①

Föreläsning 9

Generaliserade integraler

- Hittills: Bestämda integraler av kontinuerliga funktioner över slutna ändliga intervall
- Nu: Vi kommer titta på två nya möjligheter:
  - (i) Integrera över oändligt intervall.
  - (ii) Funktionen är obegränsad i minst en av ändpunkterna.
- (i) kallas Generaliserad integraler av Typ I
- (ii) " " " " " II

Definition: (Generaliserad integral av Typ I)

Om f kontinuerlig på $[a, \infty)$ så är den generaliserade integralen av f över $[a,\infty)$ följande gränsvärde av bestämd integral:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

Om gränsvärdet finns (d.v.s. ändligt) så konvergerar integralen, i annat fall så divergerar den. Om gränsvärdet är ∞ ($-\infty$) så har vi divergens mot ∞ (resp. $-\infty$)

(Motsvarande för generaliserade integraler på $(-\infty, b]$.)

Notera: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx \quad, c \in \mathbb{R}$

(Dubbel-sidigt) (vanligen sätts $c=0$.)

Exempel: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^R =$

$= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = \lim_{R\to\infty}(1 - 1/R) =$

$= 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$ (konvergerar) $\square$

Definition: (Generaliserad integral av Typ II)

Om f kontinuerlig på $(a,b]$ och möjligen obegränsad nära a så är den generaliserade integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a_+} \int_c^b f(x)\,dx$$

Den generaliserade integralen konvergerar (d.v.s. ändligt gränsvärde), divergerar, divergerar mot ∞ eller divergerar mot $-\infty$.

(Motsvarande för generaliserade integraler där f kont. på $[a,b)$ och möjligen obegränsad nära b, då låter man $c \to b_-$.)

Exempel: Beräkna $\int_0^1 \ln x\,dx$ (eller visa divergens)

Lösning: $\int_0^1 \ln x\,dx = [\ln x \to -\infty \text{ då } x \to 0_+] =$

$$= \lim_{c\to 0_+} \int_c^1 \underbrace{\ln x}_{\downarrow}\, \underbrace{dx}_{\uparrow} =$$

③

$$= \left[\begin{cases} U = \ln x \\ dU = \frac{1}{x}dx \end{cases}, \begin{cases} dV = dx \\ V = x \end{cases} \right] =$$

$$= \lim_{c \to 0+} \left((\ln x \cdot x)\Big|_c^1 - \int_c^1 x \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= \lim_{c \to 0+} \left((\underbrace{\ln 1}_{=0} \cdot 1 - \ln c \cdot c) - \int_c^1 1\, dx \right) =$$

$$= \lim_{c \to 0+} (c \ln c - (1-c)) =$$

$$= \lim_{c \to 0+} c \ln c - 1 = [\text{Standardgränsvärde}] =$$

$$= 0 - 1 = \underline{\underline{-1}} \quad (\text{konvergerar}) \quad \square$$

<u>Sats:</u> (p-integraler) Om $0 < a < \infty$ så

(a) $\displaystyle\int_a^\infty x^{-p}\,dx \begin{cases} \text{konv. mot } \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1 \\ \text{div. mot } \infty, & p \leq 1 \end{cases}$

(b) $\displaystyle\int_0^a x^{-p}\,dx \begin{cases} \text{konv. mot } \frac{a^{1-p}}{1-p}, & p < 1 \\ \text{div. mot } \infty, & p \geq 1 \end{cases}$

<u>Jämförelsesatsen:</u> Låt $-\infty \leq a < b \leq \infty$ och antag f, g kontinuerliga på $[a,b]$ samt $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Då gäller:

- Om $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergerar så konvergerar $\int_a^b f(x)\,dx$ och $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
- Om $\int_a^b f(x)$ divergerar så divergerar $\int_a^b g(x)\,dx$

Exempel: Konvergerar $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$?

Lösning: "Generaliserad" integral av både Typ I & II. Dela upp i två integraler av varsin typ:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}}_{\substack{=I_1 \\ (\text{typ II})}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}}_{\substack{=I_2 \\ (\text{typ I})}}$$

- $x \in (0,1] \Rightarrow x^3 > 0 \Rightarrow x+x^3 > x \Rightarrow$
$$\Rightarrow \sqrt{x+x^3} > \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$\Longrightarrow I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx =$$
$$= \lim_{c \to 0+} \int_c^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{c \to 0+} \left(2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_c^1 = 2$$

- $x \in [1,\infty) \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x+x^3 > x^3 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \sqrt{x+x^3} > \sqrt{x^3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$
$$\Longrightarrow I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} < \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \lim_{R \to \infty} \int_1^R x^{-\frac{3}{2}} dx =$$
$$= \lim_{R \to \infty} \left(-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^R = \lim_{R \to \infty} \left(-2R^{-\frac{1}{2}} + 2\right)$$
$$= 0 + 2 = 2$$

$$\Longrightarrow I = I_1 + I_2 = 2 + 2 = 4 < \infty$$

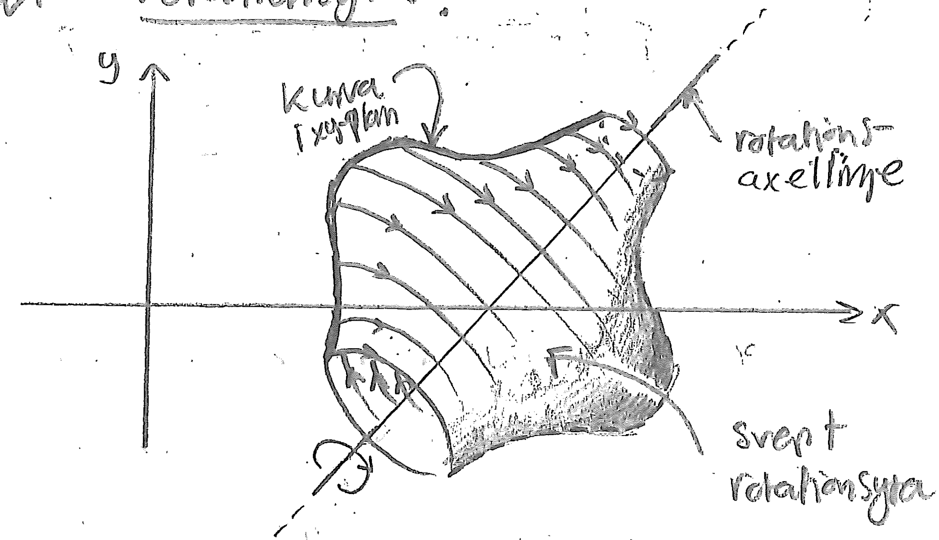
d.v.s. integralen <u>konvergerar</u>. $\square$

Notera: Man brukar ofta jämföra med just p-integraler.

5

Arean hos rotationsytor

Låt en plan kurva roteras kring en axel-linje i kurvans plan, då sveper man ut en <u>rotationsyta</u>.



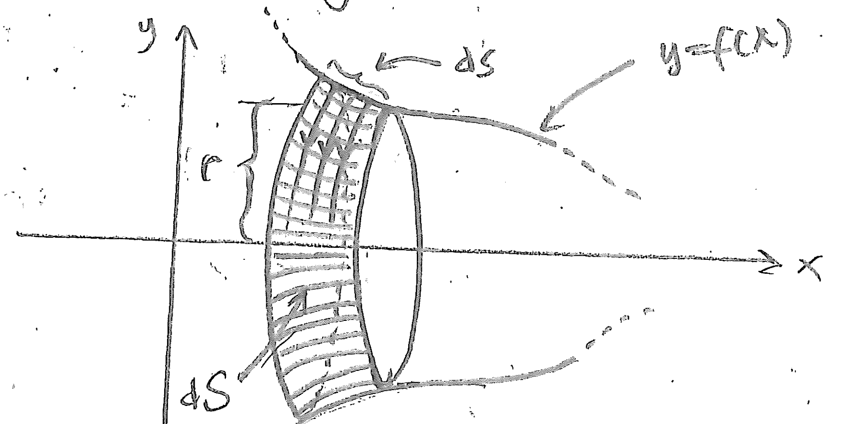
Rotationskroppen ligger i ett 3D rum.

I översiktskursen lärde ni er uträkning av volym av rotationskroppen samt båglängd hos kurvor. Beräkning av rotationsytans area är en slags syntes av dessa båda tekniker.

Betrakta rotation kring x-axeln:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) dx^2$$

$$\boxed{ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$



Ytelementet har area $dS = \overbrace{2\pi r}^{\text{omkrets}} \cdot \overbrace{ds}^{\text{bredd}} =$

$$= 2\pi |f(x)| \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Summera alla dessa infinitesimala ytareor

$$\Rightarrow \boxed{S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

blir den totala ytarean av en kurva $y=f(x)$ mellan $x=a$ och $x=b$ som roteras kring x-axeln. (f ska vara kont.)

Y' Arean hos rotationsyta som bildas när $y=f(x)$ mellan $x=a$ och $x=b$ roteras kring y-axeln ($r=|x|$ i detta fall):

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

(Motsvarande formler om $x=g(y)$ mellan $y=c$ och $y=d$ roteras kring y-axeln $(r=g(y))$ resp. x-axeln $(r=|y|)$.)

Exempel: Vilken ytarea har sfären med radien a?

Lösning: Sfären är en halvcirkel med radie a som roteras.

Halvcirkelns ekvation: $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $x \in [-a,a]$

(Cirkelns ekvation: $x^2+y^2=a^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$)

⑦

Rotera denna kurva kring x-axeln.

Behöver y':

$$y' = \frac{d}{dx}\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x) =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\Rightarrow S = 2\pi\int_{-a}^{a}|y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{\frac{(a^2-x^2)+x^2}{a^2-x^2}}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{-a}^{a}a\,dx = 2\pi(ax)\Big|_{-a}^{a} =$$

$$= 2\pi(a^2-(-a^2)) = \underline{\underline{4\pi a^2}} \qquad \square$$

Masscentrum

Fysiska kroppar har en total massa m beror på tätheten δ i varje punkt och på utsträckningen i rummet. Om $\delta(P)$ är tätheten i punkten P och dV är ett volymselement kring P så fås i allmänhet

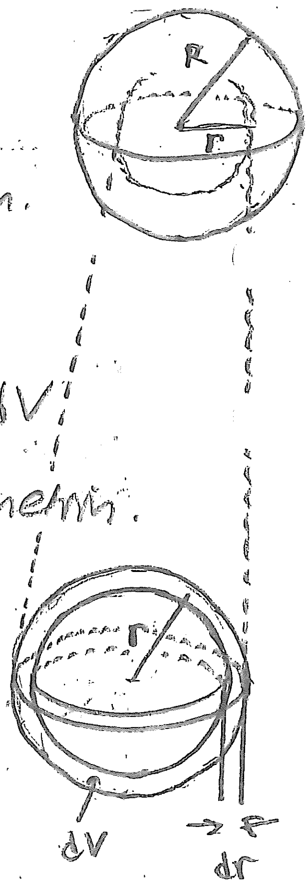
$$m = \int dm = \int \delta(P)\,dV$$

där dm är volymselementets massa.
($\delta = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$ per definition).

Geometrin hos problemet ger dV.

<u>Exempel:</u> Klotformad planet med radie R har täthet $\delta = \frac{\delta_0}{1+r^2}$ där r avståndet till centrum. Vad är planetmassan?

($\delta(0)=\delta_0$)



<u>Lösning:</u> $m = \int dm = \int \delta \, dV = \int \frac{\delta_0}{1+r^2} dV$

Vad är dV? Bestäms av geometrin.

<u>Här:</u> $\underbrace{dV}_{\text{volym av ett skal}} = \underbrace{4\pi r^2}_{\text{sfärarea}} \cdot \underbrace{dr}_{\text{sfärtjocklek}}$

$$\Rightarrow m = \int_0^R \frac{\delta_0}{1+r^2} 4\pi r^2 \, dr =$$

$$= 4\pi\delta_0 \int_0^R \frac{r^2}{1+r^2} dr =$$

$$= 4\pi\delta_0 \int_0^R \frac{1+r^2-1}{1+r^2} dr =$$

$$= 4\pi\delta_0 \int_0^R \left(1 - \frac{1}{1+r^2}\right) dr =$$

$$= 4\pi\delta_0 \left(r - \arctan r\right)\Big|_0^R =$$

$$= 4\pi\delta_0 \left((R - \arctan R) - (0-0)\right) =$$

$$= \underline{\underline{4\pi\delta_0 (R - \arctan R)}}$$

$\square$

9

Placera punktmassor $m_1, m_2, \ldots, m_n$ i punkterna $x_1, x_2, \ldots, x_n$ utefter reella tallinjen.

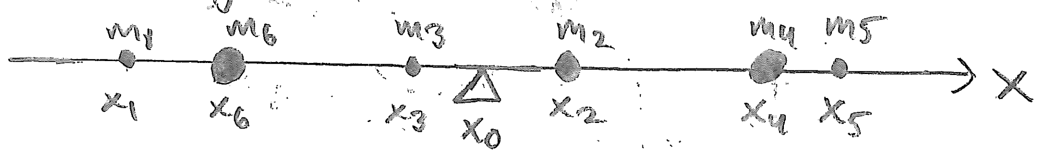
<u>Momentet</u> $M_{x=x_0}$ för en punktmassa m i punkten x kring x_0 är

$$M_{x=x_0} = m(x-x_0)$$

Då fås det totala momentet $M_{x=x_0}$ för n punktmassor enligt

$$M_{x=x_0} = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_0) m_j$$

Momentet mäter tendensen tallinjesarmen att rotera kring $x=x_0$.



Masscentrum är den punkt $\bar{x}$ där tendensen att rotera är noll, d.v.s. $M_{x=\bar{x}} = 0$:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x}) m_j = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j - \bar{x} \sum_{j=1}^{n} m_j$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j m_j}{\sum_{j=1}^{n} m_j} = \frac{M_{x=0}}{m}$$

m total massa, $M_{x=0}$ totalt moment kring origo.

För kontinuerlig massfördelning mellan a och b:

$$M_{x=0} = \int x \, dm = \int_a^b x \, \delta(x) dx$$

$$m = \int dm = \int_a^b \delta(x) dx$$

$\Rightarrow$ Masscentrum $\boxed{\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}}$

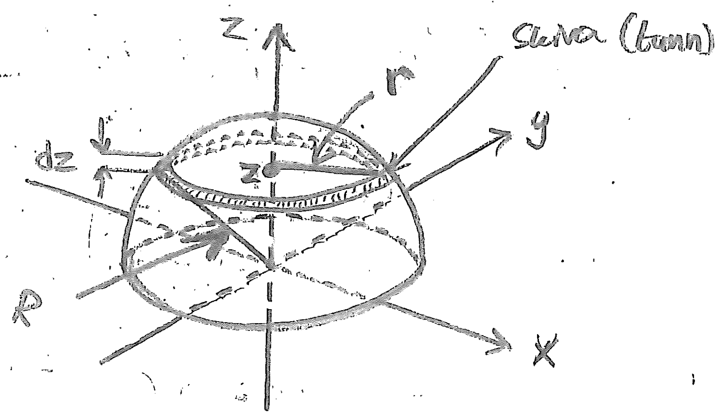
I 2D: Masscentrum: $(\bar{x},\bar{y})$ där $\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m}$, $\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m}$

I 3D: Masscentrum $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ där $\bar{x},\bar{y}$ som ovan

och $\bar{z} = \frac{M_{z=0}}{m}$

Exempel: Hitta masscentrum för ett halvklot (en s.k. hemisfär, gr. ἡμισφαίριον) med radien R om tätheten på höjden z från basplanet är $\delta_0 z$.

Lösning: Skissa:



$R^2 = r^2 + z^2$
$\Rightarrow r = \sqrt{R^2 - z^2}$

Kroppen är symmetrisk kring z-axeln så vi kan direkt säga $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Återstår $\bar{z}$, behöver m och $M_{z=0}$.

$$m = \int dm = \int \delta(z)\,dV = \text{[se figuren]}$$

$$= \int_0^R \underbrace{(\delta_0 z)}_{\delta(z)} \cdot \underbrace{\pi r^2}_{\text{skivans area}} \underbrace{dz}_{\text{skivans tjocklek}} =$$

(11)

$$= \int_0^R \delta_0 z \cdot \pi (R^2 - z^2)\, dz =$$

$$= \pi \delta_0 \int_0^R z(R^2 - z^2)\, dz =$$

$$= \pi \delta_0 \int_0^R (R^2 z - z^3)\, dz =$$

$$= \pi \delta_0 \left(\tfrac{1}{2} R^2 z^2 - \tfrac{1}{4} z^4 \right) \Big|_0^R =$$

$$= \pi \delta_0 \left(\tfrac{1}{2} R^2 \cdot R^2 - \tfrac{1}{4} R^4 \right) = \tfrac{\pi}{4} \delta_0 R^4$$

$$M_{z=0} = \int z\, dm = [\text{dm enligt ovan}] =$$

$$= \int_0^R z \cdot (\delta_0 z \cdot \pi (R^2 - z^2))\, dz =$$

$$= \pi \delta_0 \int_0^R (R^2 z^2 - z^4)\, dz =$$

$$= \pi \delta_0 \left(\tfrac{1}{3} R^2 z^3 - \tfrac{1}{5} z^5 \right) \Big|_0^R =$$

$$= \pi \delta_0 \left(\tfrac{1}{3} R^2 R^3 - \tfrac{1}{5} R^5 \right) =$$

$$= \frac{5-3}{15} \pi \delta_0 R^5 = \frac{2\pi}{15} \delta_0 R^5$$

$$\Longrightarrow \bar{z} = \frac{M_{z=0}}{m} = \frac{\frac{2\pi}{15} \delta_0 R^5}{\frac{\pi}{4} \delta_0 R^4} = \frac{2/15}{1/4} R = \frac{8R}{15}$$

$\boxed{\text{Masscentrum är på höjden } \frac{8R}{15} \text{ från basen.}}$ $\square$

Antag att man har en platta som ligger mellan $x = a$ och $x = b$, $y = 0$ och $y = f(x) \geq 0$ med täthet $\delta(x)$ i varje punkt (x, y) (d.v.s. täthet oberoende i y-led). Då blir massan

$$m = \int_a^b \delta(x) f(x)\, dx$$

och momenten kring O

$$M_{x=0} = \int_a^b x\, \delta(x) f(x)\, dx$$

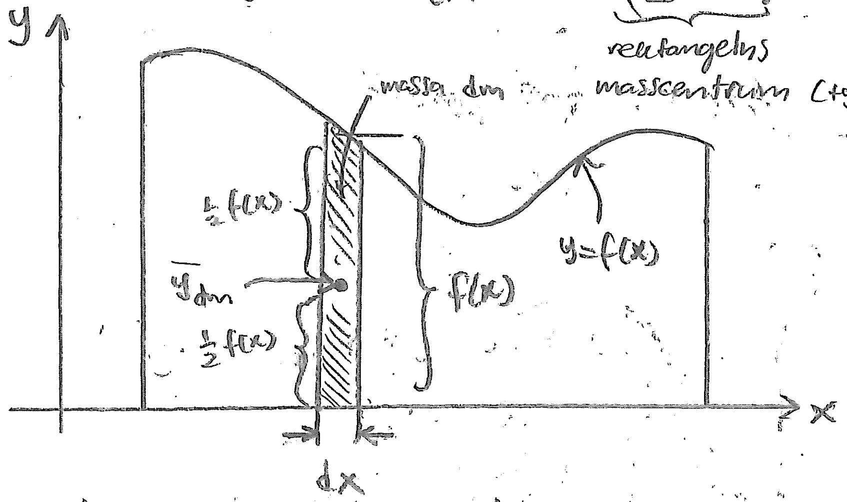
$$M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_a^b \delta(x) \left(f(x)\right)^2 dx$$

ty

$$dm = \underbrace{\delta(x)}_{\text{täthet}} \underbrace{f(x)\, dx}_{\text{area}}$$

$$dM_{x=0} = x\, dm = x \overbrace{\delta(x) f(x)\, dx}^{\text{massa}}$$

$$dM_{y=0} = \bar{y}_{dm}\, dm = \underbrace{\left(\frac{1}{2} f(x)\right)}_{\text{rektangelns masscentrum (ty } \delta \text{ ober. av } y\text{)}} \underbrace{\delta(x) f(x)\, dx}_{\text{massa}}$$



$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} \quad \text{och} \quad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} \quad \text{ger masscentrum } (\bar{x}, \bar{y}).$$

⑬

Några jämna uppgifter

6.5:18 $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \left[\begin{cases} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{cases}, \begin{cases} x \to \infty \Leftrightarrow u \to \infty \\ x = e \Leftrightarrow u = 1 \end{cases} \right] =$

$$= \int_1^\infty \frac{du}{u^2} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{du}{u^2} =$$

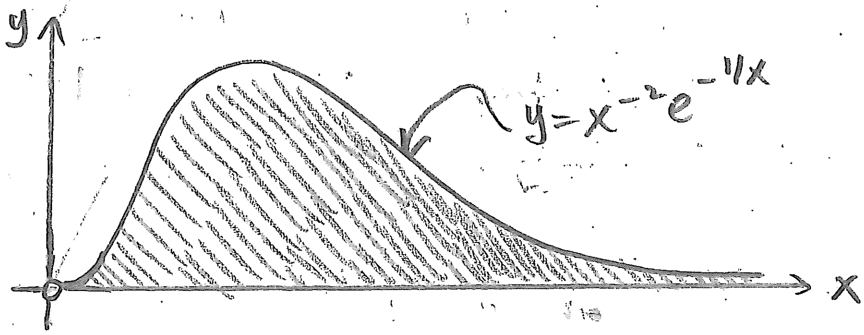
$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) =$$

$$= 1 - \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

(Integralen konvergerar.)

6.5:26 Arean hos området under $y = x^{-2}e^{-1/x}$, över x-axeln och till höger om y-axeln.

Lösning:



$$\text{Arean: } A = \int_0^\infty x^{-2}e^{-1/x}\,dx = \underbrace{\int_0^1 x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}dx}_{=I_1} + \underbrace{\int_1^\infty x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}dx}_{=I_2}$$

I_1 är generaliserad av Typ II
I_2 " " " Typ I

$$I_1 = \int_0^1 x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}dx = \lim_{c\to 0+} \int_c^1 x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}dx =$$

$$= \left[\begin{cases} u = -\frac{1}{x} \\ du = \frac{dx}{x^2} = x^{-2}dx \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \Leftrightarrow u = -1 \\ x = c \Leftrightarrow u = -\frac{1}{c} \end{cases} \right] =$$

$$= \lim_{c\to 0_+} \int_{-1/c}^{-1} e^u \, du = \lim_{c\to 0_+} (e^u)\Big|_{-1/c}^{-1} =$$

$$= \lim_{c\to 0_+} (e^{-1} - e^{-1/c}) = e^{-1} - 0 = e^{-1}$$

$$I_2 = \int_1^\infty x^{-2} e^{-1/x} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{-2} e^{-1/x} \, dx =$$

$$= \left[\begin{cases} u = -\frac{1}{x} \\ du = x^{-2} dx \end{cases}, \begin{cases} x = R \Leftrightarrow u = -1/R \\ x = 1 \Leftrightarrow u = -1 \end{cases} \right] =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{-1}^{-1/R} e^u \, du = \lim_{R\to\infty} (e^u)\Big|_{-1}^{-1/R} =$$

$$= \lim_{R\to\infty} (e^{-1/R} - e^{-1}) = e^0 - e^{-1} = 1 - e^{-1}$$

$$\Rightarrow A = I_1 + I_2 = e^{-1} + (1 - e^{-1}) = \underline{\underline{1}}$$

7.3:26

Arean hos rotationsytan som bildas vid rotation av $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$, $x \in [1,4]$, kring x-axeln

Lösning: Arean ges av:

$$A = \int_1^4 \underbrace{2\pi |y|}_{\text{bandomkrets}} \underbrace{\sqrt{1 + (y')^2}}_{\text{bandbredd}} \, dx$$

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}\right)^2 =$$

$$= 1 + \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow A = 2\pi\int_1^4 \left(\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$= 2\pi\int_1^4\left(\frac{x^5}{48}+\frac{x}{12}+\frac{x}{4}+\frac{1}{x^3}\right)dx =$$

$$\boxed{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}+\frac{3}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}}$$

$$= 2\pi\int_1^4\left(\frac{x^5}{48}+\frac{x}{3}+\frac{1}{x^3}\right)dx =$$

$$= 2\pi\left(\frac{x^6}{288}+\frac{x^2}{6}-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^4 =$$

$$= 2\pi\left(\left(\frac{4^6}{288}+\frac{4^2}{6}-\frac{1}{2\cdot 4^2}\right)-\left(\frac{1}{288}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$= 2\pi\left(\frac{4096-1}{288}+\frac{16-1}{6}-\frac{1}{32}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$= 2\pi\left(\frac{4095}{288}+\frac{15}{6}-\frac{1}{32}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$= \pi\left(\frac{4095}{144}+5-\frac{1}{16}+1\right)=$$

$$= \pi\left(\frac{4095}{144}+6-\frac{1}{16}\right)=\pi\,\frac{4095+864-9}{144}=$$

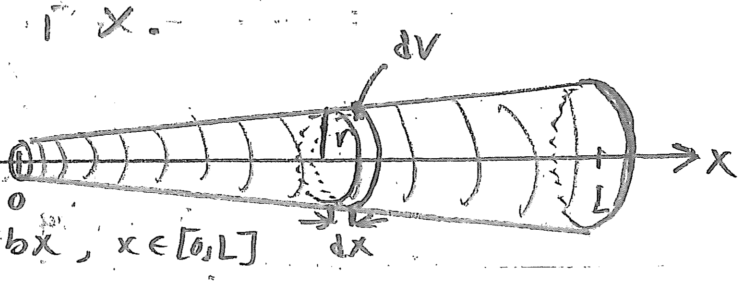
$$= \pi\,\frac{4950}{144}=\frac{2475\pi}{72}=\frac{825\cdot 3\pi}{24\cdot 3}=$$

$$= \frac{825\pi}{24}=\frac{(750+75)\pi}{8\cdot 3}=\frac{(250+25)\pi}{8}=$$

$$= \boxed{\frac{275\pi}{8}} \quad (\approx 108)$$

7.4:2 Massa och masscentrum för ställning längs x-axel mellan $x=0$ och $x=L$ där tätheten konstant men tvärsnittsradien är $a+bx$ i x.

Lösning: Skiss:



$r = a+bx$, $x \in [0,L]$

Skivan i slutten har volym:

$$dV = \pi r^2 dx = \pi (a+bx)^2 dx$$

$$\Rightarrow \quad dm = \delta_0 dV = \delta_0 \pi (a+bx)^2 dx$$

Total massa: $m = \int dm = \int_0^L \delta_0 \pi (a+bx)^2 dx =$

$$= \delta_0 \pi \left(\frac{1}{3}(a+bx)^3 \frac{1}{b} \right) \Big|_0^L =$$

$$= \delta_0 \pi \frac{1}{3b}\left((a+bL)^3 - a^3\right) =$$

$$= \delta_0 \pi \frac{1}{3b}\left(a^3 + 3a^2bL + 3ab^2L^2 + b^3L^3 - a^3\right) =$$

$$= \boxed{\delta_0 \pi \left(a^2L + abL^2 + \frac{1}{3}b^2L^3\right)}$$

Momentet: $M_{x=0} = \int dM_{x=0} = \int x\, dm =$

$$= \delta_0 \pi \int_0^L x (a+bx)^2 dx =$$

$$= \delta_0 \pi \int_0^L (a^2x + 2abx^2 + b^2x^3) dx =$$

$$= \delta_0 \pi \left(\frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{2}{3}abx^3 + \frac{1}{4}b^2x^4 \right) \Big|_0^L =$$

$$= \delta_0 \pi \left(\frac{1}{2}a^2L^2 + \frac{2}{3}abL^3 + \frac{1}{4}b^2L^4 \right)$$

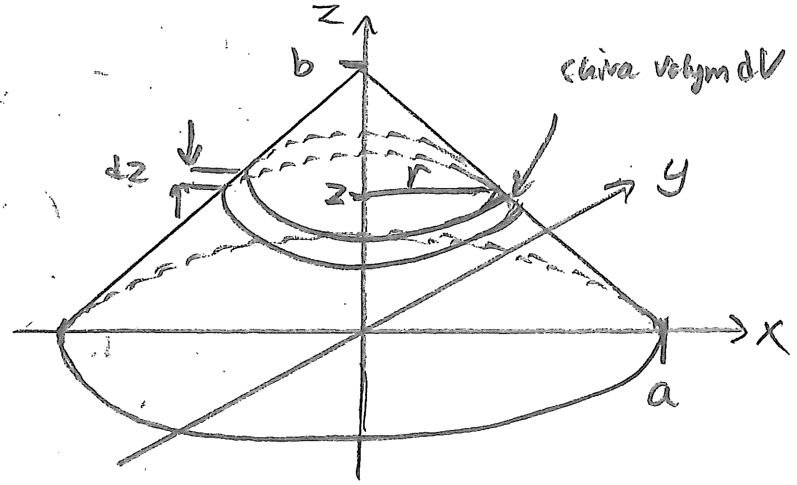
$$\Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\delta_0 \pi \left(\frac{1}{2}a^2L^2 + \frac{2}{3}abL^3 + \frac{1}{4}b^2L^4\right)}{\delta_0 \pi \left(a^2L + abL^2 + \frac{1}{3}b^2L^3\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}a^2L + \frac{2}{3}abL^2 + \frac{1}{4}b^2L^3}{a^2 + abL + \frac{1}{3}b^2L^2} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}\,\frac{6a^2 + 8abL + 3b^2L^2}{3a^2 + 3abL + b^2L^2}\,L}$$

⑰ **7.4:12** Massa och masscentrum hos kon med basradie a och höjd b om tätheten i P är kz där z avstånd mellan P och bas.

Lösning: Skiss:



Notera att p.g.a. likformighet gäller:

$$\frac{b}{a} = \frac{b-z}{r} \Leftrightarrow r = \frac{b-z}{b/a} = \frac{a}{b}(b-z) = $$
$$= a\left(1-\frac{z}{b}\right)$$

Skivans volym: $dV = \pi r^2 \cdot dz =$
$$= \pi a^2\left(1-\frac{z}{b}\right)^2 dz$$

" massa: $dm = \delta\, dV = kz \cdot \pi a^2\left(1-\frac{z}{b}\right)^2 dz$

Total massa: $m = \int dm = \int_0^b kz\pi a^2\left(1-\frac{z}{b}\right)^2 dz =$
$$= \pi k a^2 \int_0^b z\left(1-\frac{z}{b}\right)^2 dz =$$
$$= \pi k a^2 \int_0^b \left(z - \frac{2}{b}z^2 + \frac{1}{b^2}z^3\right) dz$$
$$= \pi k a^2\left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{2}{3b}z^3 + \frac{1}{4b^2}z^4\right)\Big|_0^b =$$
$$= \pi k a^2\left(\frac{1}{2}b^2 - \frac{2}{3}b^2 + \frac{1}{4}b^2\right) =$$
$$= \pi k a^2 \frac{6-8+3}{12} b^2 = \boxed{\frac{\pi}{12} k a^2 b^2}$$

Moment kring $z=0$:

$$M_{z=0} = \int dM_{z=0} = \int z\,dm =$$
$$= \int_0^b z\left(kz\cdot\pi a^2\left(1-\frac{z}{b}\right)^2\right)dz =$$
$$= \pi k a^2 \int_0^b z^2\left(1-\frac{z}{b}\right)^2 dz = [\text{se ovan}] =$$
$$= \pi k a^2 \int_0^b \left(z^2 - \frac{2}{b}z^3 + \frac{1}{b^2}z^4\right)dz =$$
$$= \pi k a^2 \left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2b}z^4 + \frac{1}{5b^2}z^5\right)\Big|_0^b =$$
$$= \pi k a^2\left(\frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{2}b^3 + \frac{1}{5}b^3\right) =$$
$$= \pi k a^2\,\frac{10-15+6}{30}\,b^3 =$$
$$= \frac{\pi}{30}ka^2b^3$$

Masscentrum:

$$\bar{z} = \frac{M_{z=0}}{m} = \frac{\frac{\pi}{30}ka^2b^3}{\frac{\pi}{12}ka^2b^2} = \frac{12}{30}b = \frac{2b}{5}$$

d.v.s. $\boxed{\text{avstånd } 2b/5 \text{ från basen.}}$

Se även RÖ 6-8 HT09 där jag löst bl.a.

6.5:20, 6.5:34, 7.3:20,

7.3:28, 7.4:6, 7.4:14