Mittuniversitetet

MID SWEDEN UNIVERSITY

Tentamen 2011-01-14 kl. 14:00–19:00

Miniräknare: Ej symbolhanterande. Formelsamling: Tabeller och formler för NV- och TE-programmen; Formler och tabeller i fysik, matematik och kemi för gymnasieskolan; TEFYMA; eller Formler och tabeller (Natur och Kultur).

Lösningarna bör vara så pass fullständigt dokumenterade att en läsare kan följa alla moment utan att behöva fylla i saknade steg.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är: A 22p, B 18p, C 14p, D 10p, E 9p. (Max: 24p. exkl. bonuspoäng.) Till tentamensskrivningspoängen adderas erhållna bonuspoäng. (Max: +3p.)

1. a) Visa med hjälp av den formella gränsvärdesdefinitionen (d.v.s. med ε–δ-formalism) att $\lim_{x\to -1}(2-3x)=5$. (1.5p)

b) Avgör huruvida $x=2$ är en hävbar diskontinuitet eller ej till funktionen $f(x)=\frac{x^3-2x^2+x-2}{x-2}$ samt definiera $f(2)$ för att få kontinuitet. (1.5p)

2. En liksidig triangel T har basen 6 cm och höjden 12 cm. Bestäm den största möjliga arean A hos en rektangel R som ligger inuti triangeln och som har ena sidan på triangelns bas. (Se Figur 1(a).) (3p)

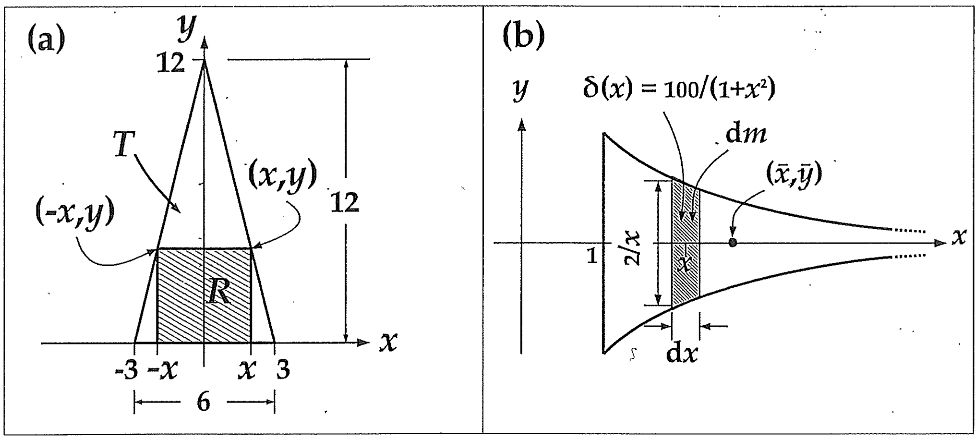
3. Bestäm andra ordningens Taylorpolynom $P_2(x)$ till $f(x)=x^{2/3}$ kring $x=8$ och approximera med hjälp av detta $10^{2/3}$ samt uppskatta absolutbeloppet $|E_2(10)|$ av felet för approximationen. (3p)

4. a) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$. (1p)

b) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$. (1p)

c) Beräkna $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$. (1p)

5. Bestäm masscentrum $(\bar{x},\bar{y})$ hos det oändligt långa pappersark vars vänstra ände ligger i $x=1$ m, är symmetrisk kring x-axeln, har bredden $\frac{2}{x}$ m samt masstätheten $\delta(x)=\frac{100}{1+x^2}$ g/m^2. (Se Figur 1(b).) (Ledtråd: Notera partialbråksuppdelningen $\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$.) (3p)



Figur 1. (a) Rektangeln i triangeln i Uppgift 2. (b) Pappersarket i Uppgift 5.

6. a) Är den positiva serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n)!}$ konvergent eller divergent?
(Ledtråd: Om m jämnt så gäller $m!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (m-2) \cdot m$.) (1.5p)

   b) Är den alternerande serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2\sqrt{n}}$ absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent? (1.5p)

7. a) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' + 2xy = xe^{-x^2}, \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$ (1.5p)

   b) Lös differentialekvationen $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x}$. (1.5p)

8. Använd den förbättrade Eulers stegmetod för att lösa begynnelse-värdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = xe^{x^2-y}, & (*) \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

på $[0, 1]$ med steglängden $h = 0.25$ samt bestäm det exakta felet

$$e_n = y(x_n) - y_n$$

för varje steg $n = 0, 1, 2, 3, 4$. (Ledtråd: ODE:n $(*)$ är separabel.) (3p)

LÖSNINGAR TILL TENTAN 2011-01-11

1. a) Visa $\lim_{x \to -1} (2-3x) = 5$ formellt.

Lösning: Låt $f(x) = 2-3x$, $a=-1$, $L=5$. Vill visa:

För varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ s.a.

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon \qquad (*)$$

Det gäller att om $\varepsilon > 0$ är givet så:

$$|f(x)-L| = |(2-3x)-5| = |-3-3x| =$$
$$= |3+3x| = 3|x+1| = 3|x-(-1)| \qquad (**)$$

Detta är $< \varepsilon$ omm $3|x-(-1)| < \varepsilon$

$$|x-(-1)| < \varepsilon/3$$

Välj $\delta = \varepsilon/3$. Då gäller:

$$0 < |x-a| < \delta \underset{\delta = \varepsilon/3}{\Longrightarrow} 0 < |x-(-1)| < \varepsilon/3 \underset{(**)}{\Longrightarrow}$$
$$\underset{(**)}{\Longrightarrow} |f(x)-L| < \varepsilon$$

Vilket precis är implikationen $(*)$.

b) Låt $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x-2}$. Är $x=2$ en hävbar diskontinuitet?

Lösning: Notera att det för täljaren gäller vid insättning av $x=2$:

$2^3 - 2\cdot 2^2 + 2 - 2 = 8 - 8 + 2 - 2 = 0 + 0 = 0,$

d.v.s. kan faktorisera ut $x-2$ ur täljaren:

$$\begin{array}{l} \quad x^2 + 1 \\ \hline x^3 - 2x^2 + x - 2 \;\underline{|\, x-2} \\ -x^2(x-2) \\ \hline \qquad\quad x - 2 \\ \quad\;\; - 1\cdot(x-2) \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$\leftarrow$ Jämnt ut!

$$\Longrightarrow \quad x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2+1)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = \frac{(x-2)(x^2+1)}{x-2} = x^2 + 1$$

Vi har: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2+1) = 2^2 + 1 = 5$

d.v.s. gränsvärdet finns

$\Longrightarrow$ $\underline{\underline{x=2 \text{ är en hävbar diskontinuitet!}}}$

Eftersom $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$ så ska vi

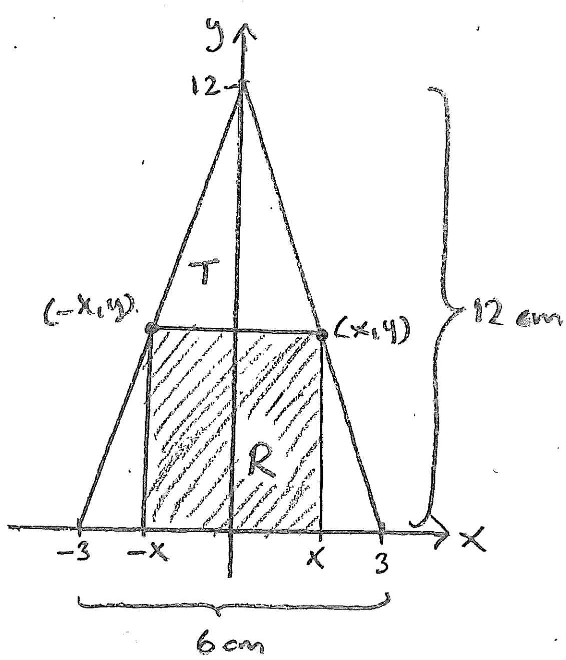
$\underline{\underline{\text{definiera } f(2) = 5.}}$

---

2. Liksidig triangel T bas 6 cm höjd 12 cm.
Rektangel R i T ena sidan på T:s bas.
Största möjliga area A hos R?

__Lösning:__ Skissa en figur:

(3)



Arean hos R:

$$A = (R\text{:s bas}) \cdot (R\text{:s höjd}) = (2x)y =$$
$$= 2xy$$

Vad är y uttryckt i x? Rät linje: $y = kx + m$

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-12}{3-0} = \frac{-12}{3} = -4$$

$$\Longrightarrow y = -4x + m = m - 4x$$

Vet att t.ex. $(3,0)$ ligger på linjen:

$$0 = m - 4 \cdot 3 \Leftrightarrow 0 = m - 12 \Leftrightarrow m = 12$$

$$\Longrightarrow y = 12 - 4x = 4(3-x) \qquad (= y(x))$$

$$\Longrightarrow A(x) = 2x\,y(x) = 2x \cdot 4(3-x) =$$
$$= 8x(3-x), \quad x \in [0,3]$$

Vill hitta största värdet till $A(x)$ på $[0,3]$.

- Kritiska punkter: $A'(x) = 8(3-x) + 8x(-1) =$

$$= 8(3-x)+8(-x) = 8(3-2x)$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 8(3-2x) = 0 \Leftrightarrow 3-2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 3/2 \quad (\in [0,3])$$

- Singulära punkter: Saknas!
- Ändpunkter: $x = 0$ och $x = 3$

Det är bland dessa punkter som största (och minsta) värden antas:

$$\begin{cases} A(0) = 8 \cdot 0 \cdot (3-0) = 0 \\ A(3/2) = 8 \cdot \frac{3}{2} \cdot (3 - \frac{3}{2}) = 12 \cdot \frac{3}{2} = 18 & (> 0) \\ A(3) = 8 \cdot 3 \cdot (3-3) = 8 \cdot 3 \cdot 0 = 0 & (< 18) \end{cases}$$

Största värdet är alltså 18.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{R:S största area är } 18 \text{ cm}^2.}$

---

3. $f(x) = x^{2/3}$, bestämma $P_2(x)$ i $x=8$, approximera $10^{2/3}$ samt uppskatta $|E_2(10)|$.

Lösning: Taylorpolynom av andra ordningen i $x=8$:

$$P_2(x) = f(8) + f'(8)(x-8) + \frac{1}{2!} f''(8)(x-8)^2$$

Felet blir enligt Taylors sats:

$$E_2(x) = \frac{1}{3!} f'''(s)(x-8)^3, \quad s \in (8, x) \quad (x > 8)$$

Vi får för $f(x) = x^{2/3}$:

⑤

$$f(8) = 8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$\Longrightarrow f'(8) = \frac{2}{3}8^{-1/3} = \frac{2}{3}(8^{1/3})^{-1} = \frac{2}{3}2^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-1/3-1} = -\frac{2}{9}x^{-4/3}$$

$$\Longrightarrow f''(8) = -\frac{2}{9}8^{-4/3} = -\frac{2}{9}(8^{1/3})^{-4} =$$

$$= -\frac{2}{9}2^{-4} = -\frac{2}{9}\frac{1}{16} = -\frac{1}{72}$$

$$f'''(x) = -\frac{2}{9}\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-4/3-1} = \frac{8}{27}x^{-7/3}$$

Vi får därför:

$$P_2(x) = 4 + \frac{1}{3}(x-8) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{72}\right)(x-8)^2$$

$$\boxed{P_2(x) = 4 + \frac{1}{3}(x-8) - \frac{1}{144}(x-8)^2}$$

$$\Longrightarrow 10^{2/3} = f(10) \approx P_2(10) =$$

$$= 4 + \frac{1}{3}(10-8) - \frac{1}{144}(10-8)^2 =$$

$$= 4 + \frac{1}{3}\cdot 2 - \frac{1}{144}\cdot 2^2 = 4 + \frac{2}{3} - \frac{1}{36} =$$

$$= \frac{144+24-1}{36} = \frac{167}{36} = 4.63\overline{8}$$

d.v.s. vi har approximationen $\underline{\underline{10^{2/3} \approx 4.63\overline{8}}}$

Felet:

$$E_2(x) = \frac{1}{6}\cdot\frac{8}{27}s^{-7/3}\cdot(x-8)^3 =$$

$$= \frac{4}{81}s^{-7/3}(x-8)^3, \quad s \in (8, x)$$

$$\Longrightarrow |E_2(10)| = \left|\frac{1}{6} s^{-7/3}(10-8)^3\right| =$$

$$= \frac{1}{6} 2^3 s^{-7/3} = \frac{4}{3} s^{-7/3} <$$

$$< [s > 8 \Rightarrow s^{-7/3} < 8^{-7/3}] \ \frac{4}{3} 8^{-7/3} =$$

$$= \frac{4}{3}(8^{1/3})^{-7} = \frac{4}{3} 2^{-7} = \frac{4}{3}\frac{1}{128} =$$

$$= \frac{1}{96} = 0.01041\overline{6}$$

d.v.s. $\underline{\underline{|E_2(10)| < 0.01041\overline{6}}}$

Notera: M.h.a. miniräknare: $10^{2/3} = 4.6415888...$

$$\Longrightarrow |E_2(10)| = |10^{2/3} - P_2(10)| =$$

$$= |4.6415888... - 4.6388888...| =$$

$$= 0.0026999... < 0.0104166...,$$

så det vi härlett tycks stämma. □

4. a) $$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[\begin{cases} u = x+1 \\ du = dx \end{cases}, \begin{cases} x=1 \Leftrightarrow u=2 \\ x=0 \Leftrightarrow u=1 \end{cases}\right] =$$

$$= \int_1^2 \frac{(u-1)^2}{\sqrt{u}}\,du = \int_1^2 \frac{u^2-2u+1}{\sqrt{u}}\,du =$$

$$= \int_1^2 (u^{3/2} - 2u^{1/2} + u^{-1/2})\,du =$$

$$= \left(\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{4}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2}{5}2^{5/2} - \frac{4}{3}2^{3/2} + 2\cdot 2^{1/2}\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 2\right) =$$

⑦

$$= \frac{2}{5}\cdot 2^2\cdot 2^{1/2} - \frac{4}{3}\cdot 2\cdot 2^{1/2} + 2\cdot 2^{1/2} - \frac{6-20+30}{15} =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot 4\sqrt{2} - \frac{4}{3}2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \frac{16}{15} =$$

$$= \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{3} + 1\right)2\sqrt{2} - \frac{16}{15} = \frac{12-20+15}{15}2\sqrt{2} - \frac{16}{15} =$$

$$= \frac{7}{15}2\sqrt{2} - \frac{16}{15} = \boxed{\frac{2}{15}(7\sqrt{2}-8)} \quad (=0.2532659\ldots)$$

b) $$\int_0^1 \underbrace{\ln(1+x^2)}_{\downarrow}\underbrace{dx}_{\uparrow} = \left[\begin{cases} U = \ln(1+x^2) \\ dU = \frac{2x}{1+x^2}dx \end{cases}; \begin{cases} dv = dx \\ V = x \end{cases}\right] =$$

$$= \ln(1+x^2)\cdot x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\,\frac{2x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x\ln(1+x^2)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x\ln(1+x^2)\Big|_0^1 - 2\int_0^1\left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= x\ln(1+x^2)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 1\,dx + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= x\ln(1+x^2)\Big|_0^1 - 2x\Big|_0^1 + 2\arctan x\Big|_0^1 =$$

$$= \left(x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \left(1\cdot\ln(1+1^2) - 2\cdot 1 + 2\arctan 1\right) -$$

$$- \left(0\cdot\ln(1+0^2) - 2\cdot 0 + 2\arctan 0\right) =$$

$$= \left(\ln 2 - 2 + 2\frac{\pi}{4}\right) - 0 = \boxed{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}}$$

$(= 0.2639435\ldots)$

c) $\int \frac{x-3}{x^3+x^2}\,dx = \int \frac{x-3}{x^2(x+1)}\,dx = (*)$

Ansätt integrand som partialbråk:

$$\frac{x-3}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} =$$

$$= \frac{Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)} =$$

$$= \frac{Ax^2 + Ax + Bx + B + Cx^2}{x^2(x+1)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^2 + (A+B)x + B}{x^2(x+1)}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ A+B=1 \\ B=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ A-3=1 \\ B=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+C=0 \\ A=4 \\ B=-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C=-4 \\ A=4 \\ B=-3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (*) = \int \left(\frac{4}{x} + \frac{-3}{x^2} + \frac{-4}{x+1} \right) dx =$$

$$= 4\ln|x| - 3(-1)\frac{1}{x} - 4\ln|x+1| + C =$$

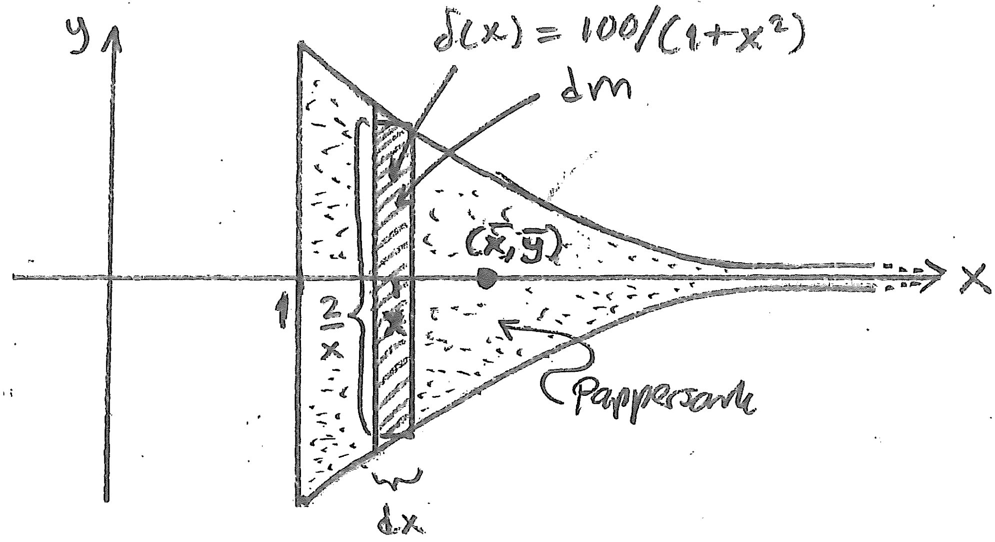
$$= 4(\ln|x| - \ln|x+1|) + \frac{3}{x} + C =$$

$$= \boxed{4\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{3}{x} + C}$$

---

5. Masscentrum $(\bar{x}, \bar{y})$ hos ∞ lång platta med vänstra änden i $x=1$, symmetrisk längs x-axeln, bredden $2/x$ och $\delta(x) = 1/(1+x^2)$.

⑨. Se figur:



P.g.a. symmetri gäller förstås $\bar{y} = 0$ m.

För $\bar{x}$ gäller: $\bar{x} = \dfrac{M_{x=0}}{m}$. $\left(\begin{array}{l} m = \text{massan}, \\ M_{x=0} = \text{moment kring } x=0 \end{array}\right)$

• <u>Massan:</u> $m = \int dm$ där masselementet ges enligt

$$dm = \text{masstäthet} \times \text{ytelementsarea} =$$

$$= \delta(x) \times (\text{bredden} \times dx) =$$

$$= \frac{100}{1+x^2} \cdot \frac{2}{x} \cdot dx$$

$$\Rightarrow m = \int_1^{\infty} \frac{100}{1+x^2} \cdot \frac{2}{x}\, dx = 200 \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} =$$

$$= \left[\text{Ledtråden: } \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right] =$$

$$= 200 \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = [\text{Per def.}] =$$

$$= 200 \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$$

$$= 200 \lim_{R\to\infty} \left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\right)\Big|_1^R =$$

$$= 200 \lim_{R\to\infty} \left(\left(\ln R - \frac{1}{2}\ln(1+R^2) \right) - \left(\ln 1 - \frac{1}{2}\ln 2 \right) \right) =$$

$$= 200 \lim_{R\to\infty} \left(\ln \frac{R}{\sqrt{1+R^2}} + \frac{1}{2}\ln 2 \right) =$$

$$= 200 \left(\lim_{R\to\infty} \ln \frac{1}{\sqrt{1/R^2+1}} + \frac{1}{2}\ln 2 \right) =$$

$$= 200 \left(\ln \frac{1}{\sqrt{0+1}} + \frac{1}{2}\ln 2 \right) =$$

$$= 200 \left(\overset{0}{\cancel{\ln 1}} + \frac{1}{2}\ln 2 \right) = 100 \ln 2$$

• <u>Moment:</u> $M_{x=0} = \int x\, dm = \{\text{Enligt ovan}\} =$

$$= \int_1^\infty x \frac{100}{1+x^2} \frac{2}{x}\, dx = 200 \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= 200 \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= 200 \lim_{R\to\infty} \arctan x \Big|_1^R =$$

$$= 200 \left(\lim_{R\to\infty} \arctan R - \arctan 1 \right) =$$

$$= 200 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 200 \frac{\pi}{4} = 50\pi$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{50\pi}{100 \ln 2} = \frac{\pi}{2 \ln 2}$$

$$\boxed{\text{Masscentrum ligger i } (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\pi}{2\ln 2}\,\text{m}, 0\,\text{m} \right).}$$

(<u>Notera:</u> $\bar{x} = 2.2661800\ldots$)

(11)

6. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n)!}$ konvergent?

<u>Lösning:</u> $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n-2)(2n)$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{(2n)!!}{(2n)!} = \frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots 2n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n)!}$ testar vi med hjälp av kvotkriteriet (ty positiv serie):

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots 2(n+1)}}{\frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2n}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots 2n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2n(2n+2)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdots 2n}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots 2n(2n+1)(2n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

$\Rightarrow$ <u>Serien konvergerar</u>

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2\sqrt{n}}$ absolutkonv., betingat konv. eller divergent?

<u>Lösning:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2\sqrt{n}}$

- <u>Absolutkonvergent?</u> $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $|a_n| = \frac{1}{n+2\sqrt{n}}$

Vi ser att $|a_n| \approx \frac{1}{n}$ då n stort

$\Rightarrow$ Jämför med serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n = 1/n$.

Vi får gränsvärdet

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2/\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1 > 0$$

$\Longrightarrow$ Eftersom den harmoniska serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerar mot ∞ och $L>0$ så gäller enligt Jämförelsekriterium #2 att även $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergerar

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Serien är ej absolutkonvergent.}}$

• Betingat konvergent? Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2\sqrt{n}}$, uppfyller: (i) Serien är alternerande. ($a_n a_{n+1} < 0$.)

(ii) Serien har avtagande belopp ty

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)+2\sqrt{n+1}}{n+2\sqrt{n}} > 1 \Leftrightarrow |a_{n+1}| > |a_n|$$

(iii) Seriens termer går mot noll ($a_n = \frac{(-1)^n}{n+2\sqrt{n}} \to 0$)

Enligt Kriteriet för alternerande serier gäller därför att serien är konvergent.

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Serien är betingat konvergent.}}$

(13) 7. a) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'+2xy = xe^{-x^2} \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$

Lösning: $y'+2xy = xe^{-x^2}$ löser vi

med hjälp av integrerande faktor. Vi har:

$$\mu = \int 2x\,dx = x^2 \Rightarrow I.F. = e^{\mu} = e^{x^2}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{x^2}(y'+2xy) = e^{x^2}xe^{-x^2}$$

$$e^{x^2}y' + e^{x^2}\cdot 2x\cdot y = x$$

$$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(e^{x^2})\,y = x$$

$$\frac{d}{dx}(e^{x^2}y) = x$$

$$e^{x^2}y = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C \qquad (*)$$

Men $y(0) = 1/2 \Rightarrow e^{0^2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}0^2 + C \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1\cdot\frac{1}{2} = 0 + C \Leftrightarrow C = 1/2$$

$\Longrightarrow (*)$ blir $e^{x^2}y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)$$

d.v.s. $\boxed{y(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2}(1+x^2).}$

b) Lös $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x}$ $\quad (**)$

Lösning: • Homogen version av $(**)$: $y''+6y'+8y=0$

Detta ger karaktäristisk ekvation

$r^2+6r+8=0 \Leftrightarrow r=-3\pm\sqrt{9-8}=-3\pm1=\begin{cases}-2\\-4\end{cases}$

$\Longrightarrow$ Den komplementära lösningen är

$$y_h(x)=Ce^{-2x}+De^{-4x}$$

- Partikulärlösning till (**): $HL_{(**)}=3e^{-2x}=P_n(x)e^{-3x}$ där $P_n(x)=3$, d.v.s. $n=0$ (0:e-grads-polynom).

Pröva med (där $A_n(x)$ ansätt n:te-grads-polynom, $n=0$):

$$y_p(x)=x^m A_n(x)e^{-2x}=[n=0]=$$
$$=x^m A\,e^{-2x}=Ax^m e^{-2x}$$

$\underline{m=0} \Rightarrow y_p(x)=Ae^{-2x}$, löser den homogena ODE:n (d.v.s. Ae^{-2x} ingår redan i y_h)

$\underline{m=1} \Rightarrow y_p(x)=Axe^{-2x}$, löser <u>inte</u> den homogena ODE:n

Vi väljer alltså $y_p(x)=Axe^{-2x}$

$$\Longrightarrow y_p'(x)=A\left(1\cdot e^{-2x}+x(-2)e^{-2x}\right)=$$
$$=A(1-2x)e^{-2x}$$
$$\Longrightarrow y_p''(x)=A\left((-2)e^{-2x}+(1-2x)(-2)e^{-2x}\right)=$$
$$=A(4x-4)e^{-2x}=4A(x-1)e^{-2x}$$

Sätt in y_p, y_p' och y_p'' i (**):

15

$$4A(x-1)e^{-2x} + 6\cdot A(1-2x)e^{-2x} + $$
$$+8\cdot Axe^{-2x} = 3e^{-2x}$$

$\Updownarrow$

$$A\left((4x-4)+6(1-2x)+8x\right)e^{-2x} = 3e^{-2x}$$

$\Updownarrow$

$$A(4x-4+6-12x+8x) = 3$$

$\Updownarrow$

$$2A = 3$$

$\Updownarrow$

$$A = 3/2$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{3}{2}xe^{-2x}$$

Den allmänna lösningen är $y = y_p + y_h$:

$$y(x) = Ce^{-2x} + De^{-4x} + \frac{3}{2}xe^{-2x}$$

d.v.s. $\boxed{y(x) = \left(C + \frac{3}{2}x\right)e^{-2x} + De^{-4x}}$.

---

8. Förbättrade Eulers stegmetod för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = xe^{x^2-y} & (*) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

på $[0,1]$ med $h = 0.25$. Bestäm exakt fel $e_n = y(x_n) - y_n$, $n = 0,1,2,3,4$.

Lösning: Begynnelsevärdesproblem $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ med steglängd h ger med den förbättrade Eulers stegmetod följande iterationsformler:

$$x_n = x_0 + nh$$
$$u_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + h\frac{f(x_n,y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2}$$

Här har vi: $f(x,y) = xe^{x^2-y}$, $x_0 = 0, y_0 = 0, h = 0.25$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n = 0 + n\cdot 0.25 = 0.25\cdot n \\ u_{n+1} = y_n + 0.25\cdot x_n e^{x_n^2 - y_n} \\ y_{n+1} = y_n + 0.125\left(x_n e^{x_n^2-y_n} + x_{n+1} e^{x_{n+1}^2 - u_{n+1}}\right) \end{cases}$$

Detta ger iterationerna

$$n=1 \begin{cases} x_1 = 0.25\cdot 1 = \underline{\underline{0.25}} \\ u_1 = y_0 + 0.25\cdot x_0 e^{x_0^2-y_0} = 0 + 0.25\cdot 0\cdot e^{0^2-0} = 0 \\ y_1 = y_0 + 0.125\left(x_0 e^{x_0^2-y_0} + x_1 e^{x_1^2-u_1}\right) = \\ \quad = 0 + 0.125\cdot\left(0 e^{0^2-0} + 0.25\cdot e^{0.25^2-0}\right) = \\ \quad = 0.03125\cdot e^{0.25^2} = \underline{\underline{0.0332654\ldots}} \end{cases}$$

$$n=2 \begin{cases} x_2 = 0.25\cdot 2 = \underline{\underline{0.5}} \\ u_2 = y_1 + 0.25\cdot x_1 e^{x_1^2-y_1} = \\ \quad = 0.0332654\ldots + 0.25\cdot 0.25 e^{0.25^2 - 0.0332654\ldots} = \\ \quad = 0.0976195\ldots \\ y_2 = y_1 + 0.125\left(x_1 e^{x_1^2-y_1} + x_2 e^{x_2^2-u_2}\right) = \\ \quad = 0.0332654\ldots + 0.125\cdot\left(0.25\cdot e^{0.25^2-0.0332654\ldots} + \right. \\ \qquad\qquad \left. + 0.5\cdot e^{0.5^2-0.0976195\ldots}\right) = \\ \quad = \underline{\underline{0.1382302\ldots}} \end{cases}$$

(17)

$n=3$
$$\begin{cases} x_3 = 0.25\cdot 3 = \underline{\underline{0.75}} \\ u_3 = y_2 + 0.25\cdot x_2 e^{x_2^2 - y_2} = \\ \quad = 0.1382302\ldots + 0.25\cdot 0.5\cdot e^{0.5^2 - 0.1382302\ldots} = \\ \quad = 0.2780121\ldots \\ y_3 = y_2 + 0.125\left(x_2 e^{x_2^2 - y_2} + x_3 e^{x_3^2 - u_3}\right) = \\ \quad = 0.1382302\ldots + 0.125\left(0.5 e^{0.5^2 - 0.1382302\ldots} + \right. \\ \quad \left. + 0.75\cdot e^{0.75^2 - 0.2780121\ldots}\right) = \\ \quad = \underline{\underline{0.3327225\ldots}} \end{cases}$$

$n=4$
$$\begin{cases} x_4 = 0.25\cdot 4 = \underline{\underline{1}} \\ u_4 = y_3 + 0.25\cdot x_3 e^{x_3^2 - y_3} = \\ \quad = 0.3327225\ldots + 0.25\cdot 0.75\cdot e^{0.75^2 - 0.3327225\ldots} = \\ \quad = 0.5686575\ldots \\ y_4 = y_3 + 0.125\cdot\left(x_3 e^{x_3^2 - y_3} + x_4 e^{x_4^2 - u_4}\right) = \\ \quad = 0.3327225\ldots + 0.125\cdot\left(0.75\cdot e^{0.75^2 - 0.3327225\ldots} + \right. \\ \quad \left. + 1\cdot e^{1^2 - 0.5686575\ldots}\right) = \\ \quad = \underline{\underline{0.6431053\ldots}} \end{cases}$$

För att bestämma exakta felen behövs exakt lösning. Vi vet enligt ledtråd att ODE:n (*) är separabel: $\frac{dy}{dx} = xe^{x^2 - y} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int e^y\,dy = \int xe^{x^2}\,dx \Leftrightarrow e^y = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Men $y(0)=0 \implies e^0 = \frac{1}{2}e^{0^2} + C \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C = 1/2$

$$\Rightarrow e^{y} = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{y} = \frac{1}{2}(1+e^{x^2}) \Leftrightarrow$$ 18

$$\Leftrightarrow y(x) = \ln \frac{1}{2}(1+e^{x^2})$$

$$\Rightarrow e_0 = y(x_0) - y_0 = y(0) - y_0 = \ln \frac{1}{2}(1+e^{0^2}) - 0 =$$
$$= \ln \frac{1}{2}(1+1) = \ln 1 = \underline{0}$$ (tnvialt)

$$e_1 = y(x_1) - y_1 = y(0.25) - y_1 =$$
$$= \ln \frac{1}{2}(1+e^{0.25^2}) - 0.0332654\ldots =$$
$$= \underline{\underline{-0.0015272\ldots}}$$

$$e_2 = y(x_2) - y_2 = y(0.5) - y_2 =$$
$$= \ln \frac{1}{2}(1+e^{0.5^2}) - 0.1382302\ldots =$$
$$= \underline{\underline{-0.0054379\ldots}}$$

$$e_3 = y(x_3) - y_3 = y(0.75) - y_3 =$$
$$= \ln \frac{1}{2}(1+e^{0.75^2}) - 0.3327225\ldots =$$
$$= \underline{\underline{-0.0124324\ldots}}$$

$$e_4 = y(x_4) - y_4 = y(1) - y_4 =$$
$$= \ln \frac{1}{2}(1+e^{1^2}) - 0.6431053\ldots =$$
$$= \underline{\underline{-0.0229908\ldots}}$$