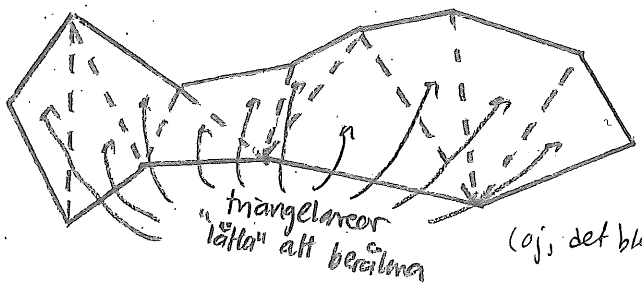
Föreläsning 7

Areaproblemet

Vad är egentligen ett områdes (i xy-planet) area? Man kan "lätt" (med elementära icke-analysmetoder) räkna ut polygoners areor. (Polygon: Område som begränsas av ett ändligt antal ändligt långa räta linjer.

(Ett s.k. slutet polygontåg)

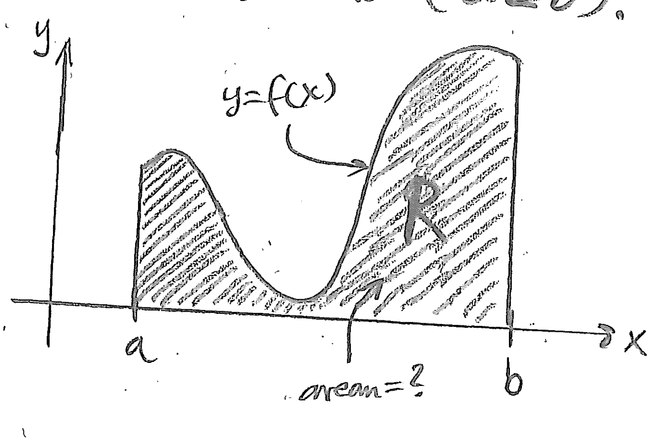


)

(oj, det blev en fisk...)

I analys vill vi räkna ut mer komplicerade områdens areor:

Antag område R ligger mellan grafen till $y=f(x)$ (f icke-negativ och kontinuerlig), x-axeln, $x=a$ och $x=b$ ($a<b$).

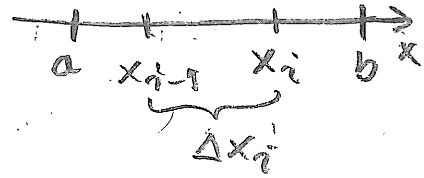


Dela upp $[a,b]$ m.h.a. delningspunkter:

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$$

Låt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ②

längd hos $[x_{i-1}, x_i]$.



Lägg rektangel ovanför

$[x_{i-1}, x_i]$ med bas Δx_i och höjd $f(x_i)$

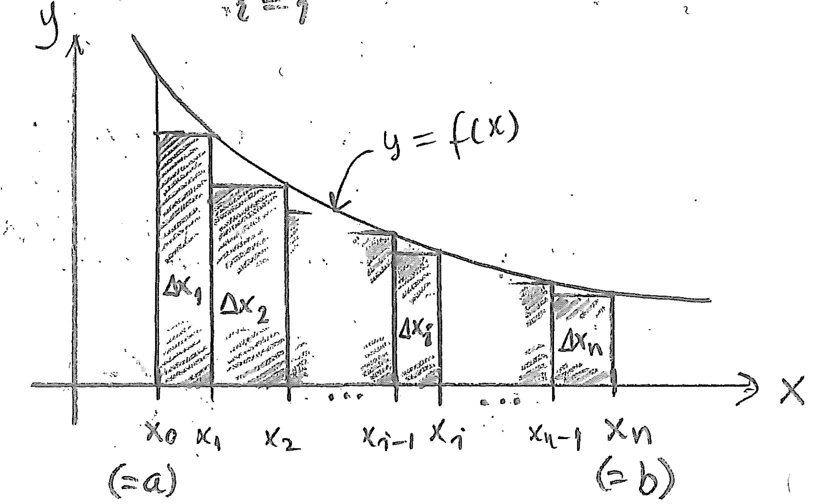
$\Rightarrow$ rektangelarea $= f(x_i)\Delta x_i$

$\Rightarrow$ total rektangelarea:

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Se figur:



Då $n \to \infty$ och största $\Delta x_i \to 0$ så borde felet hos S_n gå mot 0, d.v.s.

$$\text{arean hos } R = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta_i \to 0}} S_n$$

<u>Exempel:</u> Arean hos området mellan $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$ och $x = 3$.

<u>Lösning:</u> Låt $x_0 = 0 = \frac{0}{n}$, $x_1 = \frac{3}{n}$, $x_2 = \frac{6}{n}$, ...,

③ $x_{n-1} = \frac{3(n-1)}{n}$, $x_n = 3 = \frac{3n}{n}$

Notera att $\Delta x_i = \frac{3}{n}$ $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$

dvs. samma bredd. Formel:

$\max \Delta x_i = \max \frac{3}{n} \to 0$, ok

$$x_i = \frac{3i}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{3i}{n}\right)^2 = \frac{9i^2}{n^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{9i^2}{n^2} \cdot \frac{3}{n} = \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 =$$

= [Se Föreläsning 2 sid. 2] =

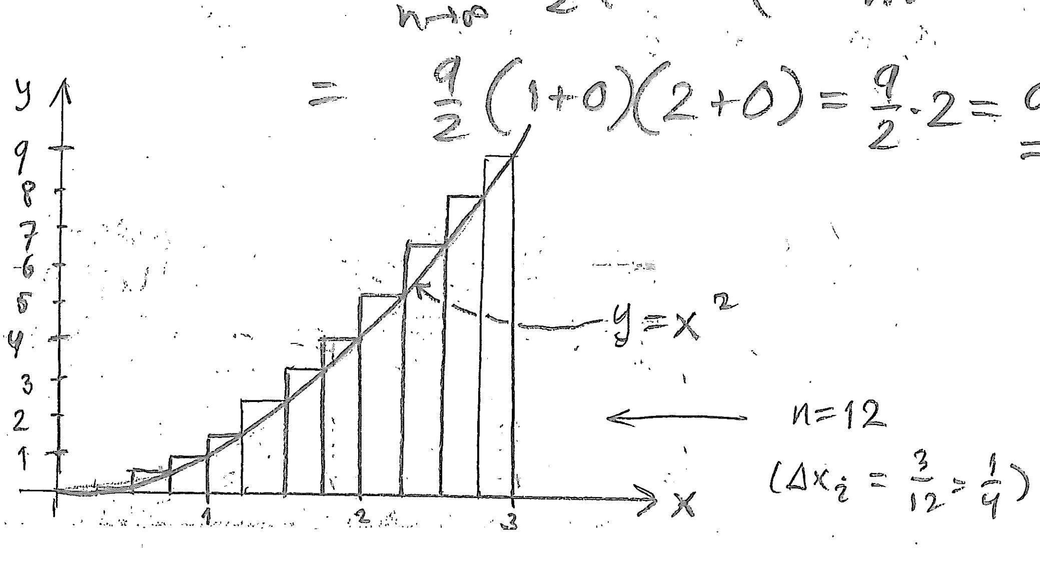
$$= \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \text{arean} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} S_n = \lim_{n \to \infty} S_n =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{9}{2}(1+0)(2+0) = \frac{9}{2} \cdot 2 = \underline{\underline{9}} \quad \square$$



Den bestämda integralen

Antag f kont. på $[a,b]$.

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

där $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

P kallas <u>partition</u> av intervallet $[a,b]$.

P definierar en uppdelning av $[a,b]$ i n delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ med längden

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

<u>Normen</u> av P är största Δx_i:

$$\|P\| = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

f kontinuerlig på $[a,b] \Rightarrow f$ kont. på $[x_{i-1}, x_i]$

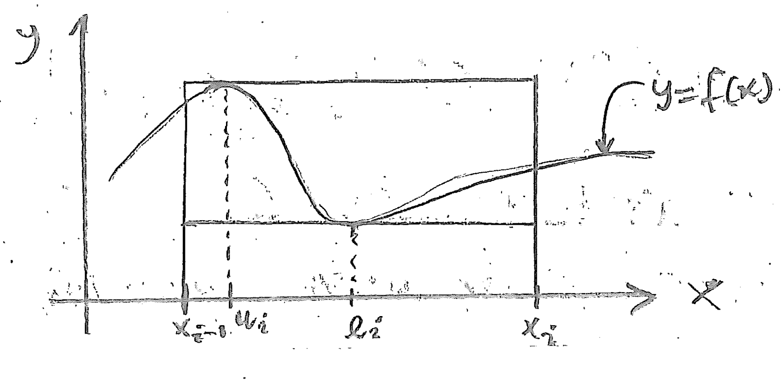
$\Rightarrow f$ antar största och minsta värde på $[x_{i-1}, x_i]$

d.v.s. det finns $l_i, u_i \in [x_{i-1}, x_i]$ s.a.

$$f(l_i) \le f(x) \le f(u_i) \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Antag A_i arean under $y = f(x)$, ovan $y = 0$ och mellan $x = x_{i-1}$ och $x = x_i$. Då måste gälla

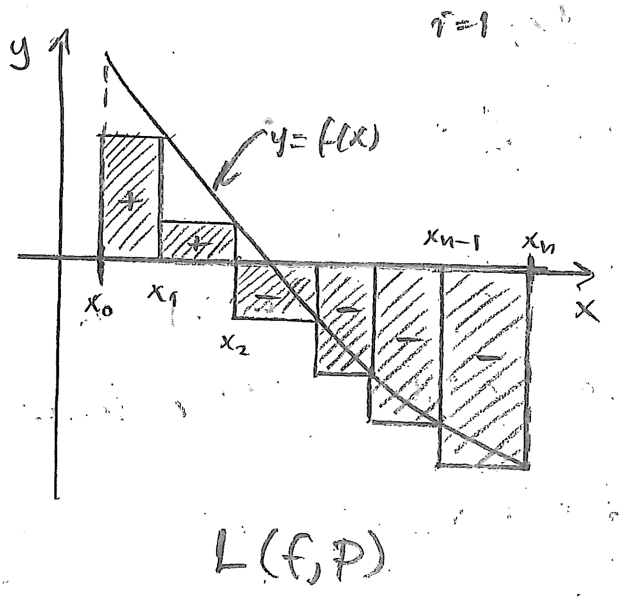
$$f(l_i)\Delta x_i \le A_i \le f(u_i)\Delta x_i$$

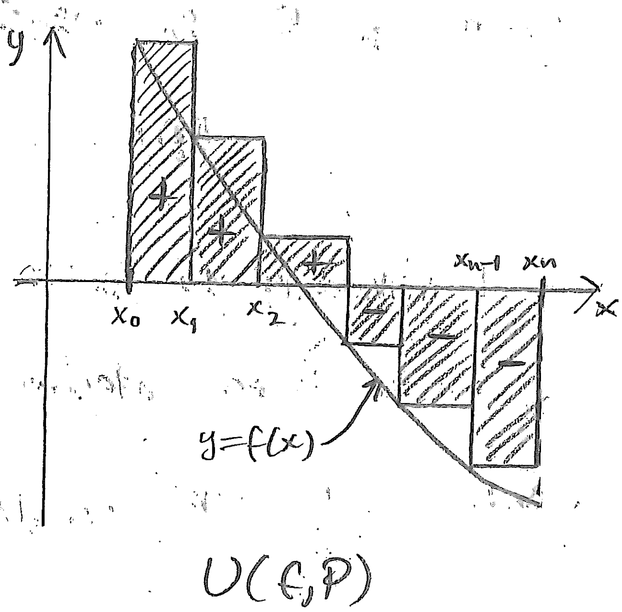


⑤ Definition: Undersumman $L(f,P)$ och översumman $U(f,P)$ till f med avseende på P ges av

- $L(f,P) = f(l_1)\Delta x_1 + f(l_2)\Delta x_2 + \dots + f(l_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i$

- $U(f,P) = f(u_1)\Delta x_1 + f(u_2)\Delta x_2 + \dots + f(u_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$





P_2 är förfining av partitionen P_1 om de är partitioner av $[a,b]$ sådana att alla punkter i P_1 också är i P_2

$\Longrightarrow L(f,P_1) \leq L(f,P_2) \leq U(f,P_2) \leq U(f,P_1)$

P är gemensam förfining till P_1 och P_2 om P består av av unionen av punkterna i P_1 och P_2.

⑥

$\Rightarrow L(f,P_1) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq U(f,P_2)$

$\Rightarrow L(f,P_1) \leq U(f,P_2)$ för alla partitioner P_1, P_2

(varje undersumma är mindre än varje översumma.)

$$\Rightarrow \inf_{\text{alla } P_1} L(f,P_1) \leq \sup_{\text{alla } P_2} U(f,P_2)$$

(Finns tack vare fullständighetsaxiomet!)

Välj I mellan dessa tal

$\Rightarrow L(f,P) \leq I \leq U(f,P) \quad \forall P$

Definition av bestämda integralen

Om I unikt så kallas detta för <u>bestämda integralen</u> till f på $[a,b]$, och vi säger att f är <u>integrerbar</u> på $[a,b]$. Man skriver

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$\int_a^b f(x)\,dx$: (i) $\int$ <u>integraltecknet</u>, ett slags S, (gammaldags?) som i Summa

(ii) a, b <u>integrationsgränser</u> (<u>undre</u> resp. <u>övre</u>)

(iii) f <u>integrand</u>, x <u>integrations-variabel</u>

(iv) dx <u>differential</u> (till x)

(motsv. Δx)

7

Plocka ur $[x_{i-1}, x_i]$ ett tal c_i, $i=1,2,\dots,n$.
Låt $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. Då kallas

$$R(f, P, c) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

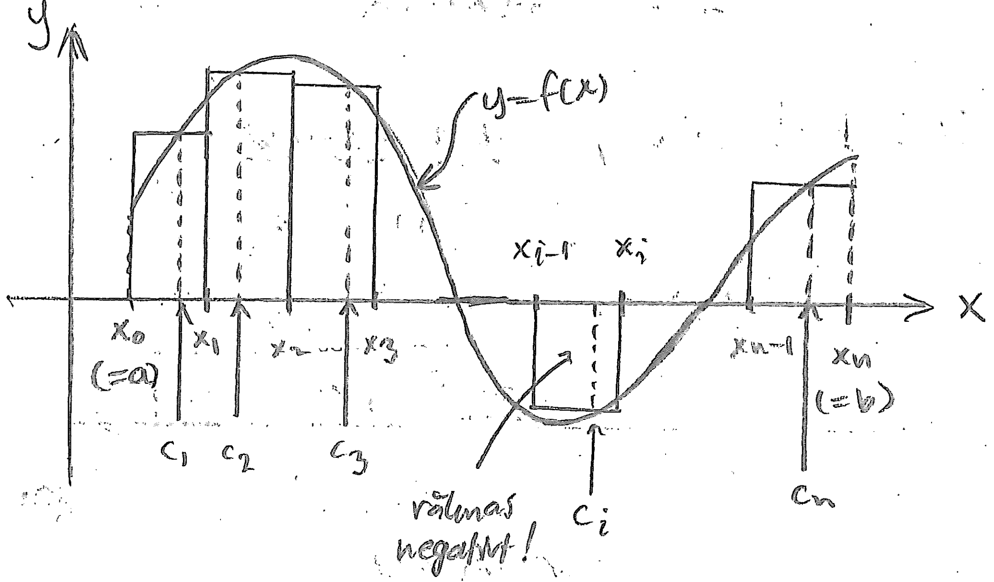
för Riemannsumman till f på $[a,b]$ med avseende på partition P och "etiketter" c.

Uppenbarligen gäller

$$L(f,P) \le R(f,P,c) \le U(f,P)$$

ty $f(\ell_i) \le f(c_i) \le f(u_i)$ $\forall i = 1,2,3,\dots,n$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} R(f,P,c) = \int_a^b f(x)\,dx} \quad (= I)$$



Sats: f kontinuerlig på $[a,b]$
$\Longrightarrow$ f integrerbar på $[a,b]$ ($\int_a^b f$ finns)

Egenskaper hos den bestämda integralen

Man kan låta $a > b$ och $a = b$ i den bestämda integralen ($\Delta x_i < 0$ resp. $\Delta x_i = 0$).

Sats: Antag f, g integrerbara på ett intervall som innehåller a, b, c.

(a) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(b) $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

(linjäritet) (c) $$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx$$

(d) $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

(e) $a \le b$, $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$
$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

(Triangel-olikheten) (f) $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(g) f udda funktion $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

(h) f jämn funktion $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

Bevis: Följer mer eller mindre direkt av definitionen av Riemannsumman.

Notera att (f) ges av den generaliserade

⑨ triangelolikheten $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ $\square$

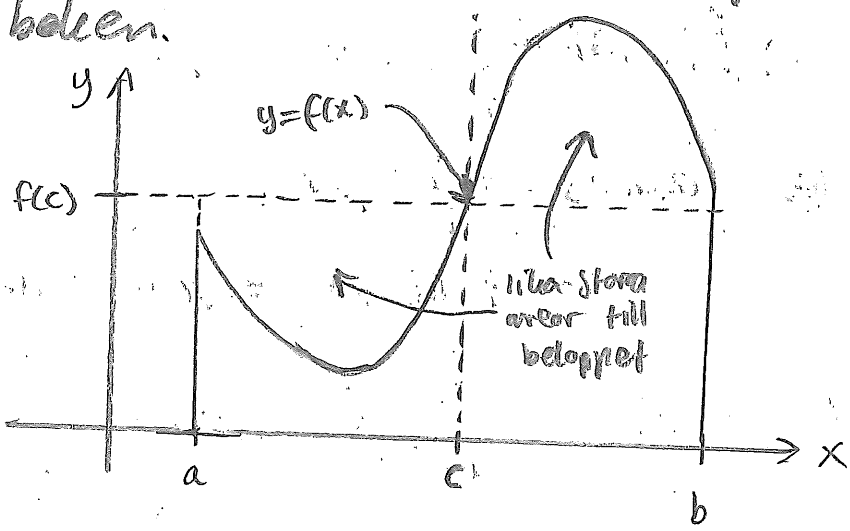
(termer kan ta ut varann) (termer kan inte ut varann)

Medelvärdessatsen för integraler:

Antag att f är kontinuerlig på [a,b].
Då finns $c \in [a,b]$ sådant att

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(c)$$

Bevis: Man använder satsen om största och och minsta värde kombinerat med satsen om mellanliggande värden. Detaljerna i boken. $\square$



Medelvärdet hos en funktion:

Om f är integrerbar på [a,b] så är

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

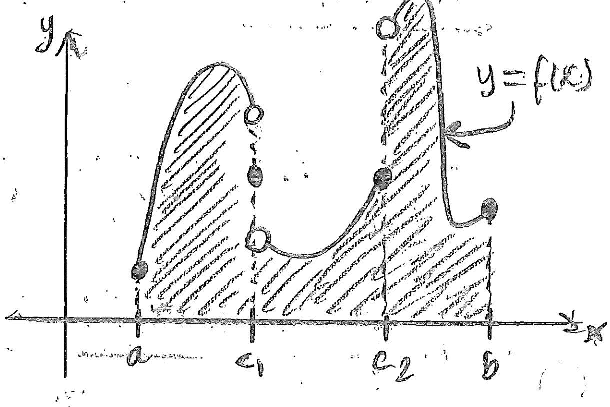
medelvärdet till f på [a,b].

(Notera: Om f kont. så finns $c \in [a,b]$ s.a. $\bar{f} = f(c)$.)

Styckvis kontinuerliga funktioner:

Hittills: f kontinuerlig på $[a,b]$.

Betrakta f av typen



f ej kontinuerlig på $[a,b]$ men området mellan $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$ och $x=b$ har en area.

Arean är summan av areorna ovanför $[a,c_1]$, $[c_1,c_2]$ och $[c_2,b]$ där f är kontinuerlig på resp. intervall (efter hävning av diskontinuiteter).

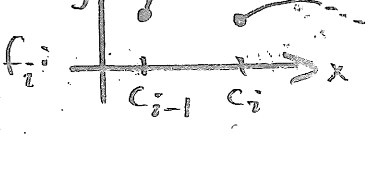
Definition: Låt $c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ och antag f definierad på $[c_0, c_n]$ utom möjligen i c_i, $i = 0,1,2,\ldots,n$.

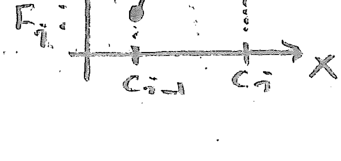
f är styckvis kontinuerlig om det finns funktion F_i kontinuerlig på $[c_{i-1}, c_i]$ s.a.

$$f(x) = F_i(x) \quad \text{på } (c_{i-1}, c_i).$$

Vi inför integralen av ett sånt f enligt

$$\int_{c_0}^{c_n} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} F_i(x)\,dx$$





(11) # Analysens huvudsats

Antiderivata: Om F uppfyller $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ så är F antiderivatan till f.

Integraler kan beräknas m.h.a. antiderivatan!

Analysens huvudsats: Antag f kontinuerlig på intervall I som innehåller a.

(I.) Låt F definieras på I enligt

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (*)$$

Då är F deriverbar på I och $F'(x) = f(x)$ där. Således gäller

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x),$$

d.v.s. integralen är en antiderivata.

(II.) Låt $G(x)$ vara vilken antiderivata till f som helst på I, d.v.s. $G'(x) = f(x)$ på I. Då gäller för alla $b \in I$ att

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

(den s.k. insättningsformeln).

Bevis: (I.) $F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \overset{(*)}{=}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt \right) =$$ (12)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \text{[Medelvärdessatsen för integraler]} =$$

$c \in [x, x+h]$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left((x+h) - x \right) f(c) =$$

$$= \lim_{h \to 0} f(c) = [f \text{ kontinuerlig}] =$$

$$= f\left(\lim_{h \to 0} c \right) = f(x) \quad \text{ty } c \in [x, x+h]$$

(instängningssatsen)

II. $f(x) = G'(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + C$ på $I \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_a^x f(t)\,dt = G(x) + C$$

$$0 = \int_a^a f(t)\,dt = G(a) + C \Leftrightarrow C = -G(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t) = G(b) + C =$$

$$= G(b) + (-G(a)) =$$

$$= G(b) - G(a) \qquad \square$$

Notera: Insättningstecknet $|$ definieras enligt

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \Big(\underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{vilken antiderivata till } f \text{ som helst}} \Big)\Big|_a^b$$

⑬ Enligt kedjeregeln gäller:

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt} = \frac{d}{dx}\Big(F(g(x)) - F(h(x))\Big) =$$

$$= F'(g(x))g'(x) - F'(h(x))h'(x)$$

$$= \boxed{f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)}$$

Exempel: $\frac{d}{dx}\int_{\ln x}^{0} e^{3t}\,dt = e^{3t}\Big|_{t=0}\frac{d}{dx}0 -$

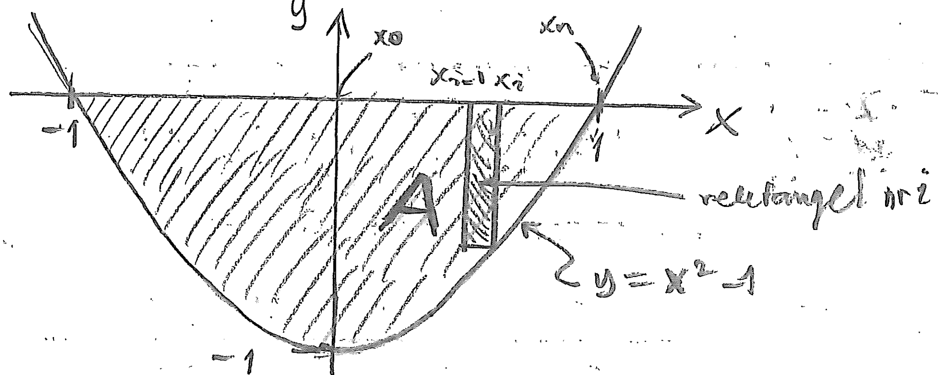
$$- e^{3t}\Big|_{t=\ln x}\frac{d}{dx}\ln x =$$

$$= e^{0}\cdot 0 - e^{3\ln x}\frac{1}{x} =$$

$$= 0 - x^{3}\frac{1}{x} = -x^{2}$$

Några jämna uppgifter

5.2:8 Arean av området ovanför $y = x^2 - 1$ och under $y = 0$.



Notera att: arean A = 2 · arean mellan $x = 0$ och $x = 1$ (p.g.a. symmetri)

Dela upp $[0,1]$ i n lika breda delintervall.
Intervall $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ där

$x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

$\Delta x_i = \frac{1}{n}$ är rektangelbredden

$0 - (x_i^2 - 1) = 1 - x_i^2$ är rektangelhöjden

$$\Rightarrow A = \lim_{n \to \infty} 2 \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(1 - x_i^2)}_{\text{höjd}} \underbrace{\Delta x_i}_{\text{bredd}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} 2 \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2\right) \frac{1}{n} =$$

$$= 2 \lim_{n \to \infty} \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 \right) - \left(\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \right) \right) =$$

15

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) =$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{6} \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \right) =$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \right) = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

5.3:2 $f(x) = x^2$ på $[0,4]$, $n=4$,

delintervall med samma bredd.

beräkna under- och översummor

Partition: $P_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $(x_i = i)$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

- $$L(f, P_4) = \sum_{i=1}^{4} f(l_i) \Delta x_i = [\Delta x_i = 1] =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} l_i^2 = [l_i \in [\underset{x_{i-1}}{i-1}, \underset{x_i}{i}],$$

f växande på $[0,4]$

$$\Rightarrow l_i = i-1 \,] =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} (i-1)^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 =$$

$$= 1 + 4 + 9 = \underline{14}$$

- $$U(f, P_4) = \sum_{i=1}^{4} f(u_i) \Delta x_i = [\Delta x_i = 1] =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} u_i^2 = [u_i \in [\underset{x_{i-1}}{i-1}, \underset{x_i}{i}],$$

f växande på $[0,4]$

$$\Rightarrow u_i = i \,] =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 =$$

$$= 1 + 4 + 9 + 16 = \underline{30}$$

16

5.3:14

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \ln\left(1+\frac{2i}{n}\right)$ som bestämd integral.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \ln\left(1+\frac{2i}{n}\right) = \left[\text{Antag } x_i = \frac{2i}{n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ln(1+x_i)\cdot\frac{2}{n} = \left[\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{2i}{n} - \frac{2(i-1)}{n} = \frac{2}{n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\ln(1+x_i)}_{\text{ger integrand } \ln(1+x)} \Delta x_i =$$

$$= \left[\text{Gränser: } a = x_0 = \frac{2\cdot 0}{n} = 0,\ b = x_n = \frac{2\cdot n}{n} = 2\right] =$$

$$= \boxed{\int_0^2 \ln(1+x)\,dx}$$

5.4:18

Vet att $\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$ (*)

Beräkna $\int_2^3 (x^2-4)\,dx$.

$$\int_2^3 (x^2-4)\,dx = [\text{Egenskap (c) sid. 8}] =$$

$$= \int_2^3 x^2\,dx - 4\int_2^3 1\,dx = [\text{Egenskap (d)}] =$$

$$= \left(\int_2^0 x^2\,dx + \int_0^3 x^2\,dx\right) - 4\int_2^3 1\,dx = [\text{Eg. (b)}] =$$

$$= \left(-\int_0^2 x^2\,dx + \int_0^3 x^2\,dx\right) - 4\int_2^3 1\,dx \overset{(*)}{=}$$

17

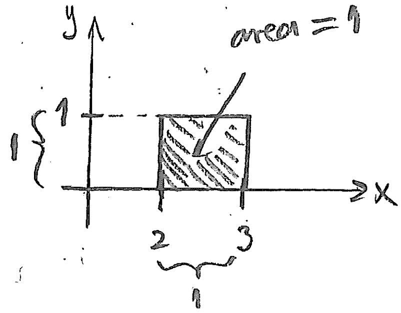
$$= \left(-\frac{2^3}{3}+\frac{3^3}{3}\right)-4\int_2^3 1\,dx =$$

$$= \frac{27-8}{3} - 4\int_2^3 1\,dx =$$

$$= 9-\frac{8}{3}-4\cdot 1 =$$

$$= 9-\frac{8}{3}-4 = 5-\frac{8}{3} =$$

$$= \frac{15-8}{3} = \boxed{\frac{7}{3}}$$



5.5:26 Arean mellan $y=\sqrt{x}$ och $y=\frac{x}{2}$.

Skärningspunkter: $\sqrt{x} = y = \frac{x}{2}$

$$x = \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$x = \frac{1}{4}x^2$$

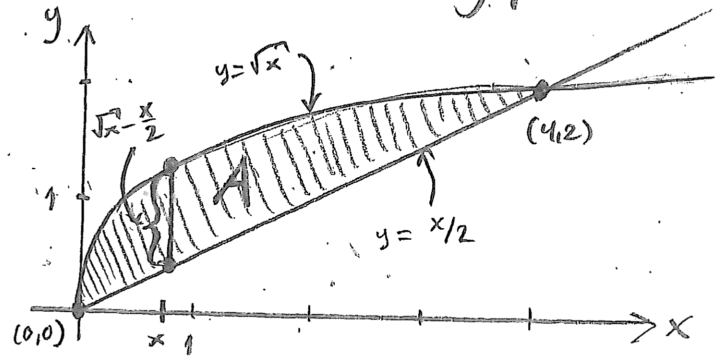
$$x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0$$

$x=0$ eller $x=4$

(Kontroll: $\sqrt{0}=0=\frac{0}{2}$, $\sqrt{4}=2=\frac{4}{2}$, ok)

$\Rightarrow$ $(0,0)$ och $(4,2)$ skärningspunkter



Arean:

$$A = \int_0^4 \left(\sqrt{x}-\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= \int_0^4 x^{1/2}dx - \frac{1}{2}\int_0^4 x\,dx =$$

$$= \left[\frac{d}{dx}x^{3/2} = \frac{3}{2}x^{1/2}, \frac{d}{dx}x^2 = 2x\right] =$$

$$= \int_0^4 \underbrace{\frac{2}{3}\frac{d}{dx} x^{3/2}}_{=x^{1/2}} dx - \frac{1}{2}\int_0^4 \underbrace{\frac{1}{2}\frac{d}{dx} x^2}_{=x} dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^4 \frac{d}{dx} x^{3/2} dx - \frac{1}{4}\int_0^4 \frac{d}{dx} x^2 dx =$$

$$= [\text{Analysens huvudsats}] = \frac{2}{3}\left(x^{3/2}\right)\Big|_0^4 - \frac{1}{4}\left(x^2\right)\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{2}{3}\left(4^{3/2} - 0^{3/2}\right) - \frac{1}{4}\left(4^2 - 0^2\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{1}{4}\cdot 16 = \frac{16-12}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

5.5:44

$$\frac{d}{d\theta}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2}\, dx = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)\Bigg|_{x=\cos\theta} \frac{d}{d\theta}\cos\theta -$$

$$- \left(\frac{1}{1-x^2}\right)\Bigg|_{x=\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\sin\theta =$$

$$= \frac{1}{1-\cos^2\theta}(-\sin\theta) - \frac{1}{1-\sin^2\theta}\cos\theta =$$

$$= -\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} =$$

$$= \boxed{-\left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)}$$

Se även RÖ 5&6 HT09 där jag löst bl.a.

5.2:6, 5.2:18, 5.3:6, 5.3:12,

5.4:15&16, 5.4:30, 5.4:34, 5.5:28, 5.5:46