Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Inlämningsuppgift för Block IV

Inlämningsuppgift för Block IV: *Serier och differentialekvationer* som ska vara inlämnad senast fredag 7 januari. Inlämningsuppgiften består av tre uppgifter där varje uppgift är värd tre poäng, totalt 9 poäng (av totalt 45 poäng för alla fem blockens inlämningsuppgifter där 15p, 25p och 35p ger +1p, +2p resp. +3p på tentamen).

Samarbeta gärna med kurskamraterna men lämna in individuella lösningar! Lämna inlämningsuppgiften till mig personligen (på föreläsningen eller i rum Q291A), i mitt fack (finns vid Q-husets studentexpedition) eller via e-post (`jens.persson@miun.se`).

1. a) Är den positiva serien

$$\frac{1}{4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 7\cdot 10}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 7\cdot 10\cdot 13}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{4\cdot 7\cdot 10\cdot 13\cdot 16}+\cdots$$

konvergent eller divergent? (1p)

b) Är den alternerande serien

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

absolutkonvergent? (Ledtråd: Försök jämföra med en p-serie.) Om den inte är det, är den i så fall åtminstone betingat konvergent? (2p)

2. Bestäm lösningen till en första ordningens linjära ODE formulerad som begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} (1+e^x)y'+y=1, \\ y(0)=3. \end{cases}$$

(Ledtråd: Testa att substituera $u=e^x$ om e^x dyker upp i en integral.) (3p)

3. Bestäm den allmänna lösningen till den andra ordningens inhomogena linjära ODE:n

$$y''+3y'-4y=e^{-4x}.$$

(Ledtråd: Kom ihåg att ingen term i partikulärlösningen får lösa den motsvarande *homogena* ODE:n.) (3p)

(1)

Lösningar till Inlupp IV

1. a) Positiv serie

$$\frac{1}{4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 7\cdot 10}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 7\cdot 10\cdot 13}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{4\cdot 7\cdot 10\cdot 13\cdot 16}+\cdots$$

Kan skrivas $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}$.

Använd här kvotkriteriet. Vi får:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2(n+1)-1)}{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)(3(n+1)+1)}}{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\cdot\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)(3n+4)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2n+1)\cdot\frac{1}{3n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+4}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n}{3+4/n}=\frac{2+0}{3+0}=2/3<1$$

$\Longrightarrow$ Serien konvergerar.

b) Alternerande serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

- Absolutkonvergent? $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, $a_n=(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

Vi har att:

$$|a_n|=|(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})|=$$

$$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=$$

$$=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

②

$$= \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Det verkar som att $|a_n| \approx \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ då n är stort, borde jämföra med $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Vi får:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \left[\begin{array}{c}\text{Dividera med} \\ \sqrt{n} \text{ i både} \\ \text{täljare \& nämnare}\end{array}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} =$$

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} > 0 \qquad (*)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$ divergerar ty p-serie med $p = 1/2 < 1$. Tillsammans med $(*)$ så divergerar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ enligt Jämförelsekriterium #2.

$\boxed{\text{Serien är inte absolutkonvergent.}}$

- Betingat konvergent? Skriv serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ där $a_n = (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. Vi ser:

$$(i) \quad a_n a_{n+1} = (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \cdot$$

$$\cdot (-1)^{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}) =$$

$$= \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{=-1}\underbrace{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}_{>0}\underbrace{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})}_{>0} <$$

< 0, d.v.s. alternerande

③

(vilket vi redan fått givet)

(ii) $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ = [se ovest på sid. 2] =

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} <$$

$$< 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow |a_{n+1}| < |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{(avtagande)}$$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) =$

= [samma trick som förut] =

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

Enligt kriteriet för alternerande serier så måste därför serien konvergera.

$\boxed{\text{Serien är betingat konvergent.}}$

---

2. Begynnelsevärdesproblem $\begin{cases} (1+e^x)y'+y=1 & (*) \\ y(0)=3 \end{cases}$

en första ordningens linjära ODE

$\Longrightarrow$ Använd integrerande faktor!

Vi kan skriva (*) på "normalform" enligt

$$y' + \frac{1}{1+e^x}y = \frac{1}{1+e^x}$$

$$\Longrightarrow p(x) = \frac{1}{1+e^x} \Rightarrow \mu(x) = \int \frac{dx}{1+e^x} =$$

(4)

$$= \left[\begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx = u\,dx \Leftrightarrow dx = du/u \end{cases} \right] =$$

$$= \int \frac{du/u}{1+u} = \int \frac{du}{u(1+u)} = (**)$$

Partialbråksuppdela integranden:

$$\frac{1}{u(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1+u} = \frac{A(1+u)+Bu}{u(1+u)} =$$

$$= \frac{(A+B)u + A}{u(1+u)}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{u(1+u)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}$$

$$\Longrightarrow (**) = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) du = \ln|u| - \ln|1+u| =$$

$$= \ln(e^x) - \ln(1+e^x) =$$

$$= x - \ln(1+e^x)$$

$\Longrightarrow$ Integrerande faktor: $e^{\mu(x)} = e^{x - \ln(1+e^x)} =$

$$= e^x / e^{\ln(1+e^x)} =$$

$$= \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{e^{-x}+1}$$

Vi kan skriva ODE:n med IF inmultiplicerad:

$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{1+e^{-x}}}_{e^\mu} y' + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{1+e^{-x}}}_{e^\mu} \underbrace{\frac{1}{1+e^x}}_{\mu'}}_{(e^\mu)'} y}_{(e^\mu y)'} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{1+e^{-x}}}_{e^\mu} \underbrace{\frac{1}{1+e^x}}_{\mu'}}_{(e^\mu)'}$$

(5)

d.v.s. $\frac{d}{dx}\left(e^{\mu(x)}y\right) = \frac{d}{dx}e^{\mu(x)}$

eller $\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{1+e^{-x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$

$$\frac{y}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{-x}} + C \qquad (\dagger)$$

Men $y(0)=3 \Leftrightarrow \frac{3}{1+e^0} = \frac{1}{1+e^0} + C \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow y(x) = (1+e^{-x})\left(\frac{1}{1+e^{-x}} + 1\right)$$

$$= 1 + (1+e^{-x})$$

d.v.s. $\boxed{y(x) = e^{-x} + 2}$

---

3. Andra ordningens inhomogena linjära ODE:n

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} \qquad (*)$$

• Homogen ODE: $y'' + 3y' - 4y = 0$

Karakteristisk ekvation: $r^2 + 3r - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} =$$

$$= -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y_h(x) = Ce^{x} + De^{-4x}$$

• Partikulärlösning till inhomogena ODE:n:

$f(x) = e^{-4x}$ $(= HL(x))$

$= P_n(x)e^{-4x}$ där $P_n(x) = 1$, d.v.s. $n = 0$

Pröva därför (där $A_n(x)$ = ansatt n:te-gradspolynom) ⑥

$$y_p(x) = x^m A_n(x) e^{-4x} = [n=0] = x^m A e^{-4x} =$$

$= [m=0 \Rightarrow y_p$ löser den homogena ODE:n

$m=1 \Rightarrow y_p$ löser <u>inte</u> homogena ODE:n

$\Rightarrow$ välj $m=1] =$

$$= x^1 A e^{-4x} = Axe^{-4x}$$

$$\Rightarrow y_p'(x) = Ae^{-4x} + Ax(-4)e^{-4x} =$$

$$= A(1-4x)e^{-4x}$$

$$\Rightarrow y_p''(x) = A(-4)e^{-4x} + A(1-4x)(-4)e^{-4x} =$$

$$= A(16x-8)e^{-4x}$$

Sätt in i (*):

$$A(16x-8)e^{-4x} + 3A(1-4x)e^{-4x} - 4Axe^{-4x} = e^{-4x}$$

$$A\left(16x-8+3(1-4x)-4x\right) = 1$$

$$A(16x-8+3-12x-4x) = 1$$

$$-5A = 1$$

$$A = -1/5$$

$$\Longrightarrow y_p(x) = -\frac{1}{5}xe^{-4x}$$

Den allmänna lösningen är $y = y_p + y_h$:

$$y(x) = -\frac{1}{5}xe^{-4x} + Ce^{x} + De^{-4x}$$

d.v.s. $\boxed{y(x) = Ce^{x} + (D - \frac{1}{5}x)e^{-4x}}$