Mittuniversitetet

MID SWEDEN UNIVERSITY

Inlämningsuppgift för Block V

Inlämningsuppgift för Block V: *Numeriska metoder* som ska vara inlämnad senast fredag 14 januari. Inlämningsuppgiften består av tre uppgifter där varje uppgift är värd tre poäng, totalt 9 poäng (av totalt 45 poäng för alla fem blockens inlämningsuppgifter där 15p, 25p och 35p ger +1p, +2p resp. +3p på tentamen).

Samarbeta gärna med kurskamraterna men lämna in individuella lösningar! Lämna inlämningsuppgiften till mig personligen (på föreläsningen eller i rum Q291A), i mitt fack (finns vid Q-husets studentexpedition) eller via e-post (jens.persson@miun.se).

1. Ekvationen

$$\ln x - x = -3$$

har exakt en rot på intervallet $[3,6]$. Bestäm roten m.h.a.

a) Fixpunktsmetoden, $x_0 = 4.5$, och 5 decimalers noggrannhet; (1.5p)

b) Newtons metod, $x_0 = 4.5$, och 7 decimalers noggrannhet. (1.5p)

2. Bestäm T_{12}, M_{12}, S_{12}, T_{24} och S_{24} för integralen

$$I = \int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{4-x}$$

samt uppskatta felen för varje approximation. (3p)

3. Använd *den förbättrade Eulers stegmetod* för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y}\mathrm{e}^{-y^2}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

på $[0,1]$ med steglängden $h = 0.2$. Bestäm även det exakta felet $e_5 = y(x_5) - y_5$, $x_5 = 1$, för approximationen $y(1) \approx y_5$. (3p)

Lösningar till Inlupp V

1. Ekvation $\ln x - x = -3$ med en rot på $[3,6]$.

a) Fixpunktsmetoden 5 decimaler: Skriv om ekvationen på formen $f(x) = x$:

$$\ln x - x = -3 \Leftrightarrow \ln x + 3 = x$$

d.v.s. $f(x) = \ln x + 3$

Man kan visa att fixpunktssatsen är tillämplig, d.v.s. om $x_0 \in [3,6]$ så kommer följden $\{x_n\}$ där $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0,1,2,\dots$, att konvergera mot roten r s.a. $f(r) = r$.

Välj $x_0 = 4.5$. Då får vi:

$x_1 = f(x_0) = \ln x_0 + 3 = \ln 4.5 + 3 = 4.\underline{50407}73\ldots$

$x_2 = f(x_1) = \ln x_1 + 3 = \ln 4.5040773 + 3 =$
$= 4.\underline{50498}30\ldots$

$x_3 = f(x_2) = \ln x_2 + 3 = \ln 4.5049830\ldots + 3 =$
$= 4.\underline{50518}41\ldots$

$x_4 = \ln 4.505184\ldots + 3 = 4.\underline{50522}87\ldots$

$x_5 = \ln 4.5052287\ldots + 3 = 4.\underline{50523}86\ldots$

$x_6 = \ln 4.5052386\ldots + 3 = 4.\underline{50524}08\ldots$

$x_7 = 4.\underline{50524}13\ldots$

$x_8 = 4.\underbrace{505241}4\ldots$

$x_9 = 4.\underbrace{505241}4\ldots$

$\vdots$

Det verkar som att roten till 5 decimaler är $\underline{\underline{r = 4.50524}}$.

<u>Notera:</u> Så här kan man verifiera fixpunktssatsen:

(i) $x \in [3,6] \Rightarrow f(x) \in [3,6]$:

f växande $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{minsta värde} = f(3) = \ln 3 + 3 = 4.098\ldots \\ \text{största} \quad " \quad = f(6) = \ln 6 + 3 = 4.791\ldots \end{cases}$$

d.v.s. $x \in [3,6] \Rightarrow f(x) \in [4.098\ldots, 4.791\ldots] \subset$

$\subset [3,6]$, ok!

(ii) Finns $K \in (0,1)$ s.a. $|f(u) - f(v)| \le K|u-v|$ för alla $u, v \in [3,6]$:

$$|f(u) - f(v)| \le K|u-v| \Leftrightarrow \frac{|f(u)-f(v)|}{|u-v|} \le K \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left| \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \right|}_{(*)} \le K \qquad (u \ne v) \qquad (\dagger)$$

(*) kan inte vara större än största värdet för $|f'(x)|$ på $[3,6]$.

$|f'(x)| = \left| \frac{d}{dx}(\ln x + 3) \right| = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|}$ har största värdet $1/3$, d.v.s $K = 1/3$ fungerar i $(\dagger)$. Eftersom $K = 1/3 \in (0,1)$ så har vi verifierat också detta villkor!

③ b) Newtons metod 7 decimaler: Skriv om ekvationen på formen $f(x)=0$:

$$\ln x - x = -3 \Leftrightarrow \ln x - x + 3 = 0$$

d.v.s. $f(x) = \ln x - x + 3, \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

Formel för Newtons metod:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\ln x_n - x_n + 3}{\frac{1-x_n}{x_n}} =$$

$$= x_n + \frac{\ln x_n - x_n + 3}{x_n - 1} x_n =$$

$$= \frac{(x_n - 1) + (\ln x_n - x_n + 3)}{x_n - 1} x_n =$$

$$= \frac{\ln x_n + 2}{x_n - 1} x_n$$

Välj $x_0 = 4.5$. Då får vi:

$$x_1 = \frac{\ln x_0 + 2}{x_0 - 1} x_0 = \frac{\ln 4.5 + 2}{4.5 - 1} 4.5 =$$

$$= 4.\underline{5052423}67\ldots$$

$$x_2 = \frac{\ln x_1 + 2}{x_1 - 1} x_1 = \frac{\ln 4.505242367\ldots + 2}{4.505242367\ldots - 1} 4.505242367\ldots$$

$$= 4.\underline{5052414}95\ldots$$

$$x_3 = \frac{\ln x_2 + 2}{x_2 - 1} x_2 = \frac{\ln 4.505241495\ldots + 2}{4.505241495\ldots - 1} 4.505241495\ldots =$$

$$= 4.\underline{5052414}95\ldots$$

$$x_4 = \frac{\ln x_3 + 2}{x_3 - 1} x_3 = \frac{\ln 4.505241495\ldots + 2}{4.505241495\ldots - 1} 4.505241495\ldots =$$

$$= 4.\underline{5052414}95\ldots$$

Det verkar som att roten till 7 decimaler är $\underline{\underline{r = 4.5052415}}$.

---

2. $T_{12}, M_{12}, S_{12}, T_{18}, M_{18}$ och S_{18} för

$$I = \int_0^3 \frac{dx}{4-x}$$

och uppskatta felen.

Lösning: Delintervallängd $h = \frac{3-0}{12} = \frac{1}{4}$ för $n = 12$. Vi får:

- $T_{12} = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{10} + y_{11} + \frac{1}{2}y_{12}\right) =$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{4-1/4} + \frac{1}{4-2/4} + \dots + \frac{1}{4-10/4} + \frac{1}{4-11/4} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{32} + \frac{1}{16-1} + \frac{1}{16-2} + \dots \frac{1}{16-10} + \frac{1}{16-11} + \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{5}{32} + \frac{1}{15} + \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \underline{\underline{1.3911456\dots}}$$

- $M_{12} = h\left(f(m_1) + f(m_2) + \dots + f(m_{11}) + f(m_{12})\right) =$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4-1/8} + \frac{1}{4-(1/4+1/8)} + \frac{1}{4-(2/4+1/8)} + \dots\right.$$

$$\left.\dots + \frac{1}{4-(10/4+1/8)} + \frac{1}{4-(11/4+1/8)}\right) = \dots$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{8}{32-1} + \frac{8}{32-(2+1)} + \frac{8}{32-(4+1)} + \dots\right.$$

$$\left.\dots + \frac{8}{32-(20+1)} + \frac{8}{32-(22+1)}\right) =$$

$$= \frac{2}{31} + \frac{2}{29} + \frac{2}{27} + \dots + \frac{2}{11} + \frac{2}{9} =$$

$$= \underline{\underline{1.3838804\dots}}$$

⑤ • $S_{12} = \frac{h}{3}\left(\sum y_{\text{ändpunkter}} + 4\sum y_{\text{udda}} + 2\sum y_{\text{jämna}}\right) =$

$$= \frac{1}{12}\left((y_0+y_{12}) + 4(y_1+y_3+\cdots+y_{11}) + 2(y_2+y_4+\cdots+y_{10})\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(\left(\frac{1}{4}+1\right) + 4\left(\frac{1}{4-1/4}+\frac{1}{4-3/4}+\cdots+\frac{1}{4-11/4}\right) + 2\left(\frac{1}{4-2/4}+\frac{1}{4-4/4}+\cdots+\frac{1}{4-10/4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\frac{5}{4} + 4\left(\frac{4}{16-1}+\frac{4}{16-3}+\cdots+\frac{4}{16-11}\right) + 2\left(\frac{4}{16-2}+\frac{4}{16-4}+\cdots+\frac{4}{16-10}\right)\right) =$$

$$= \frac{5}{48} + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{5}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{6}\right) =$$

$$= \underline{\underline{1.3864084\ldots}}$$

• $T_{24} = T_{2\cdot 12} = \frac{T_{12}+M_{12}}{2} = \frac{1.3911456\ldots + 1.3838804\ldots}{2} =$

$$= \underline{\underline{1.3875130\ldots}}$$

• $S_{24} = S_{2\cdot 12} = \frac{T_{12}+2M_{12}}{3} = \frac{1.3911456\ldots + 2\cdot 1.3838804\ldots}{3} =$

$$= \underline{\underline{1.3863021\ldots}}$$

• Uppskattning av felen: $f(x) = \frac{1}{4-x} = -\frac{1}{x-4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = -(-1)\frac{1}{(x-4)^2} = \frac{1}{(x-4)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = -2\frac{1}{(x-4)^3} \Rightarrow f'''(x) = -2(-3)\frac{1}{(x-4)^4} = 6\frac{1}{(x-4)^4}$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(x) = 6\cdot(-4)\frac{1}{(x-4)^5} = -24\frac{1}{(x-4)^5}$$

$$|f''(x)| = \left|-2\frac{1}{(x-4)^3}\right| = 2\frac{1}{|x-4|^3} \leq 2\frac{1}{|3-4|^3} = 2$$

och

$$|f^{(4)}(x)| = \left|-24\frac{1}{(x-4)^5}\right| = 24\frac{1}{|x-4|^5} \leq 24\frac{1}{|3-4|^5} = 24$$

för alla $x \in [0,3]$. Feluppskattningarna blir:

$$|I - T_{12}| \leq \frac{2(3-0)}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{32} = \underline{\underline{0.03125}}$$

$$|I - M_{12}| \leq \frac{2(3-0)}{24}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{64} = \underline{\underline{0.015625}}$$

$$|I - S_{12}| \leq \frac{24(3-0)}{180}\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{72}{180}\cdot\frac{1}{256} = \frac{18}{45}\cdot\frac{1}{256} =$$

$$= \frac{9}{45\cdot 128} = \frac{9}{5760} = \underline{\underline{0.0015625}}$$

$$|I - T_{24}| \leq \frac{2(3-0)}{12}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{128} = \underline{\underline{0.0078125}}$$

$$|I - M_{24}| \leq \frac{2(3-0)}{24}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{256} = \underline{\underline{0.0039062\ldots}}$$

$$|I - S_{24}| \leq \frac{24(3-0)}{180}\left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{72}{180}\cdot\frac{1}{4096} = \frac{18}{45}\cdot\frac{1}{4096} =$$

$$= \frac{9}{45\cdot 2048} = \frac{9}{92160} = \underline{\underline{0.0000976\ldots}}$$

---

3. Lösa begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' = \frac{x}{y}e^{-y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

m.h.a. den förbättrade Eulerstegmetoden på $[0,1]$ och steglängd $h = 0.2$ samt bestämma exakt fel e_5.

<u>Lösning:</u> Begynnelsevärdesproblem $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ med

steglängd h ger med den förbättrade Euler-stegmetoden följande:

⑦

$$\begin{cases} x_n = x_0 + nh \\ u_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h \dfrac{f(x_n,y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2} \end{cases}$$

Här gäller: $f(x,y) = \dfrac{x}{y} e^{-y^2}$, $x_0 = 0, y_0 = 1, h = 0.2$

$$\begin{cases} x_n = 0 + n \cdot 0.2 = 0.2 \cdot n \\ u_{n+1} = y_n + 0.2 \cdot \dfrac{x_n}{y_n} e^{-y_n^2} \\ y_{n+1} = y_n + 0.1 \cdot \left(\dfrac{x_n}{y_n} e^{-y_n^2} + \dfrac{x_{n+1}}{u_{n+1}} e^{-u_{n+1}^2} \right) \end{cases}$$

Vi får iterationerna:

$n=1$

$$\begin{cases} x_1 = 0.2 \cdot 1 = \underline{0.2} \\ u_1 = y_0 + 0.2 \cdot \dfrac{x_0}{y_0} e^{-y_0^2} = 1 + 0 = \underline{\underline{1}} \\ y_1 = y_0 + 0.1 \cdot \left(\dfrac{x_0}{y_0} e^{-y_0^2} + \dfrac{x_1}{u_1} e^{-u_1^2} \right) = \\ \quad = 1 + 0.1 \cdot \left(0 + \dfrac{0.2}{1} e^{-1^2} \right) = \underline{\underline{1.0073575\ldots}} \end{cases}$$

$n=2$

$$\begin{cases} x_2 = 0.2 \cdot 2 = \underline{0.4} \\ u_2 = y_1 + 0.2 \cdot \dfrac{x_1}{y_1} e^{-y_1^2} = \\ \quad = 1.0073575\ldots + 0.2 \cdot \dfrac{0.2}{1.0073575\ldots} e^{-1.0073575\ldots^2} = \\ \quad = 1.0217511\ldots \\ y_2 = y_1 + 0.1 \cdot \left(\dfrac{x_1}{y_1} e^{-y_1^2} + \dfrac{x_2}{u_2} e^{-u_2^2} \right) = \\ \quad = 1.0073575\ldots + 0.1 \cdot \left(\dfrac{0.2}{1.0073575\ldots} e^{-1.0073575\ldots^2} + \right. \\ \quad \left. + \dfrac{0.4}{1.0217511\ldots} e^{-1.0217511\ldots^2} \right) = \\ \quad = \underline{\underline{1.0283366\ldots}} \end{cases}$$

$$n=3\begin{cases} x_3 = 0.2\cdot 3 = \underline{0.6} \\ u_3 = y_2 + 0.2\cdot \frac{x_2}{y_2} e^{-y_2^2} = \\ \quad = 1.0283366\ldots + 0.2\cdot \frac{0.4}{1.0283366\ldots} e^{-1.0283366\ldots^2} = \\ \quad = 1.0553574\ldots \\ y_3 = y_2 + 0.1\cdot\left(\frac{x_2}{y_2}e^{-y_2^2} + \frac{x_3}{u_3}e^{-u_3^2}\right) = \\ \quad = 1.0283366\ldots + 0.1\cdot\left(\frac{0.4}{1.0283366\ldots} e^{-1.0283366\ldots^2} + \right. \\ \qquad \left. + \frac{0.6}{1.0553574\ldots} e^{-1.0553574\ldots^2}\right) = \\ \quad = \underline{\underline{1.0605127\ldots}} \end{cases}$$

$$n=4\begin{cases} x_4 = \underline{\underline{0.8}} \\ u_4 = y_3 + 0.2\cdot\frac{x_3}{y_3}e^{-y_3^2} = 1.0972595\ldots \\ y_4 = y_3 + 0.1\cdot\left(\frac{x_3}{y_3}e^{-y_3^2} + \frac{x_4}{u_4}e^{-u_4^2}\right) = \underline{\underline{1.1007587\ldots}} \end{cases}$$

$$x_5 = \underline{\underline{1}}$$

$$u_5 = y_4 + 0.2\cdot\frac{x_4}{y_4}e^{-y_4^2} = 1.1440306\ldots$$

$$y_5 = y_4 + 0.1\cdot\left(\frac{x_4}{y_4}e^{-y_4^2} + \frac{x_5}{u_5}e^{-u_5^2}\right) =$$

$$= \underline{\underline{1.1460078\ldots}}$$

<u>Exakt lösning:</u> $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}e^{-y^2} \Leftrightarrow \int ye^{y^2}\,dy = \int x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{y^2} = \frac{1}{2}x^2 + C' \Leftrightarrow e^{y^2} = x^2 + C \quad (C = 2C')$$

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow e^{1^2} = 0^2 + C \Leftrightarrow C = e$$

$$\Longrightarrow e^{y^2} = x^2 + e \Leftrightarrow y^2 = \ln(x^2+e) \Leftrightarrow$$

(9) $\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\ln(x^2+e)}$, men $y(0)=1>0$

$\Rightarrow y(x) = \sqrt{\ln(x^2+e)}$

$\Rightarrow y(x_5) = y(1) = \sqrt{\ln(1^2+e)} =$

$= \sqrt{\ln(1+e)} = 1.1459763\ldots$

$\Rightarrow$ Det exakta felet för $y(1) \approx y_5$ är

$e_5 = y(x_5) - y_5 =$

$= 1.1459763\ldots - 1.1460078\ldots =$

$= \underline{\underline{-0.0000315\ldots}}$