

①

Föreläsning 1Reella talTal som kan skrivas
på decimalform, t.ex.

$$7 = 7.0000\dots$$

$$-4/5 = -0.8000\dots$$

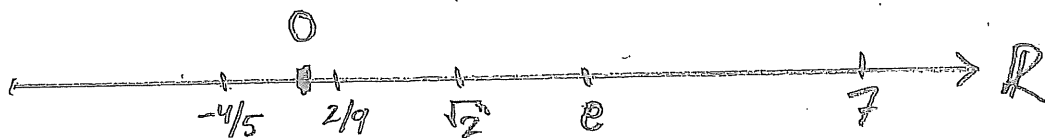
$$2/9 = 0.2222\dots$$

$$\sqrt{2} = 1.4142\dots$$

$$e = 2.7182\dots$$

Beteckning: $\mathbb{R}$ (reell)

Kan representeras geometriskt:

En s.k. tallinje.Några delmängder av $\mathbb{R}$:• Naturliga tal: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ (naturlig)• Heltal: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ (Zahl)• Rationella tal: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ men } n \neq 0 \right\}$
(Quotient)

- Irrationella tal: $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (icke-luster) ②

Skrivsätt för rationella tal:

- Avslutat decimalbråk: $\frac{1}{8} = 0.125000... = 0.125$

- Periodiskt decimalbråk: $\frac{17}{99} = 0.171717... = 0.\overline{17}$

Konvertera från decimalform till kvotform:

$1.35135135135...$ är rationellt
(och kan skrivas $1.35\overline{135}$)

$$x = 1.35135135...$$

$$\Rightarrow 1000x = 1351.35135...$$

$$\Rightarrow 1000x - x = 1351.35135... - 1.35135... = 1350$$

$$\Rightarrow 999x = 1350$$

$$x = \frac{1350}{999} = \frac{50 \cdot 27}{37 \cdot 27} = \frac{50}{37}$$



Intervall: Delmängd av $\mathbb{R}$ som innehåller minst två tal och som innehåller alla reella tal mellan vilka par av element som helst.

③ Det finns tre typer av ändliga intervall:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \text{öppet}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad \text{slutet}$$

Dessutom oändliga intervall:

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

Olikheter: Vill lösa t.ex. olikheten

$$\frac{4}{x+1} \leq 3$$

Lösning:

$$\frac{4}{x+1} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4 - 3(x+1)}{x+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 3x}{x+1} \leq 0$$

Sätt upp teckentabell:

x	-1	1/3
1-3x	+++++0-----	
x+1	---0+++++	
(1-3x)/(x+1)	---0+++++	

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$$



Notera: $\cup$ kallas "union", d.v.s. ovan betyder att $x \in (-\infty, -1)$ eller $x \in [0, \infty)$.

Dessutom: $\cap$ "snitt", d.v.s.

$x \in I_1 \cap I_2$ betyder att $x \in I_1$ och $x \in I_2$

(T.ex. $(0, 2) \cap (1, 3) = (1, 2)$.)

Absolutbelopp: Def. $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Exempel: Lös $|5x + 2| \leq 3$

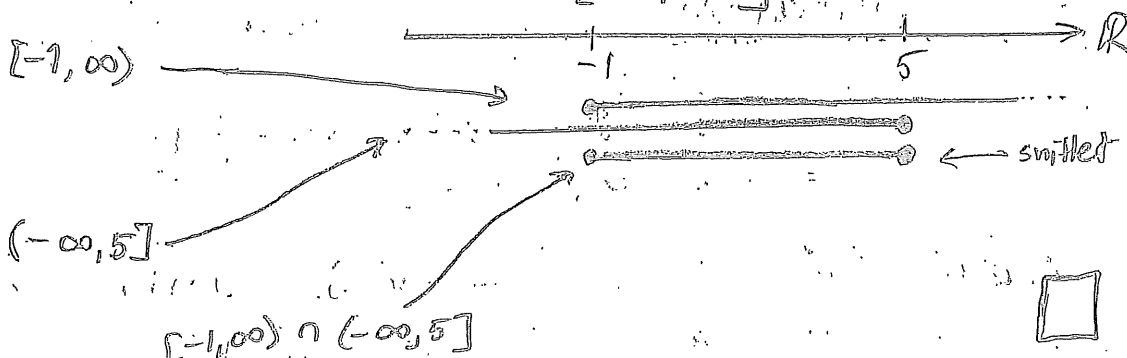
Man får: $-3 \leq 5x + 2 \leq 3$

$$-3 \leq 5x + 2 \quad \text{och} \quad 5x + 2 \leq 3$$

$$-5 \leq 5x \quad \text{och} \quad 5x \leq 1$$

$$-1 \leq x \quad \text{och} \quad x \leq 5$$

$$\Leftrightarrow x \in [-1, \infty) \cap (-\infty, 5] = [-1, 5]$$



⑤ Fullständighet Terminologi enligt:

Definition: Låt S icke-tom delmängd av $\mathbb{R}$.

- u övre begränsning till S om
 $x \leq u$ för alla $x \in S$
- u^* minsta övre begränsning till S om
 $u^* \leq u$ för alla övre begränsningar
 u till S (u^* övre begr.)
- l undre begränsning till S om
 $l \leq x$ för alla $x \in S$
- l^* största undre begränsning till S
om $l \leq l^*$ för alla undre
begränsningar l till S (l^* undre begr.)

u^* : supremum till S , $\sup S$

l^* : infimum till S , $\inf S$

Fullständighetsaxiomet Antag S icke-tom delmängd av $\mathbb{R}$

Dd: "Om S har övre begränsning
så existerar $\sup S$

(kallas även "Axiomet om minsta övre begränsning",
men håller ekvivalent även för inf.)

Axiomet garanterar att den reella tal-
tallingen saknar "hål".

Notera: Ett axiom är en sats som
helt enkelt accepteras som sanning.

Funktionsgränsvärden

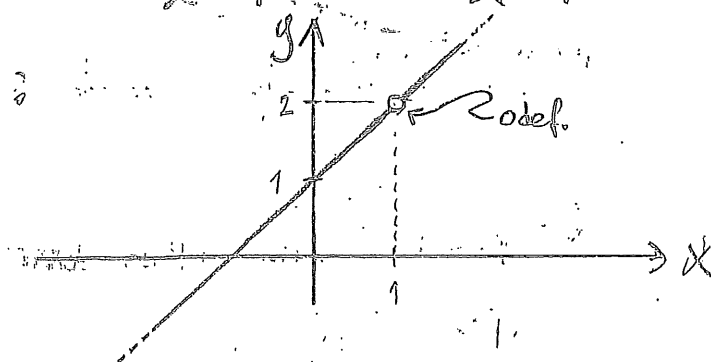
Betrakta $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Kan g

dividera med 0 så f odef. för $x=1$.

Vad händer nära $x=1$?

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

Rita grafen:



Då x närmar sig 1 så närmar sig $f(x)$
värdet 2. Man säger att $f(x)$ har
gränsvärdet 2 då x går mot 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad (*)$$

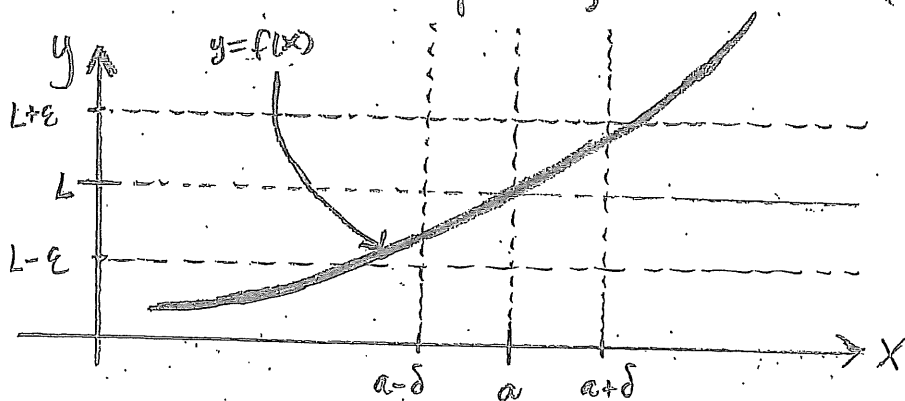
⑦ Formell definition: Vi säger att $f(x)$ går mot gränzen L då x går mot a , skrivet

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Om följande uppfylls:

För varje $\varepsilon > 0$ så finns $\delta > 0$ sådant att om $0 < |x-a| < \delta$ så gäller $|f(x)-L| < \varepsilon$.

OBS: δ kan bero på ε , d.v.s. $\delta = \delta(\varepsilon)$



Exempel: Verifiera m.h.a. definitionen att

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \quad (\text{d.v.s. } (*))$$

Lösning: Här: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \stackrel{x \neq 1}{=} x+1$, $a=1$, $L=2$

$$\Rightarrow |f(x)-L| = |(x+1)-2| = |x-1|$$

Vill få detta $< \varepsilon$

$$\text{Men } |x-a| = |x-1|$$

Om $\delta = \varepsilon$ väljs (t.ex.) så

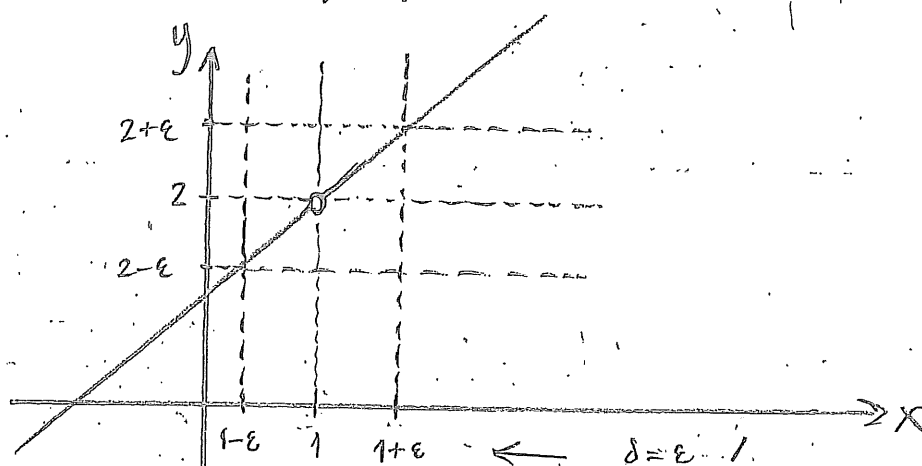
gäller: uppenbarligen

$$0 < |x-1| < \delta \quad (= \epsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x^2-1}{x+1} - 2 \right| < \epsilon$$

vilket innebär

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x+1} = 2$$



Svårare exempel:

$$\text{Visa } \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$$

Lösning: I detta fall två metoder:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad |f(x) - L| &= |x^2 - 1| = |(x+1)(x-1)| = \\ &= |(x-1) + 2| |x-1| \leq [\text{Triangelolikhet}] \\ &= (|x-1| + |2|) |x-1| = \\ &= |x-1|^2 + 2|x-1| \end{aligned}$$

Detta är $< \epsilon$ om $0 < |x-1| < \delta$
där δ väljs t.ex. så att

$$\delta^2 + 2\delta = \epsilon$$

$$\delta^2 + 2\delta - \epsilon = 0$$

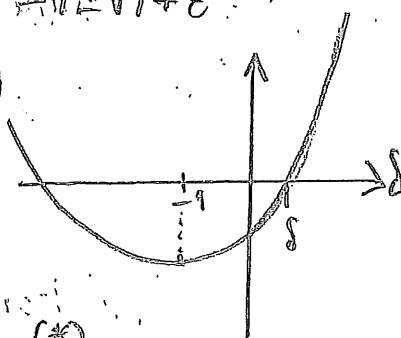
Lös

$$\delta^2 + 2\delta - \epsilon = 0$$

9

$$\delta = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 - (-\epsilon)} = -1 \pm \sqrt{1+\epsilon}$$

Positiv lösning: $\delta = \sqrt{1+\epsilon} - 1$



② $|f(x) - L| = \dots = (|x-1|+2)|x-1|$

Antag först att $\delta \leq 1$

$$\Rightarrow |x-1|+2 < \delta+2 \leq 1+2 = 3$$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < 3|x-1| \quad (*)$$

Detta $< \epsilon$ överskras. Välj nu

$$\delta = \min \{1, \epsilon/3\}$$

(1 p.g.a. (*),
 $\epsilon/3$ p.g.a. (**))

$$\Rightarrow |f(x) - L| < 3 \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$



Högergränsvärde: Vi säger att $f(x)$ har högergränsvärde L i $x=a$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$$

om följande uppfylls:

För varje $\epsilon > 0$ så finns $\delta > 0$ sådant att om $a < x < a+\delta$ så gäller $|f(x) - L| < \epsilon$

(Motsträrande definition för vänstergrensvärde.)

Gränsvärde i oändligheten: Vi säger att $f(x)$ går mot gränsen L då x går mot ∞ ,

skrivet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

om följande uppfylls:

För varje $\varepsilon > 0$ så finns $R > 0$

sådant att om $x > R$ så gäller

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

(Motsvarande för gränsvärde i $-\infty$)

Oändliga gränsvärden: Vi säger att $f(x)$ går mot ∞ då x går mot a , skrivet

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

om följande uppfylls:

För varje $B > 0$ så finns $\delta > 0$

sådant att om $0 < |x - a| < \delta$

så gäller $f(x) > B$

(Motsvarande för $-\infty$ gränsvärden)

Några gränsvärdesatser:

Sats: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$

Sats: Antag $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = M$
Då gäller följande:

III

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = LM$
(om $f(x) = k$ så fås gräns kM)
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ om $M \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{m/n} = L^{m/n}$ där $L > 0$
om n jämn, $L \neq 0$ om $m < 0$
- Om $f(x) \leq g(x)$ på intervall innehållande a (ej ändpunkt) så $L \leq M$

(motsvarande gäller även för höger- och vänstergränsvärden)

Sats:

- Om $P(x)$ polynom och $a \in \mathbb{R}$
så gäller $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$

- Om $P(x), Q(x)$ polynom där $Q(a) \neq 0$
så gäller $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$
(motsv. f. höger- & vänstergr. v.)

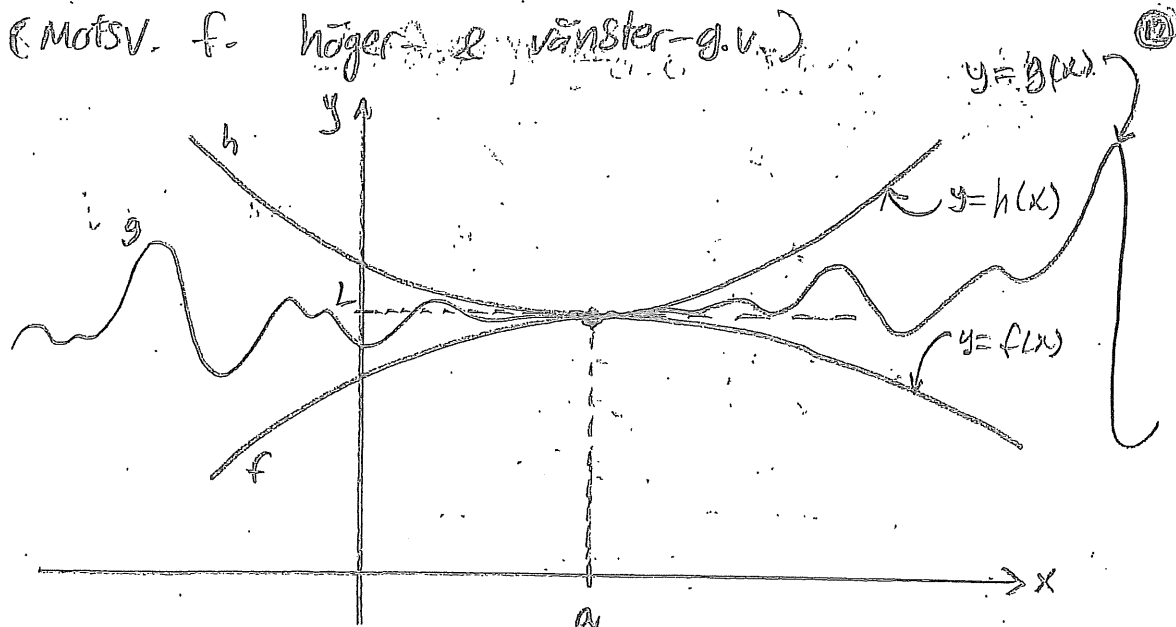
Insättningsatsen:

Antag $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ för alla x i ett öppet intervall innehållande a (utan möjligen a självt), samt antag att

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

Då gäller också $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

(Motsv. f. höger- & vänster-g.v.)



Exempel: Antag $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$.

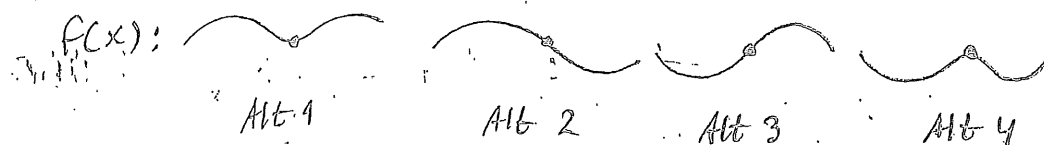
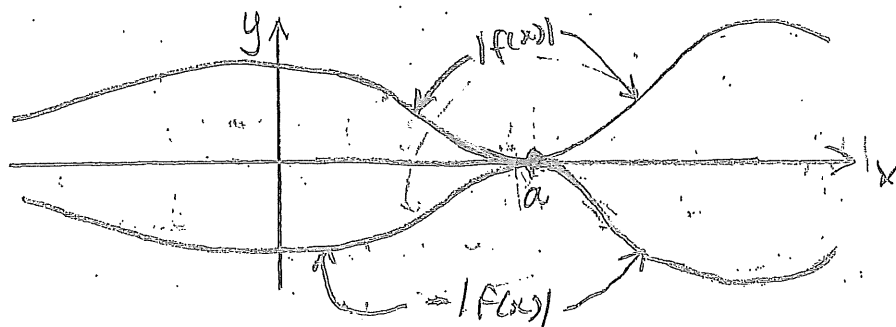
Visa $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

Lösning: Vi har $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

Eftersom $\lim_{x \rightarrow a} (-|f(x)|) = -\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$

och $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$

så ger instängningsatsen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ $\square$



13

Några jämna övningsuppgifter

p. 1:26

$$\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$$

Ska lösas

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+5}{(x+1)(x-1)} < 0$$

Teckentabell:

abel:	x	-5	-1	1
$x+5$	-	-	0	+
$x+1$	-	-	-	0
$x-1$	-	-	-	-
$(x+5)/(x-1)(x+1)$	-	-	-	0

d.v.s.

$$x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 1)$$



1.5:8

Vill ha implikationen

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$$

$$\text{Här: } |x-3| < \delta \Rightarrow |\sqrt{2x+3}-3| < 0.01$$

$$= 0.01 < \sqrt{2x+3}-3 < 0.01$$

$$2.99 < \sqrt{2x+3} < 3.01$$

$$8.9401 < 2x+3 < 9.0601$$

$$-0.0599 < 2x-6 < 0.0601$$

$$-0.02995 < x-3 < 0.03005$$

Detta uppfylls om $-0.02995 < x-3 < 0.02995$ 19

$$\Leftrightarrow |x-3| < 0.02995$$

Vi väljer därför $\boxed{\delta = 0.02995}$

(Vilket $0 < \delta \leq 0.02995$ som helst funkar.)



1.5:20

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$$

$$\text{Visa: } |x-2| < \delta \Rightarrow |x^3-8| < \epsilon$$

Måste faktorisera ut $x-2$ ur x^3-8 .

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} x^2+2x+4 \\ x^3-8 \quad \overline{) \quad} \quad x-2 \\ -x^2(x-2) \\ \hline 2x^2-8 \\ -2x(x-2) \\ \hline 4x-16 \\ -4(x-2) \\ \hline 0 \end{array}$$

← jämnt ut!
(ingen rest)

$$\Rightarrow x^3-8 = (x^2+2x+4)(x-2)$$

$$|x^3-8| = |x^2+2x+4||x-2| =$$

$$= |(x-2)^2+6x||x-2| =$$

$$= |(x-2)^2+6(x-2)+12||x-2| \leq$$

$$\leq (|x-2|^2+6|x-2|+12)|x-2|$$

Triangel-
olikh.

$$\text{Välj } \delta \leq 1 \Rightarrow |x-2| < \delta \text{ implicerar}$$

$$|x-2|^2+6|x-2|+12 < 1+6+12 = 19$$

15

d.v.s. $|x^2-8| < 19|x-2|$

Välj $\delta = \min\{1, \varepsilon/19\}$, då är

$$|x^2-8| < 19 \frac{\varepsilon}{19} = \varepsilon \quad \square$$

(Notera: Om $\delta=1$, d.v.s. $1 \leq \varepsilon/19 \Rightarrow \varepsilon \geq 19$

så gäller $|x^2-8| < 19 \cdot 1 = 19 = \varepsilon$,
faktiskt alltså.)

1.2:30

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x+1}$$

Faktoriser ut $x+1$ ur x^3+1 :

$$\begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ \hline x^3 + 1 \quad \boxed{x+1} \\ -x^2(x+1) \\ \hline -x^2 + 1 \\ -(-x)(x+1) \\ \hline x+1 \\ -1 \cdot (x+1) \\ \hline 0 \end{array}$$

← jämnt ut!
(ingen rest)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2-x+1)(x+1)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (x^2-x+1) = (-1)^2 - (-1) + 1 = 3 \quad \square$$

1.2:74

$$\sqrt{5-2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5-x^2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{5-2x^2} = \sqrt{5-2 \cdot 0^2} = \sqrt{5}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{5-x^2} = \sqrt{5-0^2} = \sqrt{5}$$

Enligt instängningssatsen fås nu att ⑩

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$



1.3:28 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(x-1) - x^2(x+1)}{(x+1)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 - x^3 - x^2}{x^2 - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{x^2 - 1} = -2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 - x^2} =$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2/x^2}{(x^2 - 1)/x^2} =$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - 1/x^2} =$$

$$= -2 \frac{1}{1 - 0} = \underline{\underline{-2}} \quad \square$$

Se även RÖ 1 & 2 HT09 där jag löst bl.a.

1.5:18, 1.5:24, 1.5:28,

1.2:36, 1.2:58, 1.3:16:

(+ några till som inte rekommenderats
i denna kurs men relevanta ändå)

Lösningar till dessa återfinns också nedan.

17

1.5:18 Visa $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$ m. formell def.

Lösning: Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. För $x \neq -1$:

$$\left| \frac{x+1}{x^2-1} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} + \frac{1}{2} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2 + (x-1)}{2(x-1)} \right| = \frac{1}{2} \frac{|x+1|}{|x-1|} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \frac{1}{|x-1|} \right) |x-(-1)|$$

Välj $\delta \leq 1$. Att $0 < |x-(-1)| < \delta \leq 1$ betyder

$-2 < x < 0$, vilket ger $-3 < x-1 < -1$

så att $|x-1| > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|x-1|} < \frac{1}{1} = 1$

$$\Rightarrow \left| \frac{x+1}{x^2-1} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| < \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \right) |x-(-1)| =$$

$$= \frac{1}{2} |x-(-1)|$$

Detta ska vara mindre än ε ,

vilket fungerar om vi väljer $\frac{1}{2}\delta < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\delta < 2\varepsilon$, ty $\frac{1}{2}|x-(-1)| < \frac{1}{2}\delta < \frac{1}{2}2\varepsilon = \varepsilon$.

Välj därför $\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}$. Då fås:

$$0 < |x-(-1)| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x+1}{x^2-1} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| < \varepsilon$$

$$\text{d.v.s. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$$

1.5:24 Formell definition på $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. ⁽¹⁸⁾

Detta är en kombination av gränsvärde i oändligheten och oändligt "gränsvärde". Vi får:

För varje $B > 0$ finns $R > 0$ s.a.
om $x > R$ så är $f(x) > B$.

1.5:28 Bvisa $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$

Lösning: Givet $B > 0$ så ska vi visa
att det finns $\delta > 0$ så att

$$1 - \delta < x < 1 \Rightarrow \frac{1}{x-1} < -B \quad (*)$$

$$\text{Men } \frac{1}{x-1} < -B \Leftrightarrow [x-1 < 0] \quad 1 > -B(x-1)$$

$$\Leftrightarrow [-B < 0] \quad -\frac{1}{B} < x-1$$

$$\text{d.v.s.} \quad -\frac{1}{B} < x-1 < 0$$

$$1 - \frac{1}{B} < x < 1$$

Detta fås om vi väljer $\delta = 1/B$, d.v.s.
med detta val gäller implikationen (*).

(19)

1.2:36 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|3x-1| - |3x+1|}{x} = [\text{Förläng m. konj.}] =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(13x-1| - |3x+1|)(13x-1| + |3x+1|)}{x(13x-1| + |3x+1|)} =$$

$[|a|^2 = a^2]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x-1)^2 - (3x+1)^2}{x(13x-1| + |3x+1|)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2 - 6x + 1 - 9x^2 - 6x - 1}{x(13x-1| + |3x+1|)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-12x}{x(13x-1| + |3x+1|)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-12}{13x-1| + |3x+1|} = \frac{-12}{1+1} = -6$$

1.2:58 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{|x-a|}{x^2-a^2} = [x > a \Rightarrow |x-a| = x-a] =$

$$= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{x-a}{x^2-a^2} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{x-a}{(x+a)(x-a)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{a+a} = \frac{1}{2a}$$

1.3:16 $\lim_{x \rightarrow -2/5} \frac{2x+5}{5x+2} = \lim_{x \rightarrow -2/5} \frac{2x+5}{5(x+2/5)}$

Vänstergränsvärde: $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{5}-} \frac{2x+5}{5(x+2/5)} = -\infty$

$$\text{ty } 2(-\frac{2}{5}) + 5 = -\frac{4}{5} + \frac{25}{5} = \frac{21}{5} > 0$$

$$\text{och } x + \frac{2}{5} < 0 \text{ om } x < -\frac{2}{5}$$

$$\text{Högergränsvärde: } \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{5}^+} \frac{2x+5}{5(x+\frac{2}{5})} = \infty$$

$$\text{ty täljaren } > 0 \text{ (igen) men}$$

$$x + \frac{2}{5} > 0 \text{ om } x > -\frac{2}{5}$$

Olika vänster- och högergränsvärden

$\Rightarrow$ Inget (oändligt) gränsvärde finns.