

①

Föreläsning 10

Oändliga serier

(eller helt enkelt "serie")

En (oändlig) serie är summa med oändligt antal termer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad (*)$$

(Kan börja vid vilket index som helst, inte bara $n=1$.)

I princip beror resultatet i (*) på i vilken ordning man summerar termerna. En entydig ordning är följande.

Inför $\{s_n\}$, den s.k. delsummeföljden av delsummor:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

Så att $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$. Varje term i följden är välfördefinierad.

Definition: Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sägs konvergera mot S , d.v.s. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, om

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$ där s_n är den n te delsumman till $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ enligt ovan.

②
Serien divergerar i annat fall (div. mot $-\infty$,
div. mot ∞ eller helt enkelt diverger).

Geometrisk serie:

En serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ där $a_n = ar^{n-1}$ kallas

för en geometrisk serie. uttrycka:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

Talet r kallas för seriens kvot ty

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{(n+1)-1}}{ar^{n-1}} = r$$

d.v.s. faktor med vilken termerna ökar i varje steg.

Vi vet att nite delsumman är

$$S_n = \sum_{j=1}^n ar^{j-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

(Följer ur (d) i satsen på sid. 2 i Föreläsning-2.)

Sats: För den geometriska serien gäller att

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \begin{cases} \text{konv. mot } 0 & \text{om } a=0 & (1) \\ \text{konv. mot } \frac{a}{1-r} & \text{om } |r| < 1 & (2) \\ \text{div. mot } \infty & \text{om } r \geq 1, a > 0 & (3) \\ \text{div. mot } -\infty & \text{om } r \geq 1, a < 0 & (4) \\ \text{div. mot } \infty & \text{om } r \leq -1, a \neq 0 & (5) \end{cases}$$

③

Bem: (1): Öppenbart ty $s_n = 0 \quad \forall n$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$$

(2): $|r| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-r}$$

(3): $r > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty \quad \text{ty } a > 0$$

$$r = 1 \Rightarrow a_n = a \quad \forall n \Rightarrow s_n = na$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty \quad \text{ty } a > 0$$

(4): Som (3) men $a < 0$ ger $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

(5): $r \leq -1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ finns ej (alternande)

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{ finns ej,}$$

d.v.s. divergent.



Exempel:

$$0.\bar{3} = 0.3333... = [\text{Per definition}] =$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots =$$

$$= \frac{3}{10} \left(\left(\frac{1}{10} \right)^0 + \left(\frac{1}{10} \right)^1 + \left(\frac{1}{10} \right)^2 + \dots \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1} = \left[\begin{matrix} a = 3/10 \\ r = 1/10 \end{matrix} \right] =$$

i satsen

$$\Rightarrow (2) \quad \frac{3/10}{1 - 1/10} = \frac{3}{10-1} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}} \quad \square$$

(Notera: Alt. till metoden i Föreläsning 1 sid. 2.)

Teleskopsener: Betrakta följande serie:

(9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

Partialbråksuppdelning $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \\ &= \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Identifiera: $\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases}$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 + 0 + 0 + \dots + 0 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 + 0 = 1$$

d.v.s. Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergerar och är 1.

Notera att detta är en slutlig teleskopserie eftersom alla utom första och sista termen i S_n togs ut.

⑤

Harmoniska serien: Betrakta följande serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

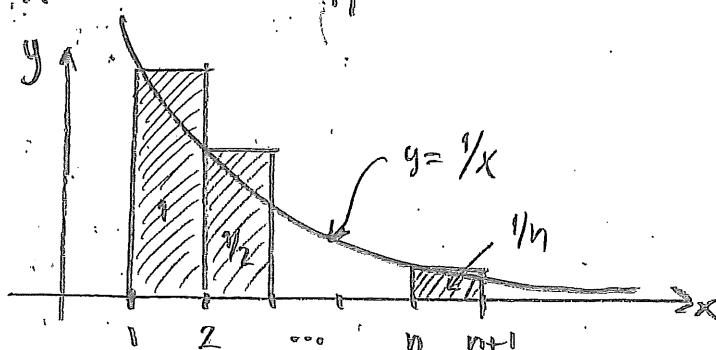
Den här kallas för den harmoniska serien. Konvergent?
 Hitta delsumman ges av:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

$$= \text{arean av rektangel med bas 1 och höjd } 1 + \\ + \text{ rektangel med bas 1 och höjd } \frac{1}{2} + \\ + \text{ rektangel med bas 1 och höjd } \frac{1}{3} + \\ + \dots + \text{ rektangel med bas 1 och höjd } \frac{1}{n} >$$

$$> \text{arean under } y = \frac{1}{x} \text{ mellan } x=1 \text{ och } x=n+1 \\ = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = (\ln|x|) \Big|_1^{n+1} = \ln(n+1),$$

se figur:



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \text{ ty } S_n > \ln(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergerar mot oändligheten}$$

Harmoniska serien är alltså divergent.

Låt oss formulera några satser utan
 att ge bevis för alla:

Sats: (Termkonvergenstest)

6

Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar så $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Bew: $S_{n-1} = a_1 + \dots + a_{n-1}$, $S_n = a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n$

$$\Rightarrow S_n - S_{n-1} = a_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ finns $\Rightarrow$
per def.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} =$$

$$= S - S = 0$$



Notera: Om $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ så är alltså $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Sats: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar $\Leftrightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergerar $\forall N \geq 1$

(Säger all för konvergensten är bara stunden viktig.)

Sats: Om $\{a_n\}$ slutligen växande så är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ antingen konvergent eller divergent mot ∞
(delsummor uppåt begr.) (delsummor ej uppåt begr.)

Sats: Antag $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar mot A resp. B .

Då gäller: (a) $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ konv. mot cA ($c = \text{konst.}$)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ konv. mot $A \pm B$

(c) $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow A \leq B$

⑦ Konvergenstest för positiva serier

Positiv serie: Serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ där $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Konvergenstest som kommer gälla även för slutligen positiva serier (endast svansen hos serien bestämmer konvergens).

Konvergenstest i de specifika fallen kallas kriterier på svenska.

Integrallriteriet: Antag $a_n = f(n)$ där f positiv, kontinuerlig och icke-växande på $[N, \infty)$ för något $N \in \mathbb{N}$. Då gäller att

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ och } \int_N^{\infty} f(t) dt \text{ båda antingen}$$

konvergerar eller divergerar mot ∞ .

(Visas p.s.s. som för harmoniska seriens divergens mot ∞ på sid. 5.)

En konsekvens av Integrallriteriet är:

(p-serier) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} \text{konvergerar om } p > 1 \\ \text{div. mot } \infty \text{ om } p \leq 1 \end{cases}$

(Notera: Harmoniska serien är en p-serie för $p=1$.)

OBS: Hoppa över avsnittet "Using Integral Bounds to Estimate the Sum of a Series" i boken.

Jämförelsekriterier: Man kan avgöra konvergens hos en serie genom att jämföra med andra serier med känd konvergens/divergens. (8)

Jämförelsekriterium #1: Låt $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ vara följder sådana att det finns $K > 0$ s.a.
 $0 \leq a_n \leq K b_n$. Då gäller:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar mot $\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerar mot ∞

Exempel: Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$ konvergerar.

Lösning: $a_n = \frac{3n+1}{n^3+1} < \frac{3n+1}{n^3} \leq \frac{3n+n}{n^3} = \frac{4n}{n^3} = 4 \frac{1}{n^2}$

Här är alltså $K=4$, $b_n = \frac{1}{n^2}$. Vet

att $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ konvergerar

(en p-serie med $p=2 > 1$)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$ konvergerar enligt jämförelsekriteriet. □

Notera $\frac{3n+1}{n^3+1} \approx \frac{3}{n^2}$ för stora n antyder att

vi ska jämföra med just $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$.

⑨ Jämförelsekriterium #2: Antag $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ är positiva serier för vilka $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ där $L \geq 0$ eller $L = +\infty$. Då gäller:

(a) $L < \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar
 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar

(b) $L > 0$ eller $L = +\infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerar mot ∞
 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar mot ∞

(Detta jämförelsekriterium är ofta mer behändigt än Jämförelsekriterium #2.)

Exempel: Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3-2n+3}$ konvergerar

Lösning: $a_n = \frac{n+5}{n^3-2n+3} \approx \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ för stora n

$\Rightarrow$ Jämför med $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n = 1/n^2$
 Som konvergerar

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+5}{n^3-2n+3}}{\frac{1}{n^2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 5n^2}{n^3 - 2n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 5/n}{1 - 2/n^2 + 3/n^3} = \\ &= \frac{1+0}{1-0+0} = 1 < \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Serien konvergerar enligt Jämf.-krt. #2. $\square$

Kvotkriteriet: Antag $a_n > 0$ och att $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ⁽¹⁰⁾
 existerar eller är $+\infty$. Då gäller

(a) $0 \leq \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar

(b) $1 < \rho \leq \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ så att
 alla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar mot ∞

(c) $\rho = 1$: Ingen information om detta
 test, kan ha konvergens
 eller divergens

Exempel: Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ divergerar mot ∞

Lösning: $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, då blir ρ :

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2(n+1))! / ((n+1)!)^2}{(2n)! / (n!)^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \left(\frac{n!}{(n+1)!} \right)^2 =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)(2n+2) \cdot \left(\frac{1}{n+1} \right)^2 =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) \cdot 2(n+1) \cdot \frac{1}{(n+1)^2} =$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 1/n}{1 + 1/n} =$$

$$= 2 \cdot \frac{2+0}{1+0} = 4 > 1$$

$\Rightarrow$ Serien dividerar mot ∞



⑩ Rotkriteriet: Antag $a_n \geq 0$ och $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n}$ existerar eller är $+\infty$. Då gäller:

(a) $0 \leq \sigma < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar

(b) $1 < \sigma \leq \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ så att
alltså $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar mot ∞

Exempel: Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n+1)^n}$ konvergerar

Lösning: $a_n = \frac{3^{n-1}}{(n+1)^n}$, då blir σ :

$$\begin{aligned}\sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{n-1}}{(n+1)^n} \right)^{1/n} = \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{1-1/n}}{n+1} = 3 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-1/n} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \right) =\end{aligned}$$

$$= 3 \cdot 3^{-0} \cdot 0 = 3 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow$ Seren konvergerar □

Notera: (1) Rotkriteriet är inte lika användbart som kvotkriteriet.

(2) Alla konvergenstest fungerar även för serier som uppfyller antagandena endast från och med N:te termen, d.v.s. att serien $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ uppfyller antagandena. (För vilket $N \in \mathbb{N}$ som helst.)

Några jämna uppgifter

⑫

9.2:6

Beräkna summan av $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n}$.

Lösning:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} (1/e)^n = [m=n+1] = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (1/e)^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} 1 \cdot (1/e)^{m-1} = \\ &= [\text{Geometrisk serie}] = \\ &= \frac{1}{1 - 1/e} = \boxed{\frac{e}{e-1}}\end{aligned}$$

9.2:20

Beräkna summan av serien

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots$$

Lösning:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^n i} = [\text{Standardsumma}] = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= [\text{Teleskopserien på sid. 4}] =$$

$$= 2 \cdot 1 = \underline{\underline{2}}$$

9.3:8

Konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(3n)}$?

Lösning:

$$x > \ln x \quad \text{för } \forall x > 0 \Rightarrow 3n > \ln(3n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

13

$$\Rightarrow \frac{1}{3n} < \frac{1}{\ln(3n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} < 3 \frac{1}{\ln(3n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Enligt Jämförelsekriterium #1 (b) med

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{\ln(3n)} \quad \text{och } K=3 \quad \text{så}$$

$$\text{div konver} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(3n)} \quad \text{mot } \infty \quad \text{ty den}$$

$$\text{harmoniska serien} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{div konver}$$

mot ∞ .

Serien divergerar mot ∞ .

9.3:14 Konvergerar $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$?

Lösning: Använd Integralkriteriet!

$$\text{Låt } f(t) = \frac{1}{t \ln t (\ln \ln t)^2}. \quad \text{Det}$$

spelar ingen roll vad vi integrerar från så länge f är positiv, kontinuerlig och icke-växande på intervallet. Vi har $(N \in \mathbb{N})$:

$$\begin{aligned} \int_N^{\infty} \frac{dt}{t \ln t (\ln \ln t)^2} &= \left[\begin{array}{l} \int u = \ln \ln t \\ du = \frac{1}{\ln t} \frac{1}{t} dt \end{array} \right] \begin{array}{l} t \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty \\ t = N \Rightarrow u = \ln \ln N \end{array} \\ &= \int_{\ln \ln N}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\ln \ln N}^R \frac{du}{u^2} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{u} \right) \Big|_{\ln \ln N}^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln \ln N} - \frac{1}{R} \right) = \textcircled{19}$$

$$= \frac{1}{\ln \ln N} < \infty \Leftrightarrow N \geq 2 \quad N=2$$

Eftersom f är pos., kont. och icke-växande på $[2, \infty)$ så ger Integralkriteriet att också serien konvergerar.

9.3:40 Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$ konvergerar
med hjälp av kvotkriteriet.

Lösning: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{2^{n+1}}{n^n}$. Bilda ρ där

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2}/(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}/n^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} =$$

$$= 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{e} = 0 < 1$$

$\Rightarrow$ Enligt kvotkriteriet (a) har vi att
Serien konvergerar.



Se även RÖ 9 & 10 HTO9 där jag löst bl.a.

9.2:8, 9.2:10, 9.2:14,

9.2:22, 9.3:14, 9.3:26, 9.3:38

Lösningar till dessa återfinns också nedan.

15

9.2:8 Bestäm summan av, alternativt avgör om man har konvergens eller divergens för serien $\sum_{j=1}^{\infty} \pi^{j/2} \cos j\pi$.

Lösning: Vi vet enligt en sats att

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerar} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{I vårt fall har vi } a_n &= \pi^{n/2} \cos n\pi = \\ &= \pi^{n/2} (-1)^n \end{aligned}$$

Uppenbarligen gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \pi^{n/2}$ inte existerar ($\{a_n\}$ obegränsad) så enligt (*)

Så kan inte $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergera, d.v.s. serien

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi^{j/2} \cos j\pi \text{ divergerar.}$$

9.2:10 Bestäm summan av, alternativt avgör om man har konvergens eller divergens för serien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}}$.

Lösning:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3^2 3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^2 3^n} =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 \right) + \frac{1}{9} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) = \quad (16) \\
&= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{3+1}{9} = \\
&= [\text{Geom. serier m. } a=r=\frac{1}{3} \text{ resp. } a=r=\frac{2}{3}] = \\
&= \frac{1}{3} \frac{1/3}{1-1/3} + \frac{1}{9} \frac{2/3}{1-2/3} + \frac{4}{9} = \\
&= \frac{1}{3} \frac{1}{3-1} + \frac{1}{9} \frac{2}{3-2} + \frac{4}{9} = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{1} + \frac{4}{9} = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{1}{6} + \frac{6}{9} = \\
&= \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

9.2:14 Bestäm summan av, alternativt avgör om man har konvergens för, serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Lösning: Partialbråksuppdelning $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n(n+1)(n+2)} &\stackrel{\text{ansätt}}{=} \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \\
&= \frac{A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \\
&= \frac{A(n^2+3n+2) + B(n^2+2n) + C(n^2+n)}{n(n+1)(n+2)} = \\
&= \frac{(A+B+C)n^2 + (3A+2B+C)n + 2A}{n(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

⑬ d.v.s. $\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=0 \\ 2A=1 \end{cases}$, vi ser direkt att $A=\frac{1}{2}$.
De två övriga blir då:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + B + C = 0 \\ \frac{3}{2} + 2B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -\frac{1}{2} - B & (1) \\ \frac{3}{2} + 2B + C = 0 & (2) \end{cases}$$

Sätt in (1) i (2): $\frac{3}{2} + 2B - \frac{1}{2} - B = 0 \Rightarrow B = -1$

$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} C = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$

Alltså, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \quad (*)$

Delsumman: $S_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)(j+2)} = [\text{Enl. } (*)] =$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} - \frac{2}{j+1} + \frac{1}{j+2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) + \dots + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n-2} - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right] =$$

$= [\text{Termer med pilar från eller till sig tas ut}] =$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 0 + 0 \right) = \frac{1}{4}$$

Serien konvergerar och har summan $\frac{1}{4}$.

9.2:22 Antag att bank betalar 10 % ränta per år in i ett bankkonto som är tomt från början som fylls på med 1000 dollar vid varje års början. Hur mycket pengar finns på kontot efter 8 år?

Lösning: Efter 0 år: 1000 dollar
 Efter 1 år: $1000 \cdot 1.1 + 1000$
 Efter 2 år: $(1000 \cdot 1.1 + 1000) \cdot 1.1 + 1000$
 $\vdots$
 $= 1000(1.1^2 + 1.1 + 1)$
 Efter 7 år: $1000(1.1^7 + 1.1^6 + \dots + 1.1 + 1)$

Efter 8 år förränta pengar med ytterligare en faktor 1.1 men vi stoppar inte in några nya pengar:

$$\text{Efter 8 år: } 1000(1.1^8 + 1.1^7 + \dots + 1.1^2 + 1.1)$$

$$\text{Låt } S_8 = 1000(1.1^8 + 1.1^7 + \dots + 1.1^2 + 1.1)$$

$$\Rightarrow 1.1 \cdot S_8 = 1000(1.1^9 + 1.1^8 + \dots + 1.1^3 + 1.1^2)$$

Vi får då

$$\begin{aligned}
 (19) \quad 1.1 \cdot S_8 - S_8 &= 1000(1.1^9 - 1.1) \\
 \Rightarrow S_8 &= \frac{1000(1.1^9 - 1.1)}{1.1 - 1} = \frac{1000}{0.1} (1.1^9 - 1.1) = \\
 &= 10000 \cdot 1.1 \cdot (1.1^8 - 1) = 11000 \cdot (1.1^8 - 1) \approx \\
 &\approx 11000 \cdot (2.1435888 - 1) = \\
 &= 11000 \cdot 1.1435888 \approx \\
 &\approx 12579 \text{ dollar}
 \end{aligned}$$

9.3:14 Avgör huruvida serien $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$ konvergerar eller divergerar.

Lösning: Låt oss använda integralkriteriet.

Bilda $f(x) = \frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^2}$. Då har

vi att $a_n = f(n)$ där $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ är serien.

Vi ser att f är positiv, kontinuerlig och ickväxande (t.o.m. avtagande) på $[3, \infty)$.

Enligt integralkriteriet konvergerar $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ om och endast om $\int_3^{\infty} f(x) dx$ konvergerar:

$$\begin{aligned}
 \int_3^{\infty} f(x) dx &= \int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)^2} = \\
 &= \left[\begin{array}{l} u = \ln \ln x \\ du = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x \ln x} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x = \infty \Rightarrow u = \infty \\ x = 3 \Rightarrow u = \ln \ln 3 \end{array} \right] =
 \end{aligned}$$

(20)

$$\begin{aligned}
&= \int_{\ln \ln 3}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\ln \ln 3}^R u^{-2} du = \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-u^{-1} \right) \Big|_{\ln \ln 3}^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln \ln 3} - \frac{1}{R} \right) = \\
&= \frac{1}{\ln \ln 3} - 0 = \frac{1}{\ln \ln 3} < \infty, \text{ konvergent} \\
&\quad \quad \quad \approx 0.094
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Serien konvergerar

9.3:26 Avgör huruvida serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$ konvergerar eller divergerar.

Lösning: Låt oss använda kvotkriteriet.

Vi har serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med $a_n = \frac{n^n}{\pi^n n!}$.

Vi får då:

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{\pi^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{\pi^n n!}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^n n!}{\pi^{n+1}(n+1)!} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi(n+1)} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{\pi} < 1 \\
&\quad \quad \quad = e \text{ (standard-gränsvärde)}
\end{aligned}$$

Eftersom $\rho < 1$ så konvergerar serien enligt kvotkriteriet.

(21)

9.3:38

Använd rotkriteriet för att visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$ konvergerar.

Lösning: Vi har serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med $a_n = \frac{2^{n+1}}{n^n}$.

Vi får:

$$\begin{aligned}\sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{n+1}}{n^n} \right)^{1/n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{1+1/n}}{n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1/n} = \\ &= 2 \cdot 0 \cdot 2^0 = 0 < 1\end{aligned}$$

Eftersom $\sigma < 1$ så konvergerar serien enligt rotkriteriet.