(1)

Föreläsning 11

Absolut och betingad konvergens

Vi släpper på kravet att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är (slutligen) positiv, d.v.s. $a_n \geq 0$ ($\forall n \geq N$ f.n. $N \in \mathbb{N}$).

Definition: Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är absolutkonvergent om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ är konvergent.

Sats: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutkonvergerar $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar

Bevis: Antag $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutkonvergent. (D.v.s. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konv.)

Låt $b_n = a_n + |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$. $\quad (*)$

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \Rightarrow 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \underset{(*)}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{(*)}{\Leftrightarrow} 0 \leq b_n \leq 2|a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent tack vare Jämförelsekriteriet #1 ($\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ konvergent).

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underset{\infty}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - |a_n|) =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{\text{konv.}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|}_{\text{konv.}} \text{ Konvergent.} \quad \square$$

Notera: Det omvända är <u>inte</u> sant; konvergens ger <u>inte</u> absolutkonvergens!

(Motexempel: Den alternerande harmoniska serien $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$)

Definition: Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar men inte absolutkonvergerar så är den <u>betingat konvergent.</u>

(Exempel: Alternerande harmoniska serien.)

Exempel: Absolutkonvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi}{2^n}$?

Lösning: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{n \cos n\pi}{2^n} = \frac{n \cdot (-1)^n}{2^n} = (-1)^n \frac{n}{2^n}$

Vill avgöra om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerar.

Använd Kvotkriteriet:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^{n+1}}\right|}{\left|(-1)^n \frac{n}{2^n}\right|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{2^n}{2^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2} = (1+0)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerar enl. Kvotkrit.

$\Longrightarrow$ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ är absolutkonvergent}}$ $\square$

<u>Kriterium för alternerande serier:</u> (Leibniz' sats)

Antag $\{a_n\}$ är en talföljd som uppfyller

(i) $a_n a_{n+1} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (alternerande)

(ii) $|a_{n+1}| \leq |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (avtagande belopp)

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Då konvergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

③ <u>Exempel:</u> För vilka x gäller att den s.k. potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 2^n}$ absolutkonvergerar, konvergerar betingat och divergerar?

<u>Lösning:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{(x-5)^n}{n \cdot 2^n}$ (x-beroende)

* <u>Absolutkonvergens:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, använd kvotkriteriet:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(x-5)^{n+1} / (n+1)\cdot 2^{n+1}\right|}{\left|(x-5)^n / n \cdot 2^n\right|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x-5|^{n+1}}{|x-5|^n} \cdot \frac{n \cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} |x-5| \frac{n}{n+1} \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}|x-5| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{2}|x-5| \cdot \frac{1}{1+0} =$$

$$= \frac{|x-5|}{2}$$

$$\rho < 1 \Leftrightarrow \frac{|x-5|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x-5| < 2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3 < x < 7$ ger absolutkonvergens

$\rho > 1 \Leftrightarrow \frac{|x-5|}{2} > 1 \Leftrightarrow x < 3, x > 7$ ger ej absolutkonvergens

$x = 3$: $|a_n| = \left|\frac{(3-5)^n}{n \cdot 2^n}\right| = \frac{1}{n}$, ger ej abs.-konv.

$x = 7$: $|a_n| = \left|\frac{(7-5)^n}{n \cdot 2^n}\right| = \frac{1}{n}$, — " —

$\boxed{\text{Serien är absolutkonvergent för } x \in (3,7).}$

* <u>Betingat konvergent:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{(x-5)^n}{n \cdot 2^n}$, $x \le 3$ el. $x \ge 7$

• <u>$x < 3$:</u> $x-5 < -2 \Rightarrow |a_n| = \frac{1}{n}\underbrace{\left|\frac{x-5}{2}\right|}_{>1}^n \to \infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ej konvergent (divergent)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ej betingat konvergent

- $\underline{x=3}$: $a_n = \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = (-1)^n \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent enl. Kriterium för alternerande serier

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ betingat konvergent

- $\underline{x=7}$: $a_n = \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ej konvergent (div. mot ∞)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ej betingat konvergent

- $\underline{x>7}$: $x-5>2 \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}\underbrace{\left(\frac{x-5}{2}\right)}_{>1}^{n} \to \infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ej konvergent (div. mot ∞)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ej betingat konvergent

Serien är betingat konvergent för $x=3$, divergerar mot ∞ för $x \geq 7$ och diregent för $x<3$.

Omordning av serie:

(a) Om termerna till en absolutkonvergent serie omordnas så att additionen utförs i en annan ordning så konvergerar den omordnade serien mot samma summa.

(b) Om termerna till en betingat konvergent serie omordnas så kan man hitta en

⑤ omordning så att den omordnade serien konvergerar mot vilken gräns L som helst, divergerar mot $-\infty$, divergerar mot $+\infty$, eller helt enkelt divergerar.

Man kan alltså säga att absolutkonvergenta serier i någon mening uppför sig som vanliga summor medan betingat konvergenta serier är väldigt beroende på exakt hur termerna läggs ihop.

(Läs gärna själva Example 7 på sid. 525 (i uppl. 6 sid. 500ff) där man visar att den alternerande harmoniska serien kan omordnas så att den blir 8 istf. (vilket kan visas) ln 2.)

Klassificering av differentialekvationer

Vi bryr oss endast om s.k. ordinära differentialekvationer (ODE) i den här kursen.

ODE:er har endast derivator m.a.p. en variabel. (Partiella differentialekvationer, PDE, involverar derivator m.a.p. fler än en variabel.)

Ordningen hos en DE: Ordningen hos den högsta ordningens derivata som involveras.

Exempel: $$\frac{d^3y}{dx^3} + 4x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y\frac{d^2y}{dx^2} + e^y$$

har ordning 3 (p.g.a. $\frac{d^3y}{dx^3}$-termen)

Varje n:te ordningens ODE kan skrivas

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

för någon funktion F.

En <u>linjär</u> ODE är en ODE som kan skrivas

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

Termen som ej innehåller $y^{(i)}$ f.n. $i = 0, 1, 2, \dots, n$, d.v.s. $f(x)$, kallas för den <u>inhomogena termen.</u>

Om $f(x) = 0$ för alla x (d.v.s. endast $y^{(i)}$-termer) så är den linjära ODE:n <u>homogen.</u> Annars, d.v.s. $f(x) \neq 0$ f.n. x, så är den <u>inhomogen.</u>

En ODE som inte är linjär kallas <u>icke-linjär</u>.

<u>Sats:</u> Om y_1 och y_2 är två lösningar till den linjär homogena ODE:n

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

så är också linjärkombinationen $y = Ay_1 + By_2$ det.

<u>Sats:</u> Om y_1 löser den linjära homogena ekvationen

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

och y_2 löser den linjära inhomogena ekvationen

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (*)$$

så är $y = y_1 + y_2$ också en lösning till $(*)$.

⑦ Låt $P_n(r) = a_n(x)r^n + \cdots + a_2(x)r^2 + a_1(x)r + a_0(x)$, d.v.s. ett n:te-gradspolynom i variabeln r.
Då kan man skriva en motsvarande n:te ordningens linjära inhomogena ODE med inhomogen term $f(x)$ som

$$P_n(D)y(x) = f(x)$$

där $D = \frac{d}{dx}$ differentialoperator, d.v.s.

$$P_n(D) = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

Första ordningens ODE:er

Separabla ODE:er: En första ordningens ODE på formen $\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)}$ (**)

kallas för en separabel ODE.

För att lösa (**) så gör man följande

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow [\text{Antag } g(y) \neq 0] \ \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\int \frac{dy}{g(y)} = f(x) \Leftrightarrow \boxed{\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx}$$

Minnesregel: Multiplicera med dx och dividera med $g(y)$ i (**).

$$\longrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Sedan integrera: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$

Exempel: Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2y^3 \\ y(1) = 3 \end{cases}$

Lösning: $\frac{dy}{dx} = x^2 y^3 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^3} = \int x^2\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{3}x^3 + C$

Men $y(1) = 3 \Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{1}{3^2} = \frac{1}{3}1^3 + C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C = -\frac{1}{18} - \frac{1}{3} = -\frac{1+6}{18} = -\frac{7}{18}$

$\Longrightarrow -\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{18} \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{9} =$

$= \frac{7-6x^3}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{9}{7-6x^3} \Leftrightarrow \boxed{y(x) = \frac{3}{\sqrt{7-6x^3}}}$ $\square$

Exempel: Lös <u>integralekvationen</u> $y(x) = 3 + 2\int_1^x t\,y(t)\,dt$

Lösning: Derivera ekvationen

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln|y| = x^2 + C$ (*)

Men integralekvationen ger:

$y(1) = 3 + 2\int_1^1 t\,y(t)\,dt = 3$

Stoppa in i (*): $\ln 3 = 1^2 + C \Leftrightarrow C = \ln 3 - 1$

Då blir (*): $\ln|y| = x^2 + \ln 3 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{\ln|y|} = e^{x^2+\ln 3-1} \Leftrightarrow |y| = 3e^{x^2-1} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow y(x) = \pm 3e^{x^2-1}$, kan ej vara $-$

eftersom $y(1) = 3 > 0$

$\Longrightarrow \boxed{y(x) = 3e^{x^2-1}}$ $\square$

9

Första ordningens linjära ODE:er:

Betrakta den allmänna första ordningens linjära ODE:n

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)} \qquad (**)$$

där p, q givna funktioner.

Vi har två möjlig fall:

- Fall 1: Antag $\boxed{q(x) = 0}$, d.v.s. $(**)$ homogen:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

kan vi lösa eftersom den är separabel:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = C - \int p(x)\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{C} e^{-\int p(x)\,dx} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{y(x) = Ke^{-\mu(x)}}, \quad K \in \mathbb{R}$$

där $\mu(x) = \int p(x)\,dx$ är godtycklig antiderivata till $p(x)$.

- Fall 2: Antag $\boxed{q(x) \neq 0}$ (f.n. x). Multiplicera $(**)$ med den s.k. integrerande faktorn (IF) $e^{\mu(x)}$, där $\mu(x) = \int p(x)\,dx$ som i Fall 1:

$$e^{\mu(x)}\left(\frac{dy}{dx} + p(x)y\right) = e^{\mu(x)}q(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\mu(x)}\frac{dy}{dx} + e^{\mu(x)}p(x)y = e^{\mu(x)}q(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\mu(x)}\frac{dy}{dx}+e^{\mu(x)}\frac{d\mu}{dx}y=e^{\mu(x)}q(x)\Leftrightarrow$$ (10)

$$\Leftrightarrow e^{\mu(x)}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d}{dx}e^{\mu(x)}\right)y=e^{\mu(x)}q(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{\mu(x)}y\right)=e^{\mu(x)}q(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\mu(x)}y=\int e^{\mu(x)}q(x)dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(x)=e^{-\mu(x)}\int e^{\mu(x)}q(x)dx}$$

OBS: Lär er metoden, inte ovanstående formel!

Exempel: Lös $\frac{dy}{dx}+xy=x^3$

Lösning: $p(x)=x\Rightarrow\mu(x)=\int p(x)dx=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2$

$$\Rightarrow IF=e^{\mu(x)}=e^{x^2/2}$$

ODE:n blir efter multiplikation med IF:

$$e^{x^2/2}\frac{dy}{dx}+\underbrace{(e^{x^2/2}x)}_{=\frac{d}{dx}e^{x^2/2}}y=e^{x^2/2}x^3$$

$$\Leftrightarrow\frac{d}{dx}\left(e^{x^2/2}y\right)=e^{x^2/2}x^3\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow e^{x^2/2}y=\int e^{x^2/2}x^3dx=$$

$$=\int x^2\cdot \underbrace{e^{x^2/2}x\,dx}=$$

(Partiell integration)

$$=\left[\begin{cases}U=x^2\\ dU=2x\,dx\end{cases},\ \begin{cases}dV=e^{x^2/2}x\\ V=e^{x^2/2}\end{cases}\right]=$$

$$=x^2e^{x^2/2}-\int e^{x^2/2}\cdot 2x\,dx=$$

$$= x^2 e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = x^2 - 2 + Ce^{-x^2/2},\ C \in \mathbb{R}} \qquad \square$$

Första ordningens "homogena" ODE:er:

Betrakta den första ordningens ODE på formen

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad (*)$$

En sådan kallas "homogen". (OBS: Har inget med linjära homogena ODE:er att göra. Detta homogenitetsbegrepp har att göra med flervariabelanalys; $g(x,y)$ är en homogen funktion av grad 0 om $g(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$.)

För att lösa $(*)$ så införs $v(x)$ där

$$v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = xv$$

där man efter derivering får $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot v + x\frac{dv}{dx} =$

$$= v + x\frac{dv}{dx}$$

Då blir $(*)$:

$$v + x\frac{dv}{dx} = f(v)$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$$

memorera ej formeln, lär er metoden!

$$\boxed{\frac{dv}{dx} = \frac{f(v) - v}{x}}$$

som är separabel och därför i princip lösbar.

Exempel: Lös $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy}{xy + y^2}$ $(**)$

Lösning: Detta är en "homogen" ODE eftersom

$$\frac{x^2+xy}{xy+y^2} = \frac{(x^2+xy)/x^2}{(xy+y^2)/x^2} = \frac{1+y/x}{y/x+(y/x)^2} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

där $f(u) = \dfrac{1+u}{u+u^2}$

Sätt $v = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow y = xv \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$

$\Rightarrow$ (**) kan skrivas

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{v+v^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{v+v^2} - v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{1+v}{v(1+v)} - v\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{v} - v\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{1-v^2}{v}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{v}{1-v^2}\,dv = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln|1-v^2| = \ln|x| + C_1 \Leftrightarrow$$

$\boxed{C_2 = -2C_1}$ $\quad \Leftrightarrow \ln|1-v^2| = C_2 - 2\ln|x| \Leftrightarrow$

$\boxed{C_3 = e^{C_2}}$ $\quad \Leftrightarrow |1-v^2| = \underbrace{C_3}_{>0}|x|^{-2} = C_3/x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right| = C_3/x^2 \Leftrightarrow \frac{|x^2-y^2|}{x^2} = \frac{C_3}{x^2} \Leftrightarrow$$

$[v = y/x]$

$$\Leftrightarrow |x^2-y^2| = C_3 \quad (C_3 > 0) \Leftrightarrow$$

$\boxed{C = \pm C_3}$ $\quad \Leftrightarrow \boxed{x^2 - y^2 = C} \quad (C \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow$

$\boxed{C_4 = -C}$ $\quad \left(\Leftrightarrow y^2 = x^2 + C_4 \Leftrightarrow y(x) = \pm\sqrt{x^2+C_4}\right)$ $\square$

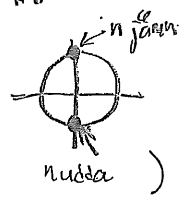
⑬

Några jämna uppgifter

9.4:12 Serie $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\pi)}{\ln\ln n}$, absolut-konvergent, betingat konvergent eller divergent?

Lösning: $\sum_{n=10}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\pi)}{\ln\ln n} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+n\pi)}{\ln\ln n} =$

$= \frac{(-1)^n}{\ln\ln n}$ (Enhetscirkel:



)

- Absolutkonvergent? $\sum_{n=10}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=10}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\ln\ln n}\right| = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{\ln\ln n}$

$\ln\ln n < n \quad \forall n \geq 10 \Rightarrow \frac{1}{\ln\ln n} > \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 10$

Ekvivalent med $n < e^{e^n}$ vilket ju stämmer

$\Rightarrow \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{\ln\ln n}$ divergerar ty $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n}$ gör det

(Jämförelsekriteriet #1)

$\Rightarrow$ Serien ej absolutkonvergent.

- Konvergent? $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln\ln n}$, vi ser att serien är alternerande, att $\{|a_n|\}$ är avtagande samt att $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Enligt kriteriet för alternerande serier är alltså serien konvergent

$\Rightarrow$ Serien är betingat konvergent

9.4:20 För vilka x absolutkonvergerar, konvergerar betingat resp. divergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{3x+2}{-5}\right)^n$?

Lösning: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{3x+2}{-5}\right)^n$

- **Absolutkonvergens:** $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $|a_n| = \frac{1}{|2n-1|}\left(\frac{|3x+2|}{5}\right)^n$

Kvotkriteriet ger:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{|2n+1|}\left(\frac{|3x+2|}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{|2n-1|}\left(\frac{|3x+2|}{5}\right)^{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n-1}{2n+1}\right| \frac{|3x+2|}{5} =$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{2-1/n}{2+1/n}\right|\right)}_{=1} \frac{|3x+2|}{5} = \frac{|3x+2|}{5}$$

Konvergens: $\rho < 1 \Leftrightarrow \frac{|3x+2|}{5} < 1 \Leftrightarrow$
($\Rightarrow$ absolutkonv.)

$\Leftrightarrow |3x+2| < 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x+\frac{2}{3}| < \frac{5}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{3} < x+\frac{2}{3} < \frac{5}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -7/3 < x < 1$

Divergens: $\rho > 1 \Leftrightarrow$ [se ovan] $x < -7/3$ el. $x > 1$

För $\rho = 1 \Leftrightarrow x = -7/3, x = 1$ kan ej kvotkriteriet avgöra absolutkonvergens.

(15)

• $x = -7/3 \Rightarrow |a_n| = \frac{1}{|2n-1|}\left(\frac{|3(-7/3)+2|}{5}\right)^n =$

$= \frac{1}{2n-1}$

Denna uppför sig som den harmoniska serien (använd Jämförelsekriterium #2) så ingen absolutkonvergens.

• $x = 1 \Rightarrow |a_n| = \frac{1}{|2n-1|}\left(\frac{|3\cdot 1+2|}{5}\right)^n = \frac{1}{2n-1}$

Denna uppför sig som den harmoniska serien (använd Jämförelsekriteriet #2) så ingen absolutkonvergens.

$\boxed{\text{Vi har alltså absolutkonvergens för } x \in (-\tfrac{7}{3}, 1)}$

• Betingad konvergens: För $x \leq -7/3$, $x \geq 1$.

• $x < -7/3 \Rightarrow a_n = \frac{1}{2n-1}\left(\underbrace{\frac{3x+2}{-5}}_{>1}\right)^n \Rightarrow$ Divergens ($a_n \not\to 0$)

• $x = -7/3 \Rightarrow a_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{3(-7/3)+2}{-5}\right) = \frac{1}{2n-1}$,

Samma slutsats som förut, ingen konvergens

• $x = 1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{3\cdot 1+2}{-5}\right)^n = \frac{1}{2n-1}(-1)^n$,

enligt kriterium för alternerande serien konvergerar denna

• $x > 1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{2n-1}\left(\underbrace{\frac{3x+2}{-5}}_{<-1}\right)^n \Rightarrow$ Divergens ($a_n \not\to 0$)

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Vi har alltså betingad konvergens för } x=1 \\ \text{och divergens för } x \leq -7/3 \text{ och } x>1.\end{array}}$

17.1:6

$$y'' + 4y' - 3y = 2y^2$$

Detta är en an andraordningens ODE ty högsta ordningens derivata som är involverad är en andra derivata.

P.g.a. $2y^2$-termen kan inte ODE:n vara linjär, den är alltså icke-linjär.

7.9:18

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 3x^2 y = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$, lös begynnelsevärdesproblemet

Lösning: $\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = x^2$ (*)

$$\mu(x) = \int 3x^2\,dx = x^3$$

$$\Rightarrow IF = e^{\mu(x)} = e^{x^3}$$

Då blir (*): $e^{x^3}\left(\frac{dy}{dx} + 3x^2 y\right) = e^{x^3} x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{x^3}\frac{dy}{dx} + \underbrace{(e^{x^3} \cdot 3x^2)}_{= \frac{d}{dx}(e^{x^3})} y = e^{x^3} x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{x^3} y\right) = e^{x^3} x^2 = \frac{1}{3} e^{x^3} \cdot 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x^3} y = \frac{1}{3}\int e^{x^3} \cdot \underbrace{3x^2}_{= \frac{d}{dx}(x^3)} dx =$$

$$= \frac{1}{3} e^{x^3} + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{3} + Ce^{-x^3}$$

Men $y(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + Ce^0 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + C = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow C = 1 - 1/3 = 2/3$$

(17)

$$\Longrightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-x^3}}$$

17:2:4

Lös den "homogena" ODE:n

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + 3xy^2}{3x^2y + y^3} \qquad (*)$$

Lösning:

$$HL_{(*)} = \frac{x^3 + 3xy^2}{3x^2y + y^3} = \frac{1 + 3y^2/x^2}{3y/x + y^3/x^3} =$$

$$= \frac{1 + 3(y/x)^2}{3(y/x) + (y/x)^3} = \underbrace{\left(\frac{1+3t^2}{3t+t^3}\right)}_{f(t)}\Bigg|_{t=\frac{y}{x}}$$

d.v.s. en funktion av y/x. ODE:n $(*)$ är verkligen "homogen".

Låt $v = y/x \Leftrightarrow y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

Då blir $(*)$:

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2}{3v+v^3}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2}{3v+v^3} - v =$$

$$= \frac{(1+3v^2) - v(3v+v^3)}{3v+v^3} =$$

$$= \frac{1+3v^2-3v^2-v^4}{v(3+v^2)} =$$

$$= \frac{1-v^4}{v(3+v^2)} \Longleftrightarrow \text{[Separabel]}$$

$$\Longleftrightarrow \int \frac{v(3+v^2)}{1-v^4}\,dv = \int \frac{dx}{x} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \int \frac{3+v^2}{1-(v^2)^2}\,v\,dv = \ln|x| + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} u = v^2 \\ du = 2v\,dv \Leftrightarrow v\,dv = \frac{1}{2}du \end{cases}\right]$$

$$\int \frac{3+u}{1-u^2}\frac{1}{2}du = \ln|x| + C_1 \quad , C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 3\int \frac{1}{(1-u)(1+u)}du + \int \frac{u}{1-u^2}du = 2\ln|x| + C_2 , C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{-1/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u} \quad \text{(borde man se direkt)}\right]$$

$$3\int\left(-\frac{1/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u}\right)du + \frac{1}{2}\int\frac{-2u}{1-u^2}du$$

$$= 2\ln|x| + C_2 \ , C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(-\frac{1}{2}\ln|1-u| + \frac{1}{2}\ln|1+u|\right) - \frac{1}{2}\ln|1-u^2| =$$

$$= 2\ln|x| + C_2 \ , C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 3\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \ln|1-u^2| = 4\ln|x| + C_3 , C_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left[u = v^2 = (y/x)^2 = y^2/x^2\right]$$

$$3\ln\left|\frac{y^2/x^2+1}{y^2/x^2-1}\right| - \ln\left|1 - \frac{y^4}{x^4}\right| =$$

$$= \ln(x^4) + C_3 \ , C_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 3\ln\left|\frac{y^2+x^2}{y^2-x^2}\right| - \ln\frac{|x^4-y^4|}{x^4} = \ln(x^4) + C_3$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{(x^2+y^2)^3}{(x^2-y^2)^3}\right| - \ln|(x^2+y^2)(x^2-y^2)| = C_3$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2-y^2)^4}\right| = C_3 \Leftrightarrow \frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} = C_4 , C_4 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2} = C , C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2 = C(x^2-y^2) \ , C \in \mathbb{R}}$$

19

Se även RÖ 10 & 13 HT09 där jag löst bl.a.

9.4:6 , 9.4:10 , 9.4:22 ,

17.1:4 , 17.1:8 , 7.9:8 ,

7.9:12 , 7.9:20 , 17.2:6

Lösningar till dessa återfinns också nedan.

<u>9.4:6</u> Avgör huruvida serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ konvergerar absolut, konvergerar betingat eller divergerar.

<u>Lösning:</u> Vi kollar huruvida $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, där $a_n = \frac{(-2)^n}{n!}$, konvergerar. Vi har

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-2)^{n+1}/(n+1)!}{(-2)^n/n!} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| (-2) \frac{n!}{(n+1)!\,n!} \right| = \lim_{n\to\infty} 2 \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

så enligt kvotkriteriet konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, d.v.s. serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ är absolut-konvergent.

9.4:10 Avgör huruvida serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cos n\pi}{2n+3}$ (20)

konvergerar absolut, konvergerar betingat eller divergerar.

Lösning: Serien är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cos n\pi}{2n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100(-1)^n}{2n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

med $a_n = \frac{100(-1)^n}{2n+3}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Serien är alternerande.

Det gäller också att

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{100(-1)^{n+1}/(2(n+1)+3)}{100(-1)^n/(2n+3)} \right| = \left| (-1) \frac{2n+3}{2n+5} \right| =$$

$$= \frac{2n+3}{2n+5} \overset{[3<5]}{<} \frac{2n+5}{2n+5} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

$$\Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

Dessutom har vi att

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{100(-1)^n}{2n+3} = 0$$

Enligt alternerande serie-kriteriet så är därför serien konvergent.

Är den absolutkonvergent, d.v.s. konvergerar också $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$?

Vi ser att

$$|a_n| = \left| \frac{100(-1)^n}{2n+3} \right| = \frac{100}{2n+3} \overset{[n\geq 1]}{\geq} \frac{100}{2n+3n} = \frac{20}{n} = 20 b_n$$

där $b_n = \frac{1}{n}$. Eftersom den harmoniska serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerar (mot ∞) och att $0 < b_n \leq \frac{1}{20}|a_n|$ så ger jämförelsekriteriet att också $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergerar (mot ∞).

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cos n\pi}{2n+3}$ är alltså inte absolutkonvergent. Men eftersom den var konvergent så är den i alla fall betingat konvergent.

9.4:22 Avgör för vilka x-värden som serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^3}$ konvergerar absolut, konvergerar betingat och divergerar.

Lösning: Låt $a_n = \frac{(4x+1)^n}{n^3}$, så serien är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Låt oss undersöka konvergensen hos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(4x+1)^{n+1}/(n+1)^3}{(4x+1)^n/n^3} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|(4x+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\right| = |4x+1| \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^3 =$$

$$= |4x+1| \left(\frac{1}{1+0}\right)^3 = |4x+1| \qquad (*)$$

Vi vill använda kvotkriteriet.

(a) $0 \leq \rho < 1 \underset{(*)}{\Leftrightarrow} |4x+1| < 1 \Leftrightarrow -1 < 4x+1 < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 < 4x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0$

Enl. kvotkriteriet konvergerar serien absolut för sådana x.

(b) $1 < \rho \leq \infty \underset{(*)}{\Leftrightarrow} |4x+1| > 1 \Leftrightarrow 4x+1 < -1$

eller $4x+1 > 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ eller $x > 0$

Enl. kvotkriteriet divergerar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ mot ∞ för sådana x.

Antag $x = -\frac{1}{2}$: $|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right| = \frac{1}{n^3}$ vilket innebär att $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerar och serien konvergerar absolut för $x = -\frac{1}{2}$.

Antag $x = 0$: $|a_n| = \frac{1^n}{n^3} = \frac{1}{n^3}$ vilket som ovan innebär att serien konvergerar absolut.

Återstår att se om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar eller divergerar för $x < -\frac{1}{2}$ och $x > 0$.

$(\dagger)\left\{\begin{array}{l}\text{Vi vet att om } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ så divergerar} \\ \text{serien } \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\end{array}\right.$

Anteg $x < -\frac{1}{2}$ eller $x > 0$. Då har vi att $|4x+1| > 1$ (se (b) ovan). Då måste

$a_n \overset{\text{def}}{=} \frac{(4x+1)^n}{n^3}$ för sådana x ge att

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{om} \quad x > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{existerar ej om} \quad x < -\tfrac{1}{2}$$

d.v.s. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar enligt (†).

17.1:4 Låt DE:en $y''' + xy' = x \sin x$ vara given. Vilken ordning är den av? Linjär eller icke-linjär. Om linjär, är den homogen eller inhomogen?

Lösning: DE:en måste vara av 3:e ordningen. Den är dessutom linjär och inhomogen.

17.1:8 Låt DE:en $\cos x \frac{dx}{dt} + x \sin t = 0$ vara given. Vilken ordning? Linjär? Om linjär, är den homogen?

Lösning: DE:en är av 1:a ordningen och är icke-linjär (p.g.a. $\cos x$; x är ju funktionen).

7.9:8 Lös den separabla ekvationen $\frac{dy}{dx} = 1+y^2$.

Lösning: Vi kan något oegentligt skriva ekvationen på formen $\frac{dy}{1+y^2} = dx$ vilket egentligen betyder att vi integrerar $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int 1\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+C = \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y$ (C konstant)

Så att $y = \tan(x+C)$ är lösningen

(Giltig så länge $x+C \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.)

7.9:12 Lös den linjära ekvationen $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}$.

Lösning: Vi kan skriva DE:en

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

Den integrerande faktorn ges av $e^{\mu(x)}$ där

$$\mu(x) = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x| = \ln|x|^2 = \ln x^2$$

$$\Longrightarrow e^{\mu(x)} = e^{\ln x^2} = x^2$$

Vi får då

$$x^2\frac{dy}{dx} + x^2\frac{2}{x}y = x^2\frac{1}{x^2}$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = 1$$

d.v.s. $\frac{d}{dx}(x^2y) = 1$

(25) Vilket efter integration blir $x^2 y = x + C$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$$

7.9:20 Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' + (\cos x)y = 2xe^{-\sin x} & (*) \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Lösning: Den integrerande faktorn ges av $e^{\mu(x)}$ där

$$\mu(x) = \int \cos x \, dx = \sin x \Rightarrow e^{\mu(x)} = e^{\sin x}$$

Vi multiplicerar $(*)$ med denna och får

$$e^{\sin x} y' + (e^{\sin x} \cos x) y = 2x$$

d.v.s. $\frac{d}{dx}(e^{\sin x} y) = 2x$

så att $e^{\sin x} y = \int 2x \, dx$

$$= x^2 + C$$

Vilket ger den allmänna lösningen

$$y = e^{-\sin x}(x^2 + C)$$

Men $y(\pi) = 0 \Leftrightarrow e^{-\sin \pi}(\pi^2 + C) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-0}}_{=1}(\pi^2 + C) = 0 \Leftrightarrow \pi^2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\pi^2$$

Lösningen är alltså $y = (x^2 - \pi^2)e^{-\sin x}$.

17.2:6 Lös den homogena differentialekvationen (26)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - e^{-y/x}$$

Lösning: Låt $v = \frac{y}{x}$. Detta ger $y = vx$ vilket efter derivering blir $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}x + v \cdot 1 = \frac{dv}{dx}x + v$

Insatt i DE:en blir detta

$$\frac{dv}{dx}x + v = v - e^{-v}$$

$$\frac{dv}{dx}x = -e^{-v} \qquad (\dagger)$$

Som är separabel (som väntat). Vi skriver $(\dagger)$ på formen

$$e^{v}\,dv = -\frac{1}{x}dx$$

vilken vi integrerar, d.v.s.

$$\int e^{v}dv = -\int \frac{dx}{x}$$

så att
$$\begin{aligned} e^{v} &= -\ln|x| + C_1 \quad , C_1 \in \mathbb{R} \\ &= -\ln|x| + \ln|C| , \quad C \neq 0 \\ &= \ln\left|\frac{C}{x}\right| \end{aligned}$$

eller
$$v = \ln \ln \left|\frac{C}{x}\right|$$

vilket betyder
$$\frac{y}{x} = \ln \ln \left|\frac{C}{x}\right|$$

d.v.s.
$$y = x \ln \ln \left|\frac{C}{x}\right|$$