d).)

(b) f' ej definierad i $x = \pm 2$ (Jmf. 2.(a).)

(c) $f' > 0 \Leftrightarrow x < 0$, $f' < 0 \Leftrightarrow x > 0$
$(x \neq -2)$ $(x \neq 2)$

4\. (a) $f'' = 0 \Leftrightarrow 6\frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3} = 0 \Leftrightarrow 3x^2+4 = 0$,

saknar lösning, ing sådana punkter finns

(b) f'' ej definierad i $x = \pm 2$ (Jmf. 2.(a) & 3.(b).)

(c) $f'' > 0 \Leftrightarrow 6\frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3} > 0 \Leftrightarrow x^2-4 > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x < -2 \text{ eller } x > 2$$

$$\Rightarrow f'' < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$$

(d) Saknas.

7

Dessutom: Tre komponenter, minst en punkt i varje ska beräknas. Har redan för $(-2,2)$. Två övriga:

För $(-\infty,-2)$: $f(-3) = \frac{9-1}{9-4} = 8/5$

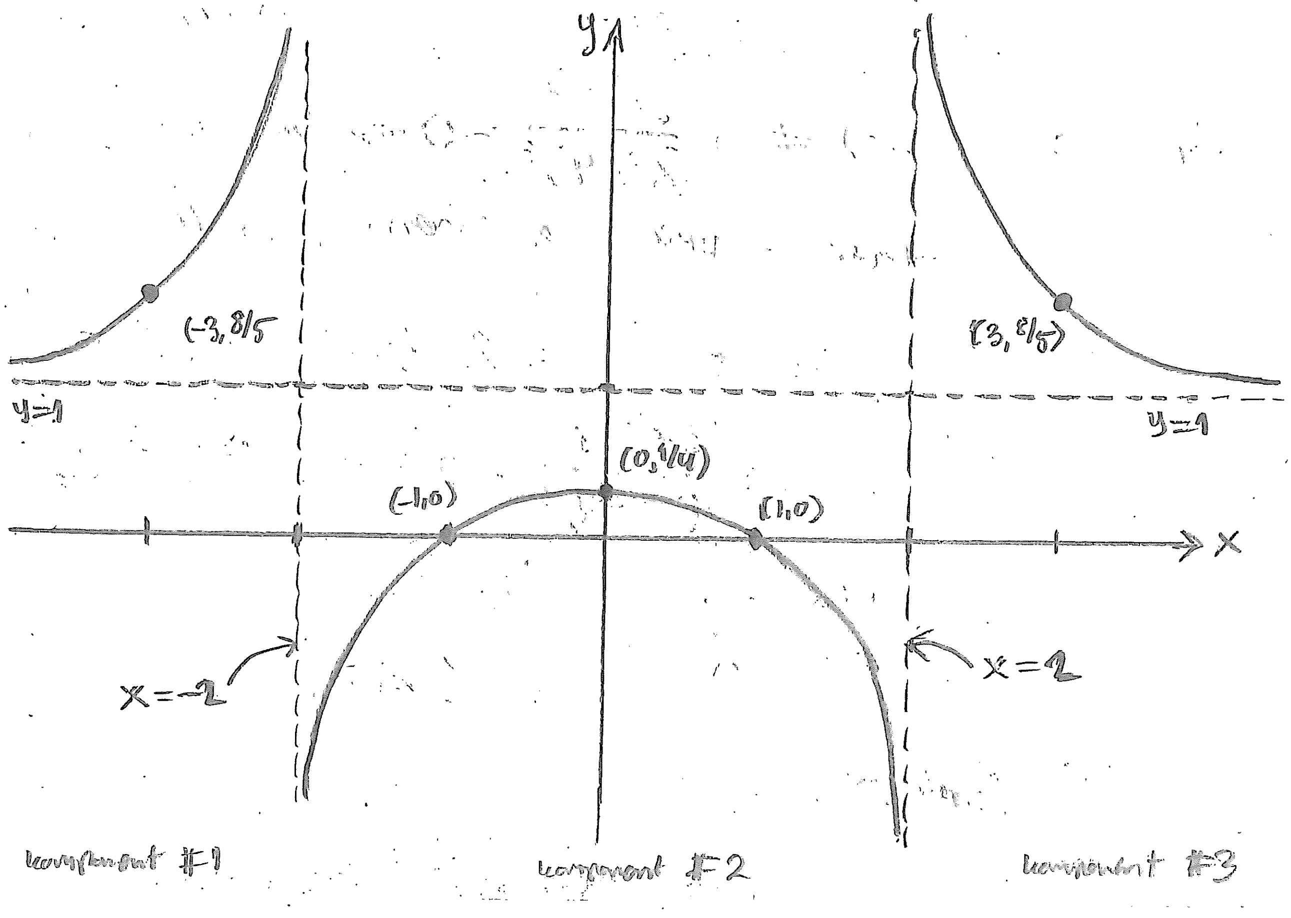
För $(2,\infty)$: $f(3) = [\text{symm.}] = f(-3) = 8/5$

d.v.s. $(\pm 3, 8/5)$

Sätt upp tabell:

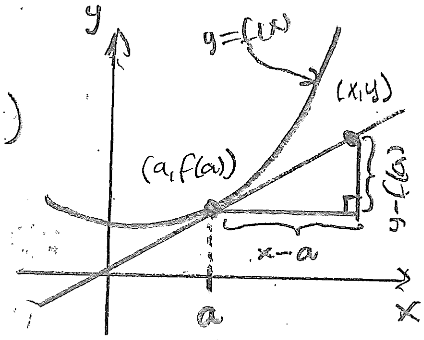
x		-2		0		2	
f'	$+ + + + + +$	$\wr$	$+ + + + + +$	0	$- - - - -$	$\wr$	$- - - -$
f''	$+ + + + + + +$	$\wr$	$- - - - - - - - - - -$			$\wr$	$+ + + + + +$
f	$\nearrow$ $\cup$	vert. asympt.	$\nearrow$ $\cap$	lok max	$\searrow$ $\cap$	vert. asympt.	$\searrow$ $\cup$

Vi har tillräckligt med information för att skissera:



Taylors sats

Tangentlinjen till $f(x)$ i $x=a$ har (om den finns) ekvationen



$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

ty $$f'(a) = \frac{y-f(a)}{x-a}$$

Detta är ett polynom $P_1(x)$ av grad 1:

$$P_1(x) = y = \big(f(a) - f'(a)a\big) + f'(a)x$$

P_1 fungerar som approximation därför att

$$P_1(a) = f(a) \quad \text{och} \quad P_1'(a) = f'(a)$$

Man borde få ännu bättre approximation om man lyckas få till

$$P_n(a) = f(a),\ P_n'(a) = f'(a), \ldots, P_n^{(n)} = f^{(n)}(a) \quad (*)$$

för $n > 1$ där P_n är n:te-gradspolynom.

Det gäller att $$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \quad (**)$$

uppfyller $(*)$ ovan, ty

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \Rightarrow P_n(a) = \frac{f^{(0)}(a)}{0!} = f(a)$$

$$P_n'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}\, i\,(x-a)^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{(i-1)!}(x-a)^{i-1}$$

9

$$\Rightarrow P_n'(a) = \frac{f^{(1)}(a)}{(1-1)!} = f'(a)$$

$$P_n''(x) = \sum_{i=2}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{(i-1)!}(i-1)(x-a)^{i-2} =$$

$$= \sum_{i=2}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{(i-2)!}(x-a)^{i-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_n''(a) = \frac{f^{(2)}(a)}{(2-2)!} = f''(a)$$

$$P_n'''(x) = \sum_{i=3}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{(i-2)!}(i-2)(x-a)^{i-3} =$$

$$= \sum_{i=3}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{(i-3)!}(x-a)^{i-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_n'''(a) = \frac{f^{(3)}(a)}{(3-3)!} = f'''(a)$$

$\vdots$

$$P_n^{(n)}(x) = \sum_{i=n}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{(i-(n-1))!}(i-(n-1))(x-a)^{i-n} =$$

$$= \sum_{i=n}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{(i-n)!}(x-a)^{i-n} = \frac{f^{(i)}(a)}{0!} = f^{(i)}(a)$$

$$\Rightarrow P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \qquad \square$$

P_n kallas <u>n:te ordningens Taylorpolynom av f kring a</u>. (Kring 0: "<u>Maclaurinpolynom</u>")
(används i formelsamlingar)

Hur stort blir felet i approximationen
$f(x) \approx P_n(x)$?

Taylors formel ger svaret:

Taylors sats: Om $f^{(n+1)}(t)$ finns för alla t i ett intervall som innehåller a och x och $P_n(x)$ är n:te ordningens Taylorpolynom av f kring a så ges felet

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

i approximationen $f(x) \approx P_n(x)$ av

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (*)$$

för något $s \in \underbrace{(a,x)}_{\text{om } x>a}$ eller $\underbrace{(x,a)}_{\text{om } x<a}$.

Notera: $$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

kallas Taylors formel med Lagrange-restterm, där resttermen alltså är $(*)$.

Bevis av Taylors sats: Induktionsbevis.

- Startsteg: Låt $n=0$. Då innebär satsen

$$E_0(x) = f(x) - P_0(x)$$

$$f'(s)(x-a) = f(x) - f(a), \quad s \in \begin{cases} (a,x), & x>a \\ (x,a), & x<a \end{cases}$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(s), \quad s \in \begin{cases} (a,x), & x>a \\ (x,a), & x<a \end{cases}$$

vilket är Medelvärdessatsen tillämpad på intervallet $\underset{x>a}{[a,x]}$ eller $\underset{x<a}{[x,a]}$.

11

Startsteget verifierad.

- <u>Induktionssteg:</u> Antag satsen sann för $n=p$, d.v.s. felet ges av

$$E_p(x) = \frac{f^{(p+1)}(s)}{(p+1)!}(x-a)^{p+1}$$

där $s \in (a,x)$ eller (x,a).
$\quad (x>a) \qquad (x<a)$

Antag fr. o. m. nu att $x>a$.

Tillämpa Generaliserade medelvärdessatsen på funktionerna $E_{p+1}(t)$ och $(t-a)^{p+2}$ på intervallet $[a,x]$:

$$\frac{E_{p+1}(x)}{(x-a)^{p+2}} = \frac{E_{p+1}(x)-0}{(x-a)^{p+2}-0} \overset{\boxed{E_{p+1}(a)=0}}{=} \frac{E_{p+1}(x)-E_{p+1}(a)}{(x-a)^{p+2}-(a-a)^{p+2}} =$$

$$\overset{GMS}{=} \frac{E'_{p+1}(u)}{(p+2)(u-a)^{p+1}} \qquad (**)$$

för något $u \in (a,x)$.

Men

$$E'_{p+1}(u) = \frac{d}{dt}E_{p+1}(t)\Big|_{t=u} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(f(t) - P_{p+1}(t)\right)\Big|_{t=u} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(f(t) - \sum_{i=0}^{p+1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i\right)\Big|_{t=u} =$$

$$= f'(u) - \sum_{i=1}^{p+1}\frac{f^{(i)}(a)}{(i-1)!}(u-a)^{i-1} =$$

$$= f'(u) - \sum_{j=0}^{p}\frac{f^{(j+1)}}{j!}(u-a)^j =$$

$$= (f')(u) - \sum_{j=0}^{p} \frac{(f')^{(j)}}{j!}(u-a)^j$$ (12)

$$= \tilde{E}_p(u)$$

där $\tilde{E}_p$ är felet för f'.

Enligt induktionsantagandet (som gäller för alla funktioner som uppfyller Taylors sats' antaganden)

Så har vi: $$\tilde{E}_p(u) = \frac{(f')^{(p+1)}(s)}{(p+1)!}(u-a)^{p+1}$$

$$= \frac{f^{(p+2)}(s)}{(p+1)!}(u-a)^{p+1}$$

för något $s \in (a,u)$.

$$\Longrightarrow \frac{E_{p+1}(x)}{(x-a)^{p+2}} \overset{(**)}{=} \frac{\frac{f^{(p+2)}(s)}{(p+1)!}(u-a)^{p+1}}{(p+2)(u-a)^{p+1}} =$$

$$= \frac{f^{(p+2)}(s)}{(p+2)!}, \quad s \in (a,u) \subset (a,x)$$

$$\Longrightarrow E_{p+1}(x) = \frac{f^{((p+1)+1)}(s)}{((p+1)+1)!}(x-a)^{((p+1)+1)}$$

d.v.s. Taylors formel sann för $n = p+1$.

Induktionsaxiomet ger att den är sann $\forall n \geq 0$ $\square$

Stora ordo:

Vid beräkning av gränsvärden som är obestämda uttryck, d.v.s. av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$, så är begreppet stora ordo användbart/praktiskt.

13

Definition: Om $|f(x)| \leq K\,|u(x)|$ för någon konstant $K>0$ kring öppet intervall som innehåller $x=a$ så skriver man

$$f(x) = \mathcal{O}(u(x)) \quad \text{då } x \to a$$

("f är stora ordo då x går mot a")

Egenskaper: (i) $f(x) = \mathcal{O}(u(x)),\ x\to a$

$$\Rightarrow C\,f(x) = \mathcal{O}(u(x)),\ x\to a$$

(Konstanter påverkar ej stora ordo.)

(ii) $f(x) = \mathcal{O}(u(x))$ och $g(x) = \mathcal{O}(u(x)),\ x\to a$

$$\Rightarrow (f\pm g)(x) = \mathcal{O}(u(x)),\ x\to a$$

(Summor påverkar ej stora ordo.)

(iii) $f(x) = \mathcal{O}((x-a)^k u(x)),\ x\to a$

$$\Rightarrow f(x)/(x-a)^k = \mathcal{O}(u(x)),\ x\to a$$

Om $u(x)\to 0$ då $x\to a$ så säger $f(x) = \mathcal{O}(u(x))$ att $f(x)$ <u>också</u> $\to 0,\ x\to a$.

(Man kan säga att "f uppför sig som u då $x\to a$".
(Egentligen uppför sig f <u>ännu bättre</u> än u eftersom $u\to 0 \Rightarrow f\to 0$, men $f\to 0 \not\Rightarrow u\to 0$.)

Sats: Om $f(x) = Q_n(x) + \mathcal{O}((x-a)^{n+1}),\ x\to a$, där Q_n polynom av grad $\leq n$ så gäller $Q_n = P_n$, d.v.s. Q_n är Taylorpolynomet till f i $x=a$.

Satsen säger att endast Taylorpolynomet (14)
måltar med att approximera funktionen
så att resttermen blir $\mathcal{O}((x-a)^{n+1})$.

Notera: Satsen garanterar att man kan sätta ihop redan kända Taylorpolynom för att bilda nya, så länge man håller reda på ordningen hos resttermerna.

15

Några jämna uppgifter

4.6:6

f med följande egenskaper:

(i) $f(-1)=0$, $f(0)=2$, $f(1)=1$, $f(2)=0$, $f(3)=1$

(ii) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)+1-x\right)=0$

(iii) • $f'(x)>0$ på $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$ och $(2,\infty)$

• $f'(x)<0$ på $(0,2)$

(iv) $\lim\limits_{x\to-1} f'(x)=\infty$

(v) • $f''(x)>0$ på $(-\infty,-1)$ och $(1,3)$

• $f''(x)<0$ på $(-1,1)$ och $(3,\infty)$

Tabell:
(iii)—(v)

x		-1		0		1		2		3	
f'	$++++$	∞	$+++$	?	$----$		$--$	?	$+++$		$+++$
f''	$++++$	?	$---$		$----$	?	$+++$		$++++$	?	$----$
f	↗ ∪	?	↗ ∩	lok max	↘ ∩	infl.	↘ ∪	lok min	↗ ∪	infl.	↗ ∩

• Kritiska punkter: $\boxed{x=0 \text{ och } x=2}$

• Singulära punkter: $\boxed{x=-1}$

• Lokalt maximum: $\boxed{x=0}$

Lokalt minimum: $\boxed{x=2}$

• Inflexionspunkter: $\boxed{x=1 \text{ och } x=3}$

(ii): $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)+1-x)=0$

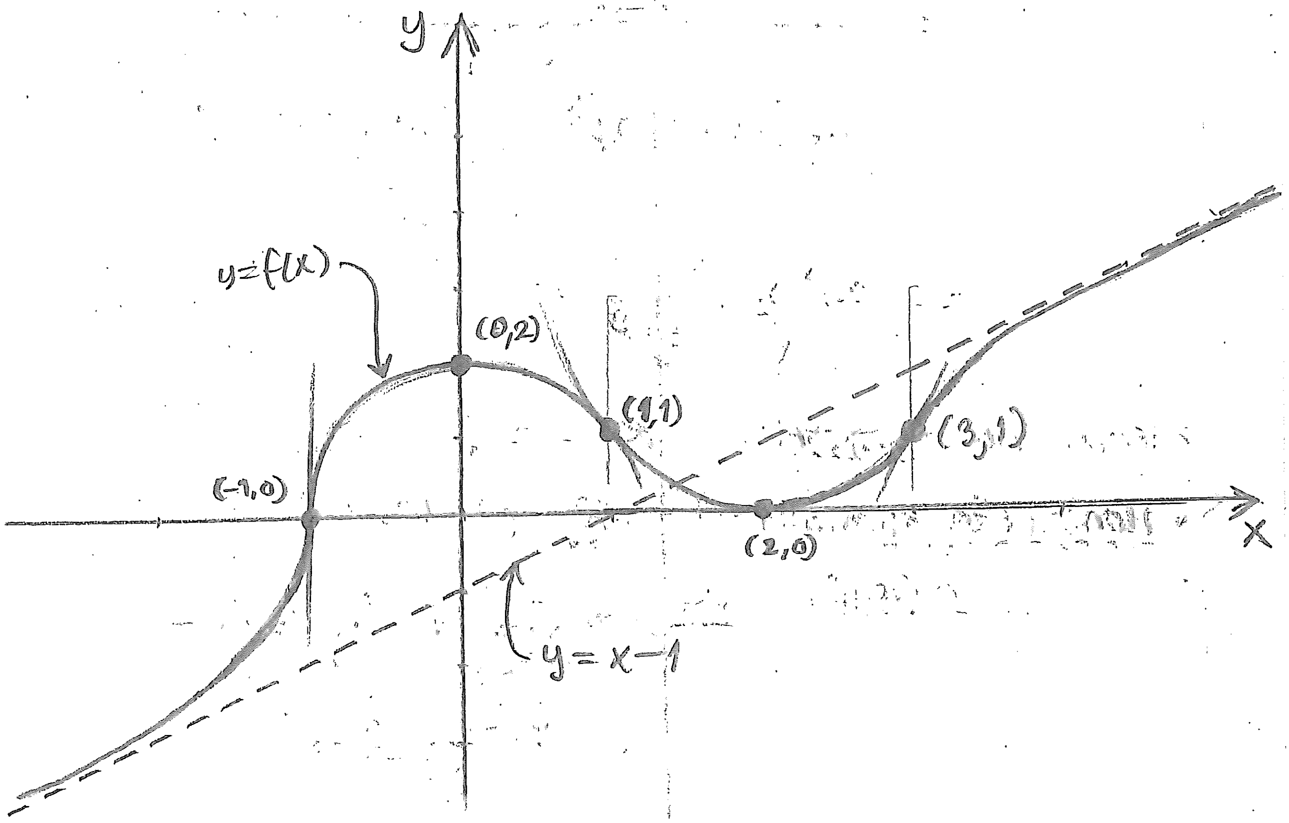
$\Leftrightarrow$

$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(x-1))=0$

$\Longrightarrow$ Dubbelsidig sned asymptot $y=x-1$

(i) Ger oss punkter på grafen att "ledsaga" oss.

Skissering av grafen:



4.4:16 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, skissera!

Vi följer receptet:

• $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)\frac{d}{dx}(x^3) - x^3\frac{d}{dx}(x^2-1)}{(x^2-1)^2} =$

$= \dfrac{(x^2-1)\cdot 3x^2 - x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2(3x^2-3-2x^2)}{(x^2-1)^2} =$

17

$$= \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

- $f''(x)$: $$f''(x) = \frac{(x^2-1)^2 \frac{d}{dx}\left(x^2(x^2-3)\right) - x^2(x^2-3)\frac{d}{dx}\left((x^2-1)^2\right)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2-1)^2\cdot\left(2x(x^2-3)+x^2\cdot 2x\right) - x^2(x^2-3)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{(x^2-1)\cdot 2x\cdot\left((x^2-1)(x^2-3+x^2)-2x^2(x^2-3)\right)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x\left((x^2-1)(2x^2-3)-2x^4+6x^2\right)}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{2x\left(2x^4-3x^2-2x^2+3-2x^4+6x^2\right)}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

- Vertikala asymptoter: $x = \pm 1$
- Horisontella asymptoter: Nej, ty $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to \pm\infty$
- Sneda asymptoter: $$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^3-x+x}{x^2-1} =$$ $$= \frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1} =$$ $$= x + \underbrace{\frac{x}{x^2-1}}_{\to 0,\ x\to\pm\infty}$$

$\Longrightarrow$ $y = x$ sned asymptot (dubbelsidig)

- Symmetrier: $$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x)$$

d.v.s. f är udda funktion

- Koordinatskärningspunkter: y-axeln: $f(0)=0$
  $\Rightarrow (0,0)$

18

X-axeln: $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \Rightarrow (0,0)$

$\Rightarrow$ (Skär axlar bara i origo $(0,0)$.)

- Kritiska punkter: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-3=0$ eller $x=0 \Leftrightarrow x=0, \pm\sqrt{3}$

$f(\pm\sqrt{3})=f(\pm 3^{1/2})=\dfrac{(\pm 3^{1/2})^3}{(\pm 3^{1/2})^2-1}=$

$=\dfrac{\pm 3^{3/2}}{3-1}=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \left(\pm\sqrt{3}, \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right), (0,0)$

- f' ej definierad: $x=\pm 1$
- f':s tecken: $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}>0 \overset{x\neq\pm1}{\Leftrightarrow}$

$\overset{x\neq\pm1}{\Leftrightarrow} x^2-3>0 \overset{x\neq\pm1}{\Leftrightarrow} x<-\sqrt{3}$ eller $x>\sqrt{3}$

$\Rightarrow f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ (dock ej i ±1)

- $f''=0$: $f''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0$

- f'' ej definierad: $x=\pm1$
- f'':s tecken: $f''(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}>0 \overset{x\neq\pm1}{\Leftrightarrow}$

$\overset{x\neq\pm1}{\Leftrightarrow} \dfrac{x}{x^2-1}>0 \overset{x\neq\pm1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x>0 \text{ och } x^2-1>0 \\ \text{eller} \\ x<0 \text{ och } x^2-1<0 \end{cases} \overset{x\neq\pm1}{\Leftrightarrow}$

$\overset{x\neq\pm1}{\Leftrightarrow} x>1$ eller $x\in(-1,0)$

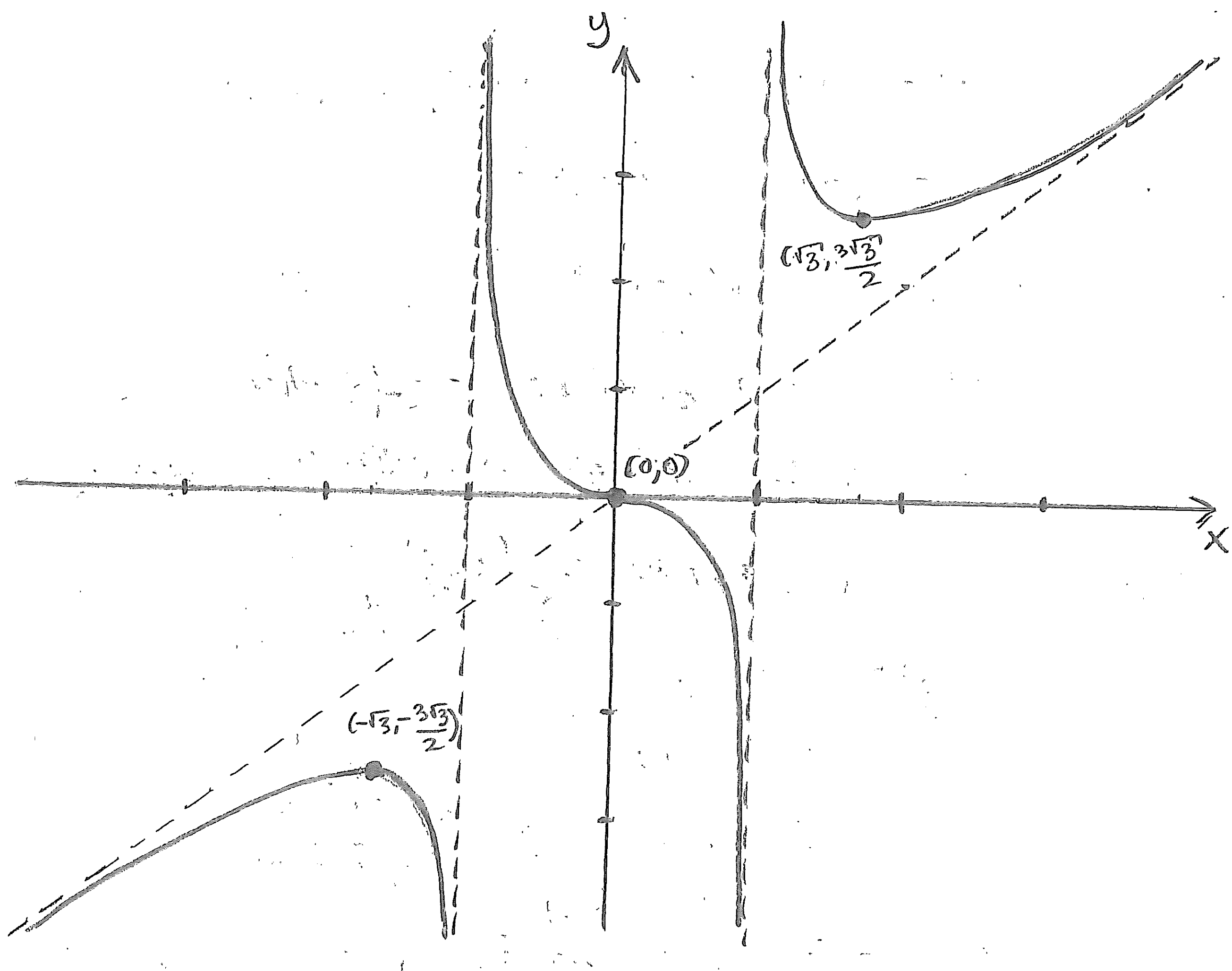
$\Rightarrow f''(x)<0 \Leftrightarrow x<-1$ eller $x\in(0,1)$

- Inflexionspunkter: $x=0$, så $(0,0)$

(19) **Tabell:**

		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
f'	$++++$	0	$---$	⚡	$---$	0	$---$	⚡	$---$	0	$++++$
f''	$------$		$---$	⚡	$+++$	0	$---$	⚡	$+++$		$++++++$
f	↗ ⌒	lok max	↘ ⌒	asymptot	↘ ◡		↘ ⌒	asymptot	↘	lok min	↗ ⌒

Vi kan nu skissera f:s graf:



4.10:12 $f(x) = \arctan x$ kring $x=1$

Approximera $\arctan 0.97$ m.h.a. P_2

Uppskatta felet.

$f(x) = \arctan x \Rightarrow f(1) = \arctan 1 = \pi/4$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$ 20

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = -\frac{(1+x^2)^2 \frac{d}{dx}(2x) - 2x \frac{d}{dx}((1+x^2)^2)}{(1+x^2)^4} =$$

$$= -\frac{2(1+x^2)^2 - 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} =$$

$$= -\frac{2(1+x^2) - 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} = 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2$$

$$\Rightarrow f(0.97) \approx P_2(0.97) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(0.97-1) - \frac{1}{4}(0.97-1)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 0.03 - \frac{1}{4} \cdot 0.03^2 = \underline{\underline{0.770173163\ldots}}$$

Felet: $E_2(x) = \frac{1}{3!} f'''(c)(x-1)^3, \quad c \in (x,1), \quad x<1$

$$\Rightarrow E_2(0.97) = \frac{1}{6} f'''(c)(0.97-1)^3 =$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot 2 \frac{3c^2-1}{(1+c^2)^3} 0.03^3 =$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{3c^2-1}{(1+c^2)^3} \cdot 27 \cdot 10^{-6} =$$

$$= -9 \frac{3c^2-1}{(1+c^2)^3} \cdot 10^{-6}, \quad 0.97 < c < 1$$

Låt $g(c) = \frac{3c^2-1}{(1+c^2)^3}, \quad c \in [0.97; 1]$.

Hitta värdemängden för g, d.v.s. största & minsta värde.

(21)

$$g'(c) = \frac{(1+c^2)^3 \frac{d}{dc}(3c^2-1) - (3c^2-1)\frac{d}{dc}((1+c^2)^3)}{(1+c^2)^6} =$$

$$= \frac{(1+c^2)^3 \cdot 6c - (3c^2-1)\cdot 3(1+c^2)^2 \cdot 2c}{(1+c^2)^6} =$$

$$= \frac{(1+c^2)\cdot 6c - 6c(3c^2-1)}{(1+c^2)^4} =$$

$$= \frac{6c + 6c^3 - 18c^3 + 6c}{(1+c^2)^4} = \frac{12c - 18c^3}{(1+c^2)^4} =$$

$$= 6c\,\frac{2-3c^2}{(1+c^2)^6}$$

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow 6c\,\frac{2-3c^2}{(1+c^2)^6} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c=0 \text{ eller } 2-3c^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c=0 \text{ eller } c = \pm\sqrt{2/3} \notin (0.97, 1)$$

Största & minsta i ändpunkter:

$$\begin{cases} g(0.97) = \dfrac{3\cdot 0.97^2-1}{(1+0.97^2)^3} = 0.2492904\ldots \\ g(1) = \dfrac{3-1}{(1+1)^3} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} = 0.25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_2(0.97) \in (-9\cdot 0.25\cdot 10^{-6}, -9\cdot 0.2492904\ldots\cdot 10^{-6})$$

$$= (-2.25\cdot 10^{-6}, -2.243614\ldots\cdot 10^{-6})$$

$$\Rightarrow \text{arctan } 0.97 = f(0.97) = P_2(0.97) + E_2(0.97) \in$$

$$\in (0.770173163\ldots - 0.00000225,$$

$$0.770173163\ldots - 0.000002243\ldots) =$$

$$= \underline{\underline{(0.770170913\ldots, 0.770170919\ldots)}}$$

4.10:28 $\quad f(x) = x^3$ kring $x = 1$

Hitta P_n, $n \geq 0$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f(1) = 1^3 = 1$$
$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$$
$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(1) = 6 \cdot 1 = 6$$
$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(1) = 6$$
$$f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall n \geq 4 \Rightarrow f^{(n)}(1) = 0 \quad \forall n \geq 4$$

$$\Longrightarrow P_0(x) = f(1) = \underline{1}$$
$$P_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) =$$
$$= \underline{\underline{1 + 3(x-1)}}$$

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!} f''(1)(x-1)^2 =$$
$$= 1 + 3(x-1) + \frac{1}{2} 6(x-1)^2 =$$
$$= \underline{\underline{1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2}}$$

$$P_3(x) = \ldots = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{1}{3!} f'''(1)(x-1)^3 =$$
$$= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{1}{6} 6 (x-1)^3 =$$
$$= \underline{\underline{1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3}}$$

$$P_n(x) = P_3(x) = \underline{\underline{1 + 3(x-1) + 3(x-1) + (x-1)^3}}$$

för alla $n \geq 4$

23

9.7:24

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1-x)^2}{x^2-\ln(1+x^2)}$$

Använd $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$

$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$ } se t.ex. Table 5 s. 277

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1-x)^2}{x^2-\ln(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left((1+x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3))-1-x\right)^2}{x^2-\left(x^2-\frac{1}{2}(x^2)^2+O((x^2)^3)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2+O(x^3)\right)^2}{\frac{1}{2}x^4+O(x^6)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{1}{2}x^2)^2 + 2\frac{1}{2}x^2 O(x^3) + (O(x^3))^2}{\frac{1}{2}x^4 + O(x^6)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}x^4+O(x^5)}{\frac{1}{2}x^4+O(x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{1}{4}x^4+O(x^5))/x^4}{(\frac{1}{2}x^4+O(x^6))/x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}+O(x)}{\frac{1}{2}+O(x^2)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Se även RÖ12 där jag löst bl.a.

9.7:26

(OBS: "..." ska egentligen vara lämpliga O-uttryck!)