Mittuniversitetet

MID SWEDEN UNIVERSITY

Första exempeltentan 2010-01-07 kl. 12:15–14:00

Miniräknare: Ej symbolhanterande. Formelsamling: Tabeller och formler för NV- och TE-programmen; Formler och tabeller i fysik, matematik och kemi för gymnasieskolan; TEFYMA; eller Formler och tabeller (Natur och Kultur).

Lösningarna bör vara så pass fullständigt dokumenterade att en läsare kan följa alla moment utan att behöva fylla i saknade steg.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är: A 22p, B 18p, C 14p, D 10p, E 9p. (Max: 24p.) Aspektuppgiften markerad A kan höja betyget om den är löst tillräckligt väl.

Ok! **1.** Visa med hjälp av den formella definitionen av derivata (d.v.s. med ε–δ-formalism) att för $f(x) = 5x^2 - 3x$ så gäller $f'(a) = 10a - 3$. (2p)

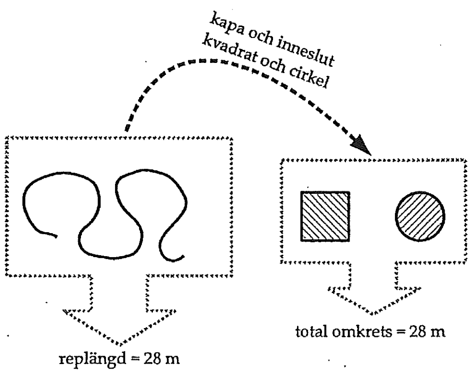
Ok! **2.** Bestäm integralerna nedan.

Ok! a) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$. (1p)

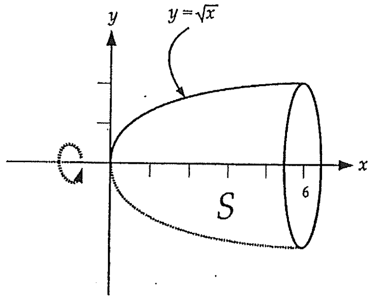
ok! b) $\int_3^6 \frac{2x}{x^3-2x^2-4x+8} \, dx$. (1p)

ok! c) $\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{x+1}} \, dx$. (1p)

Ok! **3.** Ett 28 m långt rep ska kapas i två delar så att den ena delen innesluter en kvadrat och den andra en cirkel. Hur ska repet kapas så att summan av kvadratens och cirkelns areor blir så liten som möjligt? (Ledtråd: Se Figur 1.) (3p)



Figur 1. Repet och ur denna inneslutna kvadraten och cirkeln i Uppgift 3.



Figur 2. Rotationsytan (med area S) i Uppgift 4.

ok! **4.** Bestäm arean S för den rotationsyta som bildas när man roterar $y=\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 6$, kring x-axeln. (Ledtråd: Se Figur 2.) (3p)

ok! **5.** Avgör huruvida serierna nedan konvergerar eller divergerar.

ok! a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$. (1p)

ok! b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\,\right)^n$. (2p)

ok! (Använd stora ordo!) **6.** Bestäm $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x-\arctan x)(e^{2x}-1)}{2x^2-1+\cos 2x}$. (Ledtråd: Använd Maclaurinserierna $\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, och $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.) (3p)

ok! **7.** Visa med induktion att $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \leqslant 2^{2n-1}$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$. (3p)

ok! **8.** Bestäm de allmänna lösningarna till differentialekvationerna nedan.

ok! a) $y' - 2xy - 2x^3 = 0$. (2p)

ok! b) $y' = \frac{y}{x+\sqrt{xy}}$ $(x>0)$. (Ledtråd: Detta är en "homogen" DE.) (2p)

Nej! ~~9~~. Formulera och bevisa Medelvärdessatsen för integraler.

LÖSNINGAR TILL FÖRSTA EXEMPELTENTAN

1. Ett sätt att definiera derivatan på är:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Med den formella gränsvärdesdefinitionen innebär detta att:

För varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att

(*) $$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \varepsilon .$$

I vårt fall har vi $f(x) = 5x^2 - 3x$ och vi ska verifiera att $f'(a) = 10a - 3$.

Det gäller att:

$$\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| = \left| \frac{(5x^2-3x)-(5a^2-3a)}{x-a} - (10a-3) \right| =$$

$$= \left| \frac{5(x^2-a^2)-3(x-a)}{x-a} - 10a + 3 \right| =$$

$$= \left| \frac{5(x+a)(x-a)-3(x-a)}{x-a} - 10a + 3 \right| =$$

$$= |5(x+a) - 3 - 10a + 3| = |5x - 5a| =$$

$$= 5|x-a|$$

Vi vill ju att $\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \varepsilon$

givet $\varepsilon > 0$, så $5|x-a| < \varepsilon$. Detta betyder $|x-a| < \varepsilon/5$. Välj $\delta = \varepsilon/5$. Då fås implikationen (*) på förra sidan. Vi drar slutsatsen att $f'(a) = 10a - 3$ stämmer. $\square$

---

2. a) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx = \int u \, dv \overset{\text{P.I.}}{=} uv - \int v \, du =$

$= [$ Låt $u = \ln x$, $dv = \sqrt{x}\, dx$
d.v.s. $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{2}{3} x^{3/2}] =$

$$= (\ln x) \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} - \int \frac{2}{3} x^{3/2} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{1/2} dx =$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + C =$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} \left(\ln x - \frac{2}{3} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

b) $$\int_3^6 \frac{2x}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} \, dx = (\dagger)$$

Vi måste först faktorisera nämnaren. Behöver ett nollställe till att börja med (gissa bland $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

Vi ser direkt att $0, \pm 1$ ej fungerar (p.g.a. 8). Låt oss testa $x = 2$:

$$2^3 - 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 8 = 8 - 8 - 8 + 8 = 0,$$

d.v.s. $x = 2$ nollställe till nämnaren.

Detta innebär att $x-2$ är faktor i nämnaren:

$$\begin{array}{l} \quad x^2 - 4 \\ \hline x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \;\big|\; x-2 \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline \quad -4x+8 \\ \quad -(-4x+8) \\ \hline \quad\quad 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x-2)(x^2-4) =$$
$$= (x-2)(x+2)(x-2) =$$
$$= (x-2)^2(x+2)$$

Vi kan då skriva:

$$(†) = \int_3^6 \frac{2x}{(x-2)^2(x+2)}\,dx \quad = \quad (*)$$

Partialbråksuppdela integranden:

$$\frac{2x}{(x-2)^2(x+2)} \overset{\text{ansätt}}{=} \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x+2) + B(x+2) + C(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)} =$$

$$= \frac{A(x^2-4) + B(x+2) + C(x^2-4x+4)}{(x-2)^2(x+2)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^2 + (B-4C)x + (-4A+2B+4C)}{(x-2)^2(x+2)}$$

Detta ger: $\begin{cases} A + C = 0 & (1) \\ B - 4C = 2 & (2) \\ -4A + 2B + 4C = 0 & (3) \end{cases}$

Ur (1) fås att $C = -A$, sätt in i (2, 3):

3

$$\begin{cases} B-4(-A)=2 \\ -4A+2B+4(-A)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B+8A = 2 & (4) \\ 2B-8A = 0 & (5) \end{cases}$$

Lägg ihop (4) & (5): $B+2B = 2+0 \Leftrightarrow B = 2/3$

$$\underset{(5)}{\Longrightarrow} 2\,\tfrac{2}{3}-8A=0 \Leftrightarrow A=\frac{4/3}{8}=\frac{1}{6} \Rightarrow C=-\frac{1}{6}$$

Vi får då integralen

$$(*) = \int_3^6 \left(\frac{1/6}{x-2} + \frac{2/3}{(x-2)^2} + \frac{-1/6}{x+2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\,\frac{1}{x-2} - \frac{1}{6}\ln|x+2| \right)\Big|_3^6 =$$

$$= \left(\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| - \frac{2}{3}\,\frac{1}{x-2} \right)\Big|_3^6 =$$

$$= \left(\frac{1}{6}\ln\frac{4}{8} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{6}\ln\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{1} \right) =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{4}{8}\Big/\frac{1}{5}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{1}{6}\ln\frac{5}{2} - \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{5}{2} + \frac{1}{2}$$

c) $$\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[\begin{cases} u=\sqrt{x+1} \Rightarrow x=u^2-1 \\ du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{dx}{2u} \end{cases}, \begin{cases} x=1 \Rightarrow u=\sqrt{2} \\ x=0 \Rightarrow u=1 \end{cases} \right] =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(u^2-1)+3}{u} \cdot 2u\,du = 2\int_1^{\sqrt{2}} (u^2+2)\,du =$$

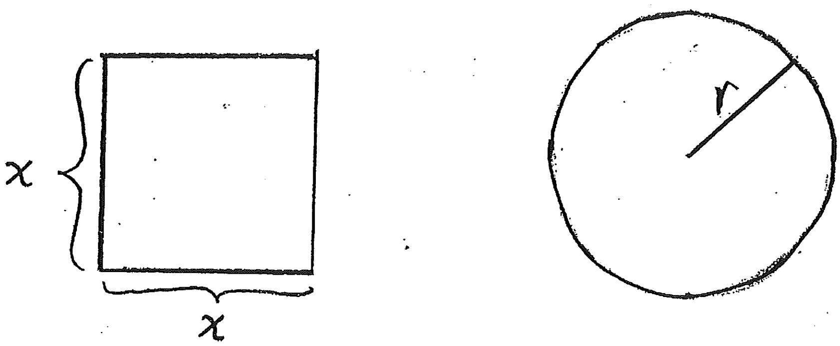
$$= 2\left(\frac{1}{3}u^3 + 2u \right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = 2\left[\left(\frac{1}{3}\cdot 2^{3/2} + 2\cdot 2^{1/2} \right) - \left(\frac{1}{3}+2 \right) \right] =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}2^{3/2} + 2^{3/2} - \frac{8}{3} \right) = 2\left(\frac{4}{3}\cdot 2\sqrt{2} - 2\,\frac{4}{3} \right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2(\sqrt{2}-1) = \frac{16}{3}(\sqrt{2}-1)$$

---

3. Vi ritar upp kvadraten och cirkeln och inför beteckningar:



$$\begin{cases} \text{Kvadratens omkrets} : & 4x \\ \text{Cirkelns omkrets} : & 2\pi r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Kvadratens area} : & x^2 \\ \text{Cirkelns area} : & \pi r^2 \end{cases}$$

Repet var 28 m vilket ger totala omkretsen 28 m, d.v.s.

$$4x + 2\pi r = 28$$

Så att

$$2x + \pi r = 14$$

d.v.s.

$$r = \frac{1}{\pi}(14-2x) =$$
$$= \frac{2}{\pi}(7-x) \qquad (*)$$

Den totala arean är

$$A = x^2 + \pi r^2 = [\text{använd } (*) \text{ ovan}] =$$
$$= x^2 + \pi\left(\frac{2}{\pi}(7-2x)\right)^2 =$$

5

$$= x^2 + \frac{4}{\pi}(7-2x)^2 = x^2 + \frac{4}{\pi}(49 - 28x + 4x^2)$$

Arean är alltså en funktion av kvadrat-sidlängden enligt

$$A(x) = x^2 + \frac{4}{\pi}\left(49 - 28x + 4x^2\right)$$

Definitionsmängden måste vara $D_A = [0, 7]$ ty $x = 0$ betyder att allt rep gått åt till cirkeln och $x = 7$ ($4x = 4 \cdot 7 = 28$) innebär att allt rep gått åt till kvadraten.

Vi har: $A'(x) = 2x + \frac{4}{\pi}(-28 + 8x) =$

$$= 2x + \frac{32}{\pi}x - \frac{112}{\pi} =$$

$$= 2\left(\left(1 + \frac{16}{\pi}\right)x - \frac{56}{\pi}\right)$$

Stationär punkt: $A'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{16}{\pi}\right)x - \frac{56}{\pi} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{56/\pi}{1 + \frac{16}{\pi}} = \frac{56}{\pi + 16}$$

Notera att $0 < \frac{56}{\pi+16} < \frac{56}{16} < \frac{56}{14} = 4 < 7$,

Så $\frac{56}{\pi+16} \in D_A$. $\left(\frac{56}{\pi+16} \approx 2.93 \text{ enl. mini-räknare}\right)$

Vet att minsta värde finns i ändpunkter eller i stationära punkter.

$$A(0) = 0^2 + \frac{4}{\pi}(7 - 2 \cdot 0)^2 = \frac{4}{\pi} \cdot 49 = \frac{196}{\pi}$$

$$A(7) = 7^2 + \frac{4}{\pi}(7 - 2 \cdot 7)^2 = 49 + \frac{4}{\pi} \cdot 49 =$$

$$= 49(1 + 4/\pi) > A(0)$$

$$A\left(\frac{56}{\pi+16}\right) = \left(\frac{56}{\pi+16}\right)^2 + \frac{4}{\pi}\left(7 - 2\frac{56}{\pi+16}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{56}{\pi+16}\right)^2 + \frac{4}{\pi}\left(\frac{7(\pi+16)-112}{\pi+16}\right)^2 =$$

$$= \frac{3136 + \frac{4}{\pi}(7\pi + 112 - 112)^2}{(\pi+16)^2} =$$

$$= \frac{3136 + 196/\pi}{(\pi+16)^2} \qquad (\dagger)$$

Vi vet att $A(0) = \frac{196}{\pi} > \frac{196}{4} = 49$. Vi har

$$\frac{3136 + 196/\pi}{(\pi+16)^2} < \frac{3136 + 196/\pi}{16^2} < \frac{3136 + 196/2}{16^2} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(196 + \frac{49}{8}\right) < \frac{1}{16}\left(196 + \frac{64}{8}\right) =$$

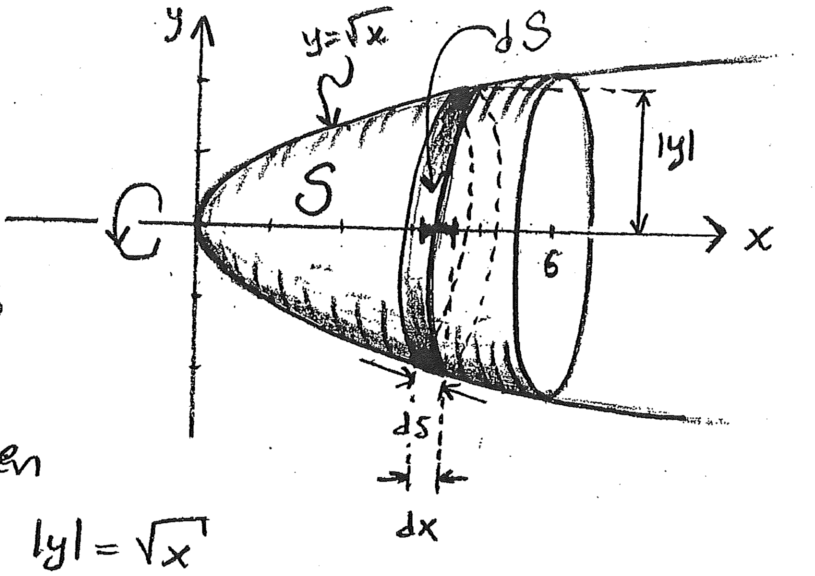
$$= \frac{1}{16}(196 + 8) = \frac{204}{16} = \frac{51}{4} <$$

$$< \frac{52}{4} = 13 < 49 \underbrace{<}_{\text{enl. ovan}} A(0)$$

Det gäller alltså att $(\dagger)$ är minsta arean, d.v.s. man ska kapa repet $4 \cdot \frac{56}{\pi+16}$ från ena änden och göra en kvadrat av denna första del och av den andra delen ska man göra en cirkel.

(Notera: Självklart kan man slå in alla värden på en miniräknare:
$$\begin{cases} A(0) \approx 62.4 \\ A(7) \approx 111.4 \\ A\left(\frac{56}{\pi+16}\right) \approx 8.7 \quad \text{(minst)} \end{cases}$$
vilket ger samma slutsats som förut.)

4. Figur:



Betrakta ett band med bredd dx i x-led. Detta band är en ring med radien $|y|=\sqrt{x}$ och bredden ds längs ytan. Då blir bandets area $dS = \underbrace{2\pi|y|}_{\text{omkrets}} \cdot \underbrace{ds}_{\text{bredd (längs ytan)}}$, d.v.s.

$$S = \int_{x=0}^{x=6} dS = \int_{x=0}^{x=6} 2\pi|y|\,ds = 2\pi\int_0 \sqrt{x}\underbrace{\sqrt{1+(y')^2}dx}_{\substack{ds \\ \text{(det vanliga} \\ \text{uttrycket)}}}$$

$$= 2\pi\int_0^6 \sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_0^6 \sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_0^6 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx = 2\pi\int_0^6 \sqrt{x+1/4}\,dx =$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right)\Big|_0^6 = 2\pi\,\frac{2}{3}\left(\left(6+\frac{1}{4}\right)^{3/2}+\left(\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\left(\frac{25}{4}\right)^{3/2}+\left(\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right) = \frac{4\pi}{3}\left(\left(\frac{5}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{125+1}{8}\right) = \frac{\pi}{6}\cdot 126 = 21\pi \qquad (\approx 66.0)$$

5. a) Vi prövar kvotkriteriet med $a_n = n^2/e^n$:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2/e^{n+1}}{n^2/e^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{e^n}{e^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{e} =$$

$$= (1+0)^2 \frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Longrightarrow$ Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$ konvergerar

b) Vi prövar rotkriteriet med $a_n = (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^n$:

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \left[\begin{matrix}\text{Förläng} \\ \text{m. konj.}\end{matrix}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} =$$

$$= 0 < 1$$

$\Longrightarrow$ Serien $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^n$ konvergerar

6. $$\lim_{x\to 0} \frac{(x-\arctan x)(e^{2x}-1)}{2x^2-1+\cos 2x} = [\text{serierna i ledtråd}] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x-\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\dots\right)\right)\left(\left(1+2x+\frac{1}{2}(2x)^2+\dots\right)-1\right)}{2x^2-1+\left(1-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{24}(2x)^4-\dots\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5+\dots\right)\left(2x+2x^2+\dots\right)}{2x^2-2x^2+\frac{2}{3}x^4-\dots} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^4+\dots}{\frac{2}{3}x^4+\dots} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{2}{3}x^4+\dots\right)/x^4}{\left(\frac{2}{3}x^4+\dots\right)/x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}+\dots}{\frac{2}{3}+\dots} = \frac{\frac{2}{3}+0}{\frac{2}{3}+0} = 1$$

(Notera: Med "..." menas en potensserie med termer av högre ordning.)

---

7. $VL_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, $HL_n = 2^{2n-1}$ $\quad (n \in \mathbb{Z}_+)$

Ska alltså visa $VL_n \leq HL_n \;\; \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

- Startsteg $n=1$:

$$\begin{cases} VL_1 = \dfrac{(2\cdot 1)!}{(1!)^2} = \dfrac{2!}{1^2} = \dfrac{2}{1} = 2 \\ HL_1 = 2^{2\cdot 1-1} = 2^{2-1} = 2^1 = 2 \end{cases}$$

d.v.s. $VL_1 = HL_1$, ok (verifierat)

- Induktionssteg: Ska visa att

(*) $\quad VL_p \le HL_p \Rightarrow VL_{p+1} \le HL_{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+$

Antag därför att $VL_p \le HL_p$. Vi får:

$$VL_{p+1} = \frac{(2(p+1))!}{((p+1)!)^2} = \frac{(2p+2)!}{((p+1)!)^2} =$$

$$= \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{((p+1)(p!))^2} =$$

$$= \frac{2(p+1)\cdot 2(p+1/2)\cdot (2p)!}{(p+1)^2 (p!)^2} =$$

$$= 4\,\frac{p+1/2}{p+1}\,\frac{(2p)!}{(p!)^2} = 4\,\frac{p+1/2}{p+1}\,VL_p \overset{(*)}{\le}$$

$$\le 4\,\frac{p+1/2}{p+1}\,HL_p = 4\,\frac{p+1/2}{p+1}\,2^{2p-1} =$$

$$= 2^2\,\frac{p+1/2}{p+1}\,2^{2p-1} = \frac{p+1/2}{p+1}\,2^{2p+2-1} =$$

$$= \frac{p+1/2}{p+1}\,2^{2(p+1)-1} = \frac{p+1/2}{p+1}\,HL_{p+1} <$$

$$< \frac{p+1}{p+1}\,HL_{p+1} = HL_{p+1}, \quad \text{ok}$$

d.v.s. induktionssteget verifierat.

Induktionsprincipen ger att $VL_n \le HL_n$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$. $\square$

8. a) $y' - 2xy - 2x^3 = 0 \Leftrightarrow y' - 2xy = 2x^3$

Detta är en linjär första ordningens (inhomogena) DE. Därför kan man använda t.ex. integrerande faktor e^{μ}.

Vi har $\mu = \int (-2x)\,dx = -x^2$, vilket ger

$$e^{\mu}(y' - 2xy) = e^{\mu} \cdot 2x^3$$

$$e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2} = 2x^3 e^{-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}y\right) = 2x^3 e^{-x^2}$$

$$e^{-x^2}y = \int 2x^3 e^{-x^2}\,dx =$$

$$= \int u\,dv \overset{P.I.}{=} uv - \int v\,du =$$

$$= \left[\text{Låt } u = x^2,\ dv = 2xe^{-x^2}dx \text{ d.v.s. } du = 2x\,dx,\ v = -e^{-x^2}\right] =$$

$$= x^2(-e^{-x^2}) - \int (-e^{-x^2})2x\,dx =$$

$$= -x^2 e^{-x^2} - \int (-2x)e^{-x^2}\,dx =$$

$$= -x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

d.v.s. $$y = e^{x^2}\left(-x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + C\right) =$$

$$= Ce^{x^2} - x^2 - 1$$

b) Enligt ledtråden är det en "homogen" DE, d.v.s. $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ f.n. fkn. f. Vi har:

$$y' = \frac{y}{x+\sqrt{xy}} = \frac{y/x}{(x+\sqrt{xy})/x} = [x>0] =$$

$$= \frac{y/x}{1+\sqrt{y/x}}$$

vilket bekräftar "homogeniteten" $\left(f(t) = \frac{t}{1+\sqrt{t}}\right)$.

Ansätt $v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = xv$. Derivera detta:

$$y' = 1\cdot v + x\cdot v' = v + xv'$$

Då fås

$$v + xv' = \frac{v}{1+\sqrt{v}} \qquad (x, v > 0)$$

$$xv' = \frac{v}{1+\sqrt{v}} - v = \frac{v - v(1+\sqrt{v})}{1+\sqrt{v}} =$$

$$= \frac{-v\sqrt{v}}{1+\sqrt{v}} \quad \text{, separabel}$$

d.v.s.

$$\int \frac{1+\sqrt{v}}{v\sqrt{v}}\,dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int (v^{-3/2} + v^{-1})\,dv = C - \ln x, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$-2v^{-1/2} + \ln v = C - \ln x$$

$$-2(y/x)^{-1/2} + \ln\frac{y}{x} = C - \ln x$$

$$-2\sqrt{x/y} + \ln y = C$$

$$-2\sqrt{x} + \sqrt{y}\ln y = C\sqrt{y}$$

$$\sqrt{y}(\ln y - C) = 2\sqrt{x} \qquad (*)$$

Vi kan ej lösa ut $y = y(x)$ utan nöjer oss med $(*)$.

A. Se Föreläsning 5 s. 11ff.

Errata för Första exempeltentan

(Reviderad 2010-01-11)

- I lösningen till uppg. 2 b) längst upp på sid. 4 ska det stå

$$2B+8A = 4 \text{ och inte } B+8A = 2 \ .$$

Detta innebär (visar det sig) att $A = 1/4$, $B = 1$ och $C = -1/4$. Då blir integralen till slut

$$\frac{1}{4}\ln\frac{5}{2} + \frac{3}{4}$$

- I lösningen till uppg. 2 c) ska det längst ned på sid. 4 stå

$$2\left(\frac{1}{3}2^{3/2}+2^{3/2}-\frac{7}{3}\right) \text{ och inte } 2\left(\frac{1}{3}2^{3/2}+2^{3/2}-\frac{8}{3}\right) \ ;$$

då blir integralen till slut $\frac{2}{3}(2^{7/2}-7)$.

- I lösningen till uppg. 3 ska det längst ned på sid. 5 stå

$$x^2+\pi\left(\frac{2}{\pi}(7-x)\right)^2 \text{ och inte } x^2+\pi\left(\frac{2}{\pi}(7-2x)\right)^2 \ .$$

Detta ger alltså areafunktionen

$$A(x)=x^2+\frac{4}{\pi}(49-14x+x^2) \ ,$$

d.v.s.

$$A'(x)=2\left((1+\frac{4}{\pi})x-\frac{28}{\pi}\right) \ ,$$

så att stationär punkt blir $x = \frac{28}{\pi + 4}$ (≈ 3.92). Längst ned på sid. 6 så får $A(7)$ värdet 49 vilket är mindre än $A(0) = 196/\pi \approx 62.4$. Det visar sig att

$$A\left(\frac{28}{\pi+4}\right) = \frac{784 + 196/\pi}{(\pi+4)^2}$$

vilket är ungefär 16.6, vilket är mindre än $A(7) = 49$. Man ska alltså kapa repet enligt $x = \frac{28}{\pi+4}$ och inte enligt det som står på sid. 7.

- I lösningen till uppg. 4 har jag på tredje raden nedifrån på sid. 8 felaktigt skrivit

$$2\pi\frac{2}{3}\left((6+\frac{1}{4})^{3/2} + (\frac{1}{4})^{3/2}\right)$$

vilket förstås skall vara

$$2\pi\frac{2}{3}\left((6+\frac{1}{4})^{3/2} - (\frac{1}{4})^{3/2}\right)$$

med minustecken istf. plustecken. Detta innebär i sin tur att det på sista raden på sid. 8 ska stå

$$\frac{4\pi}{3}\left(\frac{125-1}{8}\right) = \frac{\pi}{6}\cdot 124 = \frac{62\pi}{3} \qquad (\approx 64.9).$$

- I lösningen till uppg. 8 a) står det på näst sista raden på sid. 12

$$y = e^{-x^2}\left(-x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + C\right) \;;$$

detta ska förstås vara

$$y = e^{x^2}\left(-x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + C\right)$$

i enlighet med vad som står på sista raden.