



Inlämningsuppgift för Block II

Inlämningsuppgift för Block II: *Derivering* som ska vara inlämnad senast torsdag 16 december. Inlämningsuppgiften består av tre uppgifter där varje uppgift är värd tre poäng, totalt 9 poäng (av totalt 45 poäng för alla fem blockens inlämningsuppgifter där 15p, 25p och 35p ger +1p, +2p resp. +3p på tentamen).

Samarbeta gärna med kurskamraterna men lämna in individuella lösningar! Lämna inlämningsuppgiften till mig personligen (på föreläsningen eller i rum Q291A), i mitt fack (finns vid Q-husets studentexpedition) eller via e-post (jens.persson@miun.se).

1. Visa med hjälp av *Medelvärdessatsen* att olikheten

$$e^x > 1 + x$$

uppfylls för alla $x > 0$. (Ledtråd: Se Example 3 s. 138 (s. 127) i Adams' (& Essex') *Calculus* upplaga 7 (upplaga 6).) (3p)

2. Skissera grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$$

som är definierad på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. (3p)

3. Välj en lämplig funktion och ett lämpligt Taylorpolynom för att beräkna $\ln 1.1$ med ett fel vars absolutbelopp är högst 0.001. (3p)

①

Lösningar till Inlupp II

1. Ska visa $e^x > 1+x$, $x > 0$.

Låt $f(x) = e^x$.

$$\Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= f'(c) = e^c$$

för något $c \in (0, x)$ enligt
Medelvärdessatsen.

Eftersom $e^c > e^0 = 1$ (ty $c > 0$) så

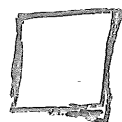
$$\frac{e^x - 1}{x} > 1$$

$$\Downarrow$$

$$e^x - 1 > x \quad (\text{ty } x > 0)$$

$$\Downarrow$$

$$e^x > 1 + x$$



2. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Skissera grafen.

Låt oss först skriva $f(x) = x^{-1} - 3x^{-3}$.

Följ receptet från föreläsning 6:

① $f'(x) = -x^{-2} + 9x^{-4} = \frac{9 - x^2}{x^4}$

$$f''(x) = 2x^{-3} - 36x^{-5} = 2 \frac{x^2 - 18}{x^5}$$

$$(2) (a) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 3}{x^3} = [x^2 - 3 \rightarrow -3, \frac{1}{x^3} \rightarrow -\infty] = \textcircled{2} \\ = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 3}{x^3} = [x^2 - 3 \rightarrow -3, \frac{1}{x^3} \rightarrow +\infty] = \\ = -\infty$$

d.v.s. en dubbelsidig vertikal asymptot.

i $x=0$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^3} \right) = 0 - 0 = 0$$

d.v.s. en horisontell asymptot $y=0$

$$(c) f(-x) = \frac{(-x)^2 - 3}{(-x)^3} = \frac{x^2 - 3}{-x^3} = -\frac{x^2 - 3}{x^3} = -f(x)$$

d.v.s. f udda.

(d) • skärning y-axel: Finns ej ty $f(0)$ odefin

• skärning x-axel: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3}{x^3} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

d.v.s. $(\pm\sqrt{3}, 0)$

$$(3) (a) f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{9 - x^2}{x^4} = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3, \text{ d.v.s.}$$

$$f(\pm 3) = \frac{(\pm 3)^2 - 3}{(\pm 3)^3} = \frac{9 - 3}{\pm 27} = \pm \frac{6}{27} = \pm \frac{2}{9}$$

d.v.s. $(\pm 3, \pm \frac{2}{9})$ kritiska punkter.

(b) f' ej definerad i $x=0$.

③

$$(c) f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{9-x^2}{x^4} > 0 \Leftrightarrow 9-x^2 > 0 \Leftrightarrow$$

(men $x \neq 0$)

$$\Leftrightarrow x^2 < 9 \quad (x \neq 0) \Leftrightarrow x \in (-3, 3) \setminus \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x \in (-3, 0) \cup (0, 3)}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 > 9 \quad (x \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)}$$

$$(4.) (a) f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{x^2-18}{x^5} = 0 \Leftrightarrow x^2-18=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 18 = 2 \cdot 9 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} f(\pm 3\sqrt{2}) &= \frac{(\pm 3\sqrt{2})^2 - 3}{(\pm 3\sqrt{2})^3} = \frac{9 \cdot 2 - 3}{\pm 27 \cdot 2^{3/2}} = \\ &= \pm \frac{15}{27 \cdot 2\sqrt{2}} = \pm \frac{5}{18\sqrt{2}} = \pm \frac{5\sqrt{2}}{18 \cdot 2} = \\ &= \pm \frac{5\sqrt{2}}{36} \end{aligned}$$

$$\text{d.v.s. } \underline{\left(\pm 3\sqrt{2}, \pm \frac{5\sqrt{2}}{36} \right)}$$

(b) f'' ej definierad i $x=0$.

$$(c) f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2 \frac{x^2-18}{x^5} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-18 > 0 \text{ och } x^5 > 0$$

eller

$$x^2-18 < 0 \text{ och } x^5 < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 18 \text{ och } x > 0$$

eller

$$x^2 < 18 \text{ och } x < 0$$

$$\Leftrightarrow x > 3\sqrt{2} \text{ eller } x \in (-3\sqrt{2}, 0) \quad (*)$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ som ej uppfyller } (*).$$

$$\Leftrightarrow x \in (0, 3\sqrt{2}) \text{ eller } x < -3\sqrt{2}$$

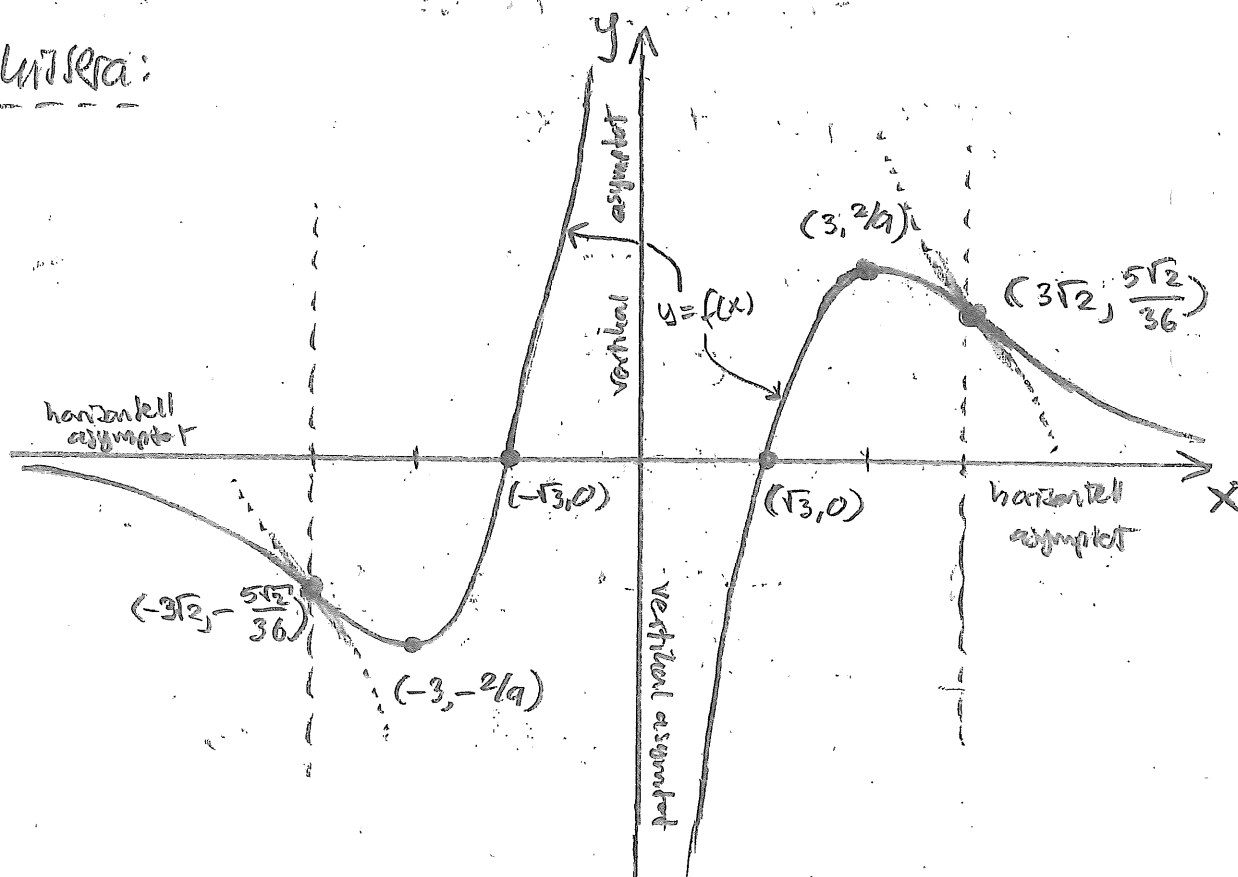
④

(d) f'' växlar tecken (inflexionspunkt) för $x = \pm 3\sqrt{2}$, d.v.s. inflexionspunkter $(\pm 3\sqrt{2}, \pm \frac{5\sqrt{2}}{36})$.

Tabell:

	$-3\sqrt{2}$	-3	0	3	$3\sqrt{2}$	
f'	---	0	++++	0	---	x
f''	---	0	++++	0	---	
f		inflex-punkt	lok min	lokal max	inflex-punkt	

Skissera:



⑤ 3. Beräkna $\ln 1.1$ med Taylorpolynom, |felet| ska vara $\leq 0.001 = 1/1000$

Låt $f(x) = \ln x$ och utveckla kring $x=1$.

$$f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \Rightarrow f^{(4)}(1) = -\frac{6}{1^4} = -6$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{x^5} \Rightarrow f^{(5)}(1) = \frac{24}{1^5} = 24$$

Detta borde vara tillräckligt många.

$$f(x) = \underbrace{P_n(x)}_{\text{approximation}} + \underbrace{E_n(x)}_{\text{fel}}$$

$$\text{där } P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(1)}{i!} (x-1)^i$$

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} (x-1)^{n+1}, \quad s \in (1, x) \quad (x > 1)$$

$$E_0(1.1) = \frac{f'(s)}{1!} (1.1-1) = \frac{1}{s} \cdot 0.1 = \frac{1}{10s}, \quad s \in (1, 1.1)$$

$$\Rightarrow |E_0(1.1)| > \frac{1}{10 \cdot 1.1} = \frac{1}{11} > \frac{1}{1000}, \text{ förång}$$

$$E_1(1.1) = \frac{f''(s)}{2!} (1.1-1)^2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{s^2}\right) \cdot 0.01 =$$

$$= -\frac{1}{200s^2}, \quad s \in (1, 1.1) \quad (6)$$

$$\Rightarrow |E_1(1.1)| > \frac{1}{200 \cdot 1.1^2} = \frac{1}{200 \cdot 1.21} =$$

$$= \frac{1}{242} > \frac{1}{1000}$$

$$E_2(1.1) = \frac{f'''(s)}{3!} (1.1-1)^3 = \frac{1}{6} \frac{2}{s^3} 0.1^3 =$$

$$= \frac{1}{3s^3} 0.001 = \frac{1}{3000s^3}, \quad s \in (1, 1.1)$$

$$\Rightarrow |E_2(1.1)| < \frac{1}{3000 \cdot 1^3} = \frac{1}{3000} < \frac{1}{1000}$$

d.v.s. $|felet| \leq 0.001$ för $P_2(1.1)$.

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!} (x-1)^2 =$$

$$= 0 + 1 \cdot (x-1) + \frac{1}{2} (-1) (x-1)^2 =$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2$$

$$\Rightarrow f(1.1) \approx P_2(1.1) = (1.1-1) - \frac{1}{2} (1.1-1)^2 =$$

$$\stackrel{|felet| \leq 0.001}{=} 0.1 - \frac{1}{2} \cdot 0.1^2 = 0.1 - \frac{1}{2} 0.01 =$$

$$= 0.1 - 0.005 = \underline{\underline{0.095}}$$

(Notera: Minvärdet ger $\ln 1.1 = 0.095310\dots$

$$\text{så felet är } 0.095310\dots - 0.095 =$$

$$= 0.000310\dots \leq 0.001,$$

så $|felet| \leq 0.001$ stämmer!)