Mittuniversitetet

MID SWEDEN UNIVERSITY

Inlämningsuppgift för Block I

Inlämningsuppgift för Block I: *Analysens grunder* som ska vara inlämnad senast måndag 13 december. Inlämningsuppgiften består av tre uppgifter där varje uppgift är värd tre poäng, totalt 9 poäng (av totalt 45 poäng för alla fem blockens inlämningsuppgifter där 15p, 25p och 35p ger +1p, +2p resp. +3p på tentamen).

Samarbeta gärna med kurskamraterna men lämna in individuella lösningar! Lämna inlämningsuppgiften till mig personligen (på föreläsningen eller i rum Q291A), i mitt fack (finns vid Q-husets studentexpedition) eller via e-post (jens.persson@miun.se).

1. Visa med hjälp av den formella gränsvärdesdefinitionen (d.v.s. med ε–δ-formalism) att

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{x-2}=7.$$

(Ledtråd: Faktorisera täljaren på lämpligt sätt.) (3p)

2. Skriv summan $2\cdot 6+3\cdot 7+\cdots+(n+1)(n+5)$ på sigmanotationsform (d.v.s. $\sum_i a_i$ för lämpligt a_i) och visa med hjälp av induktion att summan är lika med $\frac{1}{6}n(2n+7)(n+7)$ för alla $n\in\mathbb{N}$. (3p)

3. a) Skissera grafen till

$$f(x)=\begin{cases} 2x+9 & \text{om } x<-2,\\ 8 & \text{om } x=-2,\\ x^2+1 & \text{om } -2<x\leqslant 1,\\ 3x-1 & \text{om } 1<x<3,\\ x+2 & \text{om } 3\leqslant x,\end{cases}$$

och bestäm diskontinuiteterna samt avgör huruvida de är hävbara eller ej. (1.5p)

b) Visa m.h.a. *Satsen om mellanliggande värden* att ekvationen

$$2x^3-4x^2+5x-4=0$$

har minst en rot på intervallet $[0,3]$. (1.5p)

Lösningar till Inlupp I

1. Visa $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x-2} = 7$ formellt.

Vi ska visa att:

För varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ s.a.

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{3x^2-5x-2}{x-2} - 7 \right| < \varepsilon$$

Enligt ledtråden ska vi faktorisera täljaren, rimligen få ut faktor $x-2$.

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l|l} \quad 3x + 1 & \\ \hline 3x^2 - 5x - 2 & x-2 \\ \underline{-3x(x-2)} & \\ \quad\quad x-2 & \\ \underline{\quad -1\cdot(x-2)} & \\ \quad\quad\quad 0 \quad \leftarrow \text{jämnt ut!} & \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad 3x^2 - 5x - 2 = (x-2)(3x+1)$$

$$\Longrightarrow \quad \left| \frac{3x^2-5x-2}{x-2} - 7 \right| = \left| \frac{(x-2)(3x+1)}{x-2} - 7 \right| =$$

$$= |(3x+1) - 7| = |3x - 6| =$$

$$= |3(x-2)| = 3|x-2|$$

Om $\delta = \varepsilon/3$ så blir detta $< \varepsilon$ om $0 < |x-2| < \delta = \varepsilon/3$. $\square$

②

2. Summa $2\cdot 6+3\cdot 7+\dots+(n+1)(n+5)=$

$$=(1+1)(1+5)+(2+1)(2+5)+\dots+$$
$$+(n+1)(n+5)=$$
$$=\boxed{\sum_{i=1}^{n}(i+1)(i+5)}$$ $(a_i=$ $=(i+1)(i+5))$

<u>Påstående:</u> $\sum_{i=1}^{n}(i+1)(i+5)=\frac{1}{6}n(2n+7)(n+7)$ för alla $n\in\mathbb{N}$.

<u>Bevis:</u> • <u>Startsteg:</u> $(n=1)$

$$\sum_{i=1}^{1}(i+1)(i+5)=(1+1)(1+5)=$$
$$=2\cdot 6=12$$
$$\frac{1}{6}\cdot 1\cdot(2\cdot 1+7)(1+7)=\frac{1}{6}\cdot 9\cdot 8=$$
$$=\frac{3}{2}\cdot 8=\frac{24}{2}=12$$

$\Longrightarrow$ Formel sann för $n=1$

Startsteget verifierat!

• <u>Induktionssteg:</u> Antag formel stämmer för $n=p$. För $n=p+1$ gäller då:

$$\sum_{i=1}^{p+1}(i+1)(i+5)=\sum_{i=1}^{p}(i+1)(i+5)+$$
$$+((p+1)+1)((p+1)+5)=$$
$$\overset{[\text{antagande}]}{=}\frac{1}{6}p(2p+7)(p+7)+$$
$$+(p+2)(p+6)=$$

③

$$= \frac{1}{6}\Big(p(2p+7)(p+7) + 6(p+2)(p+6)\Big) =$$

$$= \frac{1}{6}\Big((2p^2+7p)(p+7) + 6(p^2+8p+12)\Big) =$$

$$= \frac{1}{6}(2p^3+14p^2+7p^2+49p+6p^2+48p+72) =$$

$$= \frac{1}{6}(2p^3+27p^2+97p+72) \quad (*)$$

Jämför detta med önskat högerled:

$$\frac{1}{6}(p+1)\big(2(p+1)+7\big)\big((p+1)+7\big) =$$

$$= \frac{1}{6}(p+1)(2p+9)(p+8) =$$

$$= \frac{1}{6}(p+1)(2p^2+16p+9p+72) =$$

$$= \frac{1}{6}(p+1)(2p^2+25p+72) =$$

$$= \frac{1}{6}(2p^3+25p^2+72p+2p^2+25p+72) =$$

$$= \frac{1}{6}(2p^3+27p^2+97p+72)$$

Detta är samma som $(*)$ ovan, d.v.s. formel sann för $n=p+1$.

Enligt induktionsaxiomet är därför formeln sann $\forall n \in \mathbb{N}$! $\square$

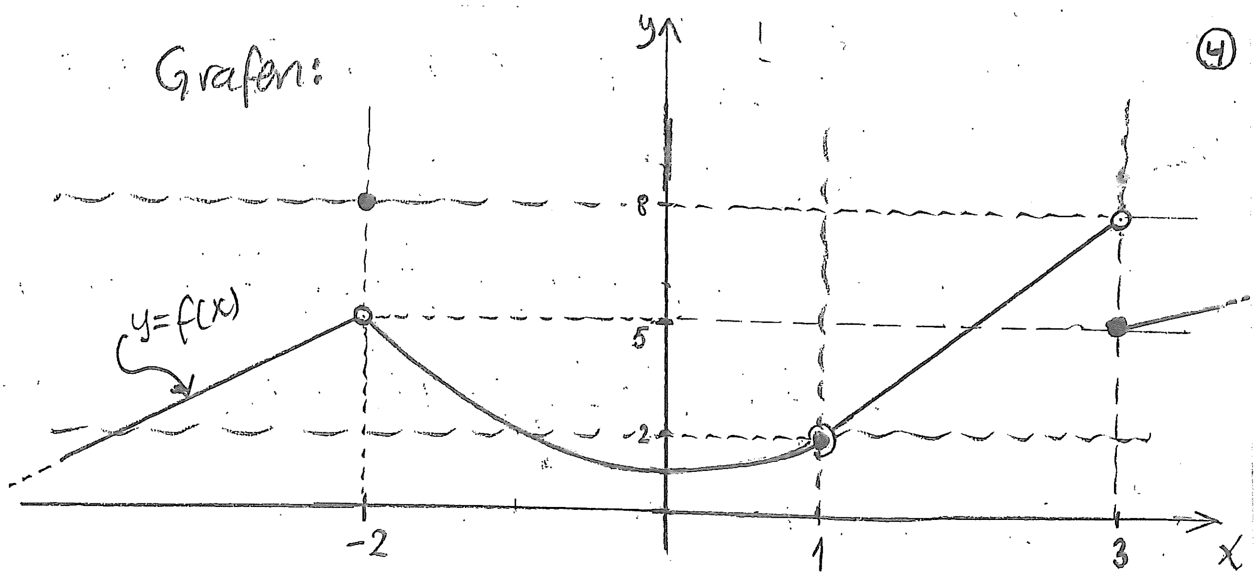
---

3. a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+9 & , \quad x < -2 \\ 8 & , \quad x = -2 \\ x^2+1 & , \quad -2 < x \leq 1 \\ 3x-1 & , \quad 1 < x < 3 \\ x+2 & , \quad 3 \leq x \end{cases}$$

④

Grafen:



Diskontinuiteter: $\underline{\underline{x=-2}}$ och $\underline{\underline{x=3}}$

Hävbara: Endast $\underline{\underline{x=-2}}$ är hävbar.

(Omdefiniera $f(-2)=5$.)

b) Ekvationen $2x^3-4x^2+5x-4=0$,

där $x \in [0,3]$.

Låt $f(x)=2x^3-4x^2+5x-4$, $x \in [0,3]$

f kontinuerlig på $[0,3]$ så Satsen om mellanliggande värden tillämpbar.

$$f(0) = -4 < 0$$
$$f(1) = 2-4+5-4 = 7-8 = -1 < 0$$
$$f(2) = 2\cdot 8-4\cdot 4+10-4 = 26-20 = 6 > 0$$
$$(f(3) = 2\cdot 27-4\cdot 9+15-4 = 69-40 = 29 > 0)$$

Enligt satsen om mellanliggande värden finns $c \in [1,2] \subset [0,3]$ s.a. $f(c)=0$, d.v.s. ekvationen har en rot på $[1,2] \subset [0,3]$. $\square$