Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Inlämningsuppgift för Block III

Inlämningsuppgift för Block III: *Integrering* som ska vara inlämnad senast tisdag 21 december. Inlämningsuppgiften består av tre uppgifter där varje uppgift är värd tre poäng, totalt 9 poäng (av totalt 45 poäng för alla fem blockens inlämningsuppgifter där 15p, 25p och 35p ger +1p, +2p resp. +3p på tentamen).

Samarbeta gärna med kurskamraterna men lämna in individuella lösningar! Lämna inlämningsuppgiften till mig personligen (på föreläsningen eller i rum Q291A), i mitt fack (finns vid Q-husets studentexpedition) eller via e-post (`jens.persson@miun.se`).

1. Antag $P_n = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$ är en partition för $[0,1]$ med delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ av samma längd. Låt $f(x) = 1 - x^2$, $x \in [0,1]$. Beräkna $L(f, P_n)$ och $U(f, P_n)$. Med ledning av detta, vad är $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$? (3p)

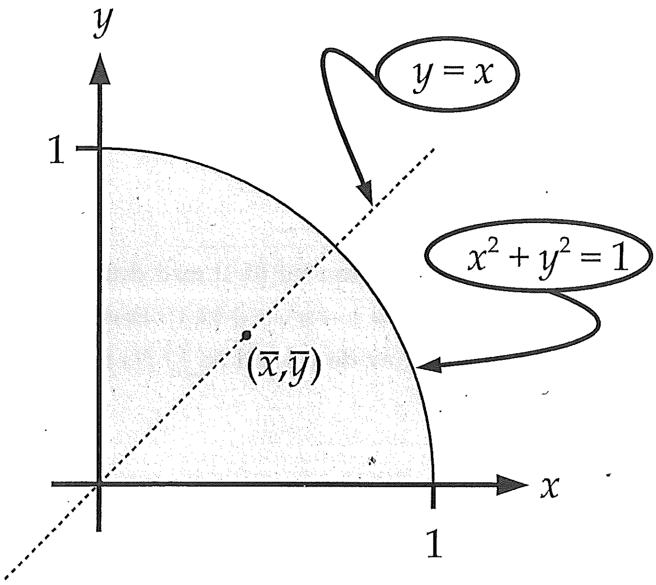
2. Beräkna följande integraler:

a) $$\int \frac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x+1}}\,\mathrm{d}x$$ (1p)

b) $$\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$$ (1p)

c) $$\int \frac{x^2-4x+3}{x^3+2x^2+x}\,\mathrm{d}x$$ (1p)

3. Bestäm masscentrum för en jämntjock plåtskiva formad som en kvartscirkelskiva med radien 1 m. (Ledtråd: Notera symmetrin i Figur 1.) (3p)



Figur 1. Kvartscirkelskivan i Uppgift 3.

(1)

Lösningar till Inlupp III

1.

$P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ partition av $[0,1]$ med delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ av samma längd

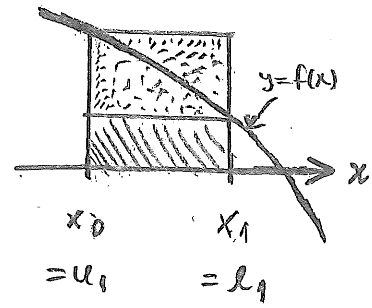
$$\Rightarrow \quad x_i = \frac{1-0}{n} i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

$$f(x) = 1 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x < 0 \text{ då } x > 0$$

$\Rightarrow f$ avtagande

$$\Rightarrow \begin{cases} u_i = x_{i-1} = \frac{i-1}{n} \\ l_i = x_i = \frac{i}{n} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(u_i) = 1 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \\ f(l_i) = 1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2 \end{cases}$$



översumma:

$$U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i) \Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right) \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i^2 - 2i + 1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{-i^2 + 2i + (n^2 - 1)}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{n^3} \left(-\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i + (n^2-1)\sum_{i=1}^{n} 1\right) =$$

$= [$Standardsummationsformler$] =$

$$= \frac{1}{n^3}\left(-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2} + (n^2-1)n\right) =$$ ②

$$= -\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(1-\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + 1 - \frac{1}{n^2} =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{6}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 =$$

$$= \boxed{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{6}\frac{1}{n^2}}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Undersumma:

$$L(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(1-\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{i^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \text{[Standardsummationsformler]} =$$

$$= \frac{1}{n}n - \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= 1 - \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{6}\frac{1}{n^2} =$$

$$= \boxed{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{6}\frac{1}{n^2}}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Eftersom $L(f,P_n) \le R(f,P_n,c) \le U(f,P_n)$

för varje Riemannsumma och att

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = 2/3 \\ \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = 2/3 \end{cases}$$ samma!

③

så ger instängningssatsen att

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P_n\|\to 0}} R(f, P_n, c) = \boxed{\frac{2}{3}}$$

oavsett val av c. (Notera $\|P_n\| = \Delta x_i = \frac{1}{n}$.)

---

2. a) $\displaystyle\int \frac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x+1}}\,dx = \left[\begin{cases} u = x^2+3x+1 \\ du = (2x+3)\,dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\,du = (4x+6)\,dx \end{cases}\right] =$

$$= \int \frac{2\,du}{\sqrt{u}} = 2\int u^{-1/2}\,du =$$

$$= 2\cdot 2u^{1/2} + C =$$

$$= \underline{\underline{4\sqrt{x^2+3x+1} + C}}$$

b) $\displaystyle\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx =$

$$= \left[\begin{cases} u = 2x \\ du = 2\,dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}\,du \end{cases}\right] =$$

$$= \int \frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}\,\frac{1}{2}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{\arcsin u}_{\downarrow} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du}_{\uparrow} =$$

$$= \left[\begin{cases} U = \arcsin u \\ dU = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \end{cases}, \begin{cases} dV = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ V = \arcsin u \end{cases}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left((\arcsin u)^2 - \int \arcsin u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\arcsin u)^2 - \frac{1}{2}\int \arcsin u \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

Sätt $I = \frac{1}{2}\int \arcsin u \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$

Då har vi visat

$$I = \frac{1}{2}(\arcsin u)^2 - I + C$$ OBS!!!

$$\Longleftrightarrow$$

$$2I = \frac{1}{2}(\arcsin u)^2 + C$$ OBS!!!

$$\Longleftrightarrow$$

$$I = \frac{1}{4}(\arcsin u)^2 + C$$ OBS!!!

$$\Rightarrow \int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = I = \frac{1}{4}(\arcsin u)^2 + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}(\arcsin 2x)^2 + C}$$

c) $\int \frac{x^2-4x+3}{x^3+2x^2+x}\,dx = (*)$

Faktorisera nämnaren: $x^3+2x^2+x = x(x^2+2x+1) =$
$= x(x+1)^2$

$$\Rightarrow (*) = \int \frac{x^2-4x+3}{x(x+1)^2}\,dx = (**)$$

Ansätt den rationella integranden som

partialbråk: $\frac{x^2-4x+3}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} =$

$$= \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} =$$

5

$$= \frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B = 1 \\ 2A+B+C = -4 \\ A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+B=1 \\ 6+B+C=-4 \\ A=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B=-2 \\ 6-2+C=-4 \\ A=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-2 \\ C=-8 \\ A=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-4x+3}{x(x+1)^2} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow (**) = \int \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{(x+1)^2} \right) dx =$$

$$= 3\int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x+1} - 8\int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= 3\ln|x| - 2\ln|x+1| - 8\left(-\frac{1}{x+1}\right) + C =$$

$$= \boxed{3\ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{8}{x+1} + C}$$

---

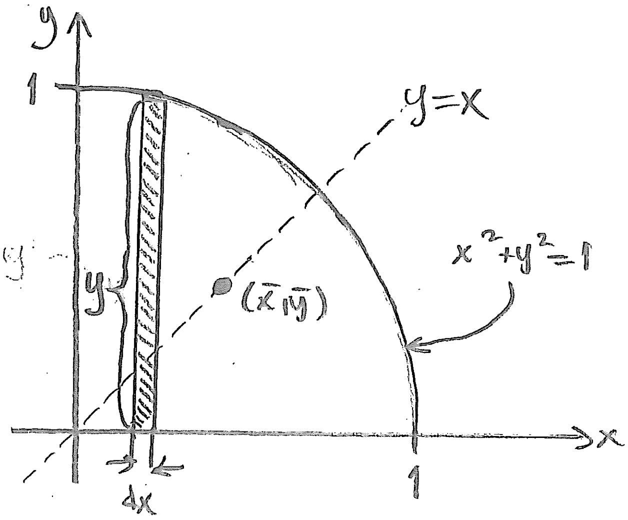
3. Söker $(\bar{x}, \bar{y})$.

Symmetri: $\bar{y} = \bar{x}$

Massa: $m = \int dm = \int_0^1 \delta y \, dx$

Täthet δ är konstant

$x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y = (\pm)\sqrt{1-x^2}$



$$\Rightarrow m = \delta \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$= \left[\begin{cases} x = \sin\theta \\ dx = \cos\theta\, d\theta \end{cases} , \begin{cases} x = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\theta = 0}_{\text{I första varvet}} \end{cases} \right] =$$

Invers substitution!

$$= \delta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\, d\theta = \left[\begin{matrix} \cos\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \Rightarrow \cos\theta \geq 0 \end{matrix} \right] =$$

$$= \delta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \cos\theta\, d\theta = \int_0^1 \cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= \delta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{\delta}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\delta}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cancel{\sin\pi}\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\cancel{\sin 0}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\delta$$

<u>Moment kring $x=0$:</u> $M_{x=0} = \int x\,dm = [\text{se ovan}] =$

$$= \delta \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$= \left[\begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \Leftrightarrow x\,dx = \frac{1}{2}du \end{cases} , \begin{cases} x = 1 \Leftrightarrow u = 1 \\ x = 0 \Leftrightarrow u = 0 \end{cases} \right] =$$

$$= \delta \int_0^1 \sqrt{1-u}\,\frac{1}{2}\,du =$$

$$= \frac{\delta}{2} \int_0^1 (1-u)^{1/2}\,du =$$

$$= \frac{\delta}{2}\left(\frac{2}{3}(1-u)^{3/2}(-1)\right)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{\delta}{3}\left((1-u)^{3/2}\right)\Big|_0^1 =$$

7

$$= -\frac{\delta}{3}\left((1-1)^{3/2} - (1-0)^{3/2}\right) =$$

$$= -\frac{\delta}{3}\left(0 - 1^{3/2}\right) = \frac{1}{3}\delta$$

<u>Masscentrum:</u> $\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\frac{1}{3}\delta}{\frac{\pi}{4}\delta} = \frac{4}{3\pi}$

$$\Longrightarrow \boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}\right)}$$

(<u>Notera:</u> $\frac{4}{3\pi} \approx 0.42$.)