①

Föreläsning 12

Andra ordningens linjära homogena ODE:er med konstanta koefficienter

Betrakta ODE:n

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0} \quad (*)$$

där a, b, c konstanter $(a \neq 0)$. Detta är en s.k. <u>andra ordningens linjära homogena ODE med konstanta koefficienter</u>

Man kan skriva $(*)$ som

$$P_2(D)y = 0$$

där $P_2(r) = ar^2 + br + c$ och $D = \frac{d}{dx}$.

Låt oss faktorisera $P_2(r)$. Nollställen:

$$P_2(r) = 0 \Leftrightarrow \boxed{ar^2 + br + c = 0} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow r^2 + \frac{b}{a}r + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kalla dessa r_1 resp. r_2 d.v.s.

$$P_2(r) = a(r - r_1)(r - r_2)$$

$$\Rightarrow P_2(D) = a(D - r_1)(D - r_2)$$

$(*)$ kan skrivas $a(D - r_1)(D - r_2)y = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (D - r_1)(D - r_2)y = 0$$

$(**)$ kallas för den <u>karaktäristiska ekvationen</u>.

<u>Tre möjliga fall:</u>

- r_1, r_2 reella och $r_1 \neq r_2$:

$$(D-r_1)(D-r_2)y = 0 \quad , \text{ låt } u=(D-r_2)y$$

$$\Longrightarrow \frac{du}{dx} - r_1 u = 0 \underset{\text{sep.}}{\Leftrightarrow} \int \frac{du}{u} = \int r_1\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|u| = r_1 x + C_1 \Leftrightarrow |u| = C_2 e^{r_1 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u = C_3 e^{r_1 x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - r_2 y = C_3 e^{r_1 x} \underset{IF}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{IF}{\Leftrightarrow} \frac{d}{dx}\left(e^{-r_2 x} y\right) = C_3 e^{r_1 x + r_2 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-r_2 x} y = A e^{r_1 x + r_2 x} + B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}} \qquad (\dagger)$$

- r_1, r_2 reella och $r_1 = r_2 = r$:

$$(D-r)^2 y = 0 \quad , \text{ låt } u = (D-r)y$$

$$\Longrightarrow \frac{du}{dx} - ru = 0 \Leftrightarrow \text{[se ovan] } u = Be^{rx} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - ry = Be^{rx} \underset{IF}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{IF}{\Leftrightarrow} \frac{d}{dx}\left(e^{-rx} y\right) = B \Leftrightarrow e^{-rx} y = Bx + A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(x) = (A + Bx)e^{rx}}$$

- $r_{1,2} = k \pm i\omega$ (icke-reella, d.v.s. $\omega \neq 0$):

Låt $r_1, r_2 = k \pm i\omega$, $\omega \neq 0$, i $(\dagger)$:

$$y(x) = C e^{(k+i\omega)x} + D e^{(k-i\omega)x} =$$

$$= C e^{kx} e^{i\omega x} + D e^{kx} e^{-i\omega x} =$$

③

$$= C e^{ux}(\cos \omega x + i \sin \omega x) +$$
$$+ D e^{ux}(\cos \omega x - i \sin \omega x) =$$
$$= (C+D) e^{ux} \cos \omega x + (C-D) e^{ux} \sin \omega x$$

Kalla $A = C+D$, $B = C-D$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = A e^{ux} \cos \omega x + B e^{ux} \sin \omega x}$$

<u>Exempel:</u> Hitta allmänna lösningen till $y'' + 6y' + 9y = 0$.

<u>Lösning:</u> Karakteristisk ekvation:

$$r^2 + 6r + 9 = 0 \Leftrightarrow r = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3$$

d.v.s. en reell dubbelrot $r = \ldots$

$$\Rightarrow \text{Allmän lösning } \boxed{y(x) = (A + Bx) e^{-3x}} \quad \square$$

<u>Exempel:</u> Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$

<u>Lösning:</u> Karakteristisk ekvation:

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$$

d.v.s. ett konjugerat komplext par rötter

$$\Rightarrow \text{Allmän lösning } y(x) = A e^{-x} \cos x + B e^{-x} \sin x$$

- $y(0) = 2 \Leftrightarrow A e^0 \underbrace{\cos 0}_{=1} + B e^0 \underbrace{\sin 0}_{=0} = 2 \Leftrightarrow A = 2$

$$\Rightarrow y(x) = 2 e^{-x} \cos x + B e^{-x} \sin x$$
$$\Rightarrow y'(x) = -2 e^{-x} \cos x - 2 e^{-x} \sin x -$$
$$- B e^{-x} \sin x + B e^{-x} \cos x =$$
$$= (B-2) e^{-x} \cos x + (-2-B) e^{-x} \sin x$$

- $y'(0) = -3 \Leftrightarrow (B-2) e^0 \underbrace{\cos 0}_{=1} + (-2-B) e^0 \underbrace{\sin 0}_{=0} = -3$

$\Leftrightarrow B-2=-3 \Leftrightarrow B=-1$

$$\Longrightarrow \boxed{y(x) = 2e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x} \qquad \square$$

<u>Exempel:</u> Hitta allmänna lösningen till $y''+y'-2y=0$

<u>Lösning:</u> Karaktäristisk ekvation:

$$r^2+r-2=0 \Leftrightarrow r=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=$$
$$=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$$

d.v.s. två reella rötter $r_1=-2, r_2=1$.

$$\Longrightarrow \boxed{y(x)=Ae^{-2x}+Be^{x}} \qquad \square$$

(Studera i avsnitten om harmonisk rörelse i boken.)

<u>Högre ordningens linjära homogena ODE:er med konstanta koefficienter</u>

En godtycklig <u>högsta ordningens linjär homogena ODE med konstanta koefficienter</u> kan skrivas

$$(*) \qquad \boxed{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0}$$

eller $P_n(D)y=0$ där P_n är polynomet

$$P_n(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0,$$

och $D=\frac{d}{dx}$ (differentialoperator), samt $a_n \neq 0$.

Man inser att lösningsmetoden för specialfallet $n=2$ som redan behandlats kan generaliseras till godtyckligt n. Man får en karaktäristisk ekvation:

$$\boxed{P_n(r)=0} \qquad (**)$$

⑤ d.v.s. en n:te-gradsekvation. Man får en faktorisering $P_n(r) = (r-r_1)\cdots(r-r_n)$ så att ODE:n blir

$$(D-r_1)\cdots(D-r_n)y = 0$$

vilken man löser (separabel ODE, integrerande faktor upprepade ggr) och får lösning

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

där $y_1, \ldots, y_n$ linjärt oberoende.

Så här konstruerar man $y_1, \ldots, y_n$:

1. Om r_1 är en rot till (**) av multiplicitet k (d.v.s. $(r-r_1)^k$ är en faktor i $P_n(r)$) så är

$$e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \ldots, x^{k-1} e^{r_1 x}$$

k st linjärt oberoende lösningar till (*).

2. Om $r_{1,2} = a \pm ib$ är ett par av komplext konjugerade rötter till (**) av multiplicitet k (d.v.s. $((r-a)^2+b^2)^k$ är en faktor i $P_n(r)$) så är

$$\begin{cases} e^{ax}\cos bx, xe^{ax}\cos bx, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\cos bx, \\ e^{ax}\sin bx, xe^{ax}\sin bx, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\sin bx \end{cases}$$

2k st linjärt oberoende lösningar till (*)

Exempel: Lös $(D+4)^3(D^2+4D+13)^2 y = 0$ där $D = d/dx$ (diff-op.).

Exempel: Den karakteristiska ekvationen är

$$(r+4)^3(r^2+4r+13)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r+4=0 \text{ eller } r^2+4r+13=0 \Leftrightarrow$$

(ggr 3) (ggr 2)

$$\Leftrightarrow r=-4 \text{ eller } r=-2\pm\sqrt{4-13}=-2\pm 3i$$

(ggr 3) (ggr 3)

d.v.s. rötterna är $r=-4$ (mult. 3) och

$r=-2\pm 3i$ (mult. 2)

$\Longrightarrow$ Linjärt oberoende lösningar är

1. $e^{-4x}, xe^{-4x}, x^2e^{-4x}$ (3 st)

och 2. $\begin{cases} e^{-2x}\cos 3x, xe^{-2x}\cos 3x \\ e^{-2x}\sin 3x, xe^{-2x}\sin 3x \end{cases}$ (4 st) $=2\cdot 2$

$\Longrightarrow$ Den allmänna lösningen är:

$$y(x)=C_1e^{-4x}+C_2xe^{-4x}+C_3x^2e^{-4x}+ \\ +C_4e^{-2x}\cos 3x+C_5xe^{-2x}\cos 3x+ \\ +C_6e^{-2x}\sin 3x+C_7xe^{-2x}\sin 3x$$

d.v.s.
$$\boxed{y(x)=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-4x}+ \\ +(C_4+C_5x)e^{-2x}\cos 3x+ \\ +(C_6+C_7x)e^{-2x}\sin 3x}$$

Eulerekvationer

En andra ordningens linjära homogena ODE av typen

$(a\neq 0)$ $$\boxed{ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=0} \qquad (*)$$

kallas för en Eulerekvation (eller alt. "ekvidimensionell ekvation": $x^2 \sim dx^2$, $x \sim dx$, $x^0 \sim dx^0$).
Eulerekvationer har <u>inte</u> konstanta koefficienter.

Ansätt en lösning $y = |x|^r$, vill bestämma r.

$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = r|x|^{r-1} \operatorname{sgn} x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)|x|^{r-2}(\operatorname{sgn} x)^2 = r(r-1)|x|^{r-2}$$

Sätt in i (†):

$x \operatorname{sgn} x = |x|$

$$ax^2 r(r-1)|x|^{r-2} + bxr|x|^{r-1}\operatorname{sgn} x + c|x|^r = 0$$

$$a|x|^2 r(r-1)|x|^{r-2} + b|x|r|x|^{r-1} + c|x|^r = 0$$

$$(ar(r-1) + br + c)|x|^r = 0$$

d.v.s. man får en karakteristisk ekvation

$$(*) \quad \boxed{\begin{gathered} ar(r-1) + br + c = 0 \\ \text{eller} \\ ar^2 + (b-a)r + c = 0 \end{gathered}} \Rightarrow \text{Rötter } r_1, r_2$$

Vi har tre möjliga fall:

- <u>r_1, r_2 reella och $r_1 \neq r_2$:</u>

  Då är $y_1 = |x|^{r_1}$, $y_2 = |x|^{r_2}$ linjärt oberoende lösningar till (†) och allmän lösning blir:

$$\boxed{y(x) = A|x|^{r_1} + B|x|^{r_2}} \quad (††)$$

- <u>r_1, r_2 reella och $r_1 = r_2 = r$:</u>

  Dubbelrot men har fortfarande två linjärt

Oberoende lösningar y_1, y_2 ... Låt $y_1 = |x|^r$, då är det en lösning. Låt $y_2 = |x|^r \ln|x|$. ⑥

Påstående: y_2 löser (†) om r dubbelrot.

Bevis:

$$y_2 = |x|^r \ln|x|$$

$$\frac{dy_2}{dx} = r|x|^{r-1}(\operatorname{sgn} x)\ln|x| + |x|^r \underbrace{\frac{1}{|x|}(\operatorname{sgn} x)}_{=1/x} =$$

$$= \frac{1}{x}|x|^r(r\ln|x| + 1)$$

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(r|x|^{r-1}(\operatorname{sgn} x)\ln|x| + |x|^{r-1}(\operatorname{sgn} x)\right)$$

$$= r(r-1)|x|^{r-2}(\operatorname{sgn} x)^2 \ln|x| +$$

$$+ r|x|^{r-1}(\operatorname{sgn} x)\frac{1}{|x|}(\operatorname{sgn} x) +$$

$$+ (r-1)|x|^{r-2}(\operatorname{sgn} x)(\operatorname{sgn} x) =$$

$$= \frac{1}{x^2}|x|^r\left(r(r-1)\ln|x| + 2r - 1\right)$$

Stoppa in i $VL_{(\dagger)}$ och div. m. $|x|^r$:

$$a\left(r(r-1)\ln|x| + 2r - 1\right) + b\left(r\ln|x| + 1\right) +$$

$$+ c\ln|x| =$$

$$= \underbrace{\left(ar(r-1) + br + c\right)}_{=0 \text{ enl. } (*)}\ln|x| + a(2r-1) + b =$$

$$= a(2r-1) + b = (**)$$

(*) kan skrivas: $r^2 + \frac{b-a}{a}r + \frac{c}{a} = 0$

$$\Leftrightarrow r = -\frac{b-a}{2a} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}}_{=0 \text{ om dubbelrot!}} = \frac{a-b}{2a}$$

$$\Rightarrow (**) = a\left(2\frac{a-b}{2a} - 1\right) + b =$$

$$= (a-b) - a + b = 0 = HL_{(\dagger)}$$

d.v.s. $y_2 = |x|^r \ln|x|$ löser (†). $\square$

⑨

Slutsats: $\boxed{y(x) = (A + B\ln|x|)|x|^r}$

- $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ Icke-reella, d.v.s. $\beta \neq 0$):

I detta fall kan (††) användas. Vi har

$$|x|^{r_{1,2}} = |x|^{\alpha \pm i\beta} = |x|^{\alpha}(e^{\ln|x|})^{\pm i\beta} =$$

$$= |x|^{\alpha} e^{\pm i\beta\ln|x|} =$$

$$= |x|^{\alpha}(\cos(\beta\ln|x|) \pm i\sin(\beta\ln|x|)) =$$

$$= |x|^{\alpha}\cos(\beta\ln|x|) \pm i|x|^{\alpha}\sin(\beta\ln|x|)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = A|x|^{\alpha}\cos(\beta\ln|x|) + B|x|^{\alpha}\sin(\beta\ln|x|)}$$

Minnesregel: I motsvarande problem med konstanta koefficienter, byt ut lösningens $\boxed{e^x \text{ mot } |x|}$ för att få lösningen till Eulerekvationen med samma rötter till karakteristiska ekvationen!
(Notera: $x = \ln(e^x)$, så x byts mot $\ln|x|$.)

Exempel: Lös Eulerekvationen $x^2y'' - 3xy' + 13y = 0$.

Lösning: Det är en Eulerekv. ty $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$, $x\frac{dy}{dx}$, $x^0\frac{d^0y}{dx^0}$

Karakteristisk ekvation: $r(r-1) - 3r + 13 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r^2 - 4r + 13 = 0 \Leftrightarrow r = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

d.v.s. ett konjugerat komplext par icke-reellt)

$\Rightarrow$ Allmän lösning är

$$\boxed{y(x) = Ax^2\cos(3\ln|x|) + Bx^2\sin(3\ln|x|)}$$

(Notera: $|x|^2 = x^2$.)

(Jmf. $Ae^{2x}\cos(3x) + Be^{2x}\sin(2x)$ (konst. koeff.))

$\square$

Inhomogena linjära ODE:er

Betrakta problem av typen

$$\boxed{a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)} \qquad (*)$$

d.v.s. en inhomogen andra ordningens linjär ODE med konstanta koefficienter. Den motsvarande homogena ODE:n ($f(x) = 0 \ \forall x$) är

$$\boxed{a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0} \qquad (**)$$

Den allmänna lösningen y till $(*)$ kan skrivas

$$y = y_p + y_h$$

där y_p är vilken lösning till $(*)$ som helst (en s.k. <u>partikulärlösning</u>) och y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ODE $(**)$ (den s.k. <u>komplementära lösningen</u>).

Det finns ett effektivt recept för att hitta partikulärlösning y_p till inhomogena $(*)$:

Låt $A_n(x)$, $B_n(x)$ och $P_n(x)$ vara n:te-gradspolynomen

$$\begin{cases} A_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n \\ B_n(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_n x^n \\ P_n(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n \end{cases}$$

För att hitta y_p pröva följande:

11

- Om $f(x) = P_n(x)$, pröva
$$y_p(x) = x^m A_n(x)$$
- Om $f(x) = P_n(x)e^{rx}$, pröva
$$y_p(x) = x^m A_n(x) e^{rx}$$
- Om $f(x) = P_n(x)e^{rx}\cos kx$, pröva
$$y_p(x) = x^m e^{rx}(A_n(x)\cos kx + B_n(x)\sin kx)$$
- Om $f(x) = P_n(x)e^{rx}\sin kx$, pröva
$$y_p(x) = x^m e^{rx}(A_n(x)\cos kx + B_n(x)\sin kx$$

där m är det minsta av talen 0, 1 och 2 sådant att ingen term i y_p löser homogena (**).

Exempel: Lös $y'' + 4y = \sin 2x$

Lösning: • Homogen ODE: $y'' + 4y = 0$

Karaktäristisk ekv.: $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2i$

$$\Rightarrow y_h(x) = C\cos 2x + D\sin 2x$$

• Partikulärlösning till inhomogen ODE:

$f(x) = \sin 2x$, d.v.s. $P_n(x) = 1 \Rightarrow n = 0$

$$\Rightarrow \text{Pröva } y_p(x) = x^m(A_n(x)\cos 2x + B_n(x)\sin 2x) \overset{(n=0)}{=} x^m(A\cos 2x + B\sin 2x) =$$

$= [m = 0 \Rightarrow y_p$ löser homogena, måste välja $m = 1] =$

$$= x(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

Bestäm A och B: Derivera y_p:

$$y_p'(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x) +$$
$$+ x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) =$$
$$= (A + 2Bx)\cos 2x +$$
$$+ (B - 2Ax)\sin 2x$$
$$\Rightarrow y_p''(x) = 2B\cos 2x - 2(A+2Bx)\sin 2x$$
$$- 2A\sin 2x + 2(B - 2Ax)\cos 2x$$
$$= 4(B - Ax)\cos 2x -$$
$$- 4(A + Bx)\sin 2x$$

Sätt in y_p, y_p' och y_p'' i inhomogena ODE:n:

$$\big(4(B-Ax)\cos 2x - 4(A+Bx)\sin 2x\big) +$$
$$+ 4x(A\cos 2x + B\sin 2x) = \sin 2x$$
$$\Leftrightarrow (4B - 4Ax + 4Ax)\cos 2x +$$
$$+ (-4A - 4Bx + 4Bx)\sin 2x = \sin 2x$$
$$\Leftrightarrow 4B\cos 2x - 4A\sin 2x = \sin 2x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4B\cos 2x - (4A+1)\sin 2x = 0,$$

vilket gäller $\forall x$

$$\Longrightarrow 4B = 0 \text{ och } 4A + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow B = 0 \text{ och } A = -1/4$$

$$\Longrightarrow y_p(x) = x\left(-\frac{1}{4}\cos 2x + 0\cdot\sin 2x\right) =$$
$$= -\frac{1}{4}x\cos 2x$$

$\Longrightarrow$ Den allmänna lösningen $y = y_p + y_h$ är

$$y(x) = -\frac{1}{4}x\cos 2x + C\cos 2x + D\sin 2x$$

d.v.s. $\boxed{y(x) = \left(C - \frac{1}{4}x\right)\cos 2x + D\sin 2x}$ $\square$

(13)

Några jämna uppgifter

3.7:6 Lös $y'' - 2y' + y = 0$.

Lösning: Karaktäristisk ekvation:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = 1 \quad \text{(dubbelrot)}$$

$\Longrightarrow$ Allmän lösning $\boxed{y(x) = (A + Bx)e^x}$

3.7:12 Lös $y'' + y' + y = 0$.

Karaktäristisk ekvation:

$$r^2 + r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} =$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(konjugerat komplext par)

$\Longrightarrow$ Allmän lösning ges av

$$\boxed{y(x) = Ae^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + Be^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x}$$

17.5:4 Lös $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 6y'' + 4y' + y = 0$.

Lösning: Karaktäristisk ekvation:

$$r^4 + 4r^3 + 6r^2 + 4r + 1 = 0$$

Testa reella rötter. Dessa måste vara negativa.

$r = -1$: $(-1)^4 + 4(-1)^3 + 6(-1)^2 + 4(-1) + 1 =$

$= 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 8 - 8 = 0$, en rot!

Polynomdividera:

$$\begin{array}{l} \quad r^3+3r^2+3r+1 \\ \hline r^4+4r^3+6r^2+4r+1 \;\big|\; r+1 \\ -r^3(r+1) \\ \hline \quad 3r^3+6r^2+4r+1 \\ \quad -3r^2(r+1) \\ \hline \qquad 3r^2+4r+1 \\ \qquad -3r(r+1) \\ \hline \qquad\quad r+1 \\ \qquad\quad -(r+1) \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$\longleftarrow$ Jämnt ut!

$\Longrightarrow \; r^4+4r^3+6r^2+4r+1=(r+1)(r^3+3r^2+3r+1)$

Vi ser direkt att $r=-1$ är ett nollställe även till r^3+3r^2+3r+1. Pol.-div. igen:

$$\begin{array}{l} \quad r^2+2r+1 \\ \hline r^3+3r^2+3r+1 \;\big|\; r+1 \\ -r^2(r+1) \\ \hline \quad 2r^2+3r+1 \\ \quad -2r(r+1) \\ \hline \qquad r+1 \\ \qquad -(r+1) \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

$\longleftarrow$ Jämnt ut!

$\Longrightarrow \; r^4+4r^3+6r^2+4r+1=(r+1)^2(r^2+2r+1)=$

$=(r+1)^2(r+1)^2=(r+1)^4$

d.v.s. $r=-1$ är en kvadrupelrot (multiplicitet 4). Enligt receptet är (se sid. 5)

$$e^{-x},\quad xe^{-x},\quad x^2e^{-x} \text{ och } x^3e^{-x}$$

de fyra linjärt oberoende lösningarna till ODE:n så att allmän lösning blir:

(15)

$$\boxed{y(x) = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3)e^{-x}}$$

17.5:8 Lös Eulerekvationen $x^2y'' - xy' - 3y = 0$.

Lösning: [Notera att det är en Eulerekv. eftersom
y''-koefficienten (d.v.s. $y^{(2)}$) har grad 2,
y'- ——— " ——— $y^{(1)}$ — " — 1 och
y - ——— " ——— $y^{(0)}$ — " — 0]

Karakteristisk ekvation:

$$r(r-1) - r - 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^2 - 2r - 3 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \pm \sqrt{1-(-3)} =$$
$$= 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

d.v.s. två reella rötter $r_1 = -1$, $r_2 = 3$

$\Longrightarrow$ Allmän lösning är

$$y(x) = A|x|^{-1} + B|x|$$

d.v.s. $\boxed{y(x) = \dfrac{A}{|x|} + B|x|^3}$ (*)

Jmf m. $y(x) = Ae^{-x} + Be^{3x}$ (†) för motsv. probl. m. konst. koeff.
(*) genom att låta e^x bli $|x|$ i lösningen (†).

17.6:2 Lös $y'' + y' - 2y = x$. (Inhomogen)

Lösning: • Motsv. homogena ODE: $y'' + y' - 2y = 0$.

Karakteristisk ekv.: $r^2 + r - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Komplementär lösning

$$y_h(x) = Ce^{-2x} + De^{x}$$

- Partikulärlösn. till inhomogen ODE:

$f(x) = x$, d.v.s. $P_n(x) = x \Rightarrow n = 1$

$\Rightarrow$ Pröva $y_p(x) = x^m A_n(x) = [n=1] =$

$= x^m(A+Bx) =$

$=$ [y_p löser ej homogena ODE:n för $m=0$] $=$

$= x^0(A+Bx) = A+Bx$

Derivera y_p: $y_p'(x) = B \Rightarrow y_p''(x) = 0$

Sätt in y_p, y_p' och y_p'' i inhomogena ODE:n:

$0 + B - 2(A+Bx) = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -(2B+1)x + (B-2A) = 0 \quad \forall x$

$\Leftrightarrow 2B+1 = 0$ och $B-2A = 0$

d.v.s. $B = -1/2$ och $A = \frac{1}{2}B = -1/4$

$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{4}(2x+1)$

$\Longrightarrow$ Allmän lösning $y = y_p + y_h$ är

$y(x) = -\frac{1}{4}(2x+1) + Ce^{-2x} + De^x$

d.v.s. $\boxed{y(x) = Ce^{-2x} + De^x - \frac{1}{4}(2x+1)}$

17.6:8 Lös $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ (Inhomogen)

Lösning: • Motsv. homogena ODE: $y'' + 4y' + 4y = 0$

Karakteristisk ekv.: $r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (r+2)^2 = 0$

d.v.s. dubbelrot $r_{1,2} = -2$

17

$\Rightarrow$ Komplementär lösning

$$y_h(x) = (C+Dx)e^{-2x}$$

- Partikulärlösn. till inhomogen ODE:

$f(x) = e^{-2x} \Rightarrow P_n(x) = 1 \Rightarrow n=0$

$\Rightarrow$ Pröva $y_p(x) = x^m A_n(x) e^{-2x} = [n=0] =$

$= x^m A e^{-2x} =$

$= [m=0 \Rightarrow y_p = Ae^{-2x}$ löser den homogena ODE:n $\Rightarrow$ V.

$m=1 \Rightarrow y_p = Axe^{-2x}$ löser också den homogena ODE:n $\Rightarrow m=2] =$

$= Ax^2e^{-2x}$

Derivera: $y_p'(x) = 2Axe^{-2x} - 2Ax^2e^{-2x} =$

$= 2A(x-x^2)e^{-2x}$

$\Rightarrow y_p''(x) = 2A(1-2x)e^{-2x} - 4A(x-x^2)e^{-2x}$

$= 2A(1-2x-2x+2x^2)e^{-2x} =$

$= 2A(1-4x+2x^2)e^{-2x}$

Sätt in y_p, y_p' och y_p'' i inhomogena ODE:n:

$2A(1-4x+2x^2)e^{-2x} + 8A(x-x^2)e^{-2x} +$

$+ 4Ax^2e^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2A - 8Ax + 4Ax^2 + 8Ax - 8Ax^2 + 4Ax^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2A = 1 \Leftrightarrow A = 1/2$

$\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-2x}$

$\Rightarrow$ Allmän lösning $y = y_p + y_h$ är

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-2x} + (C+Dx)e^{-2x}$$

d.v.s. $\boxed{y(x) = (C + Dx + \frac{1}{2}x^2)e^{-2x}}$

Se även RÖ 13&14 HT09 där jag löst bl.a.

3.7:10 , 3.7:14 , 17.5:6 ,

17.5:10 , 17.6:6 , 17.6:10

Lösningar till dessa återfinns också nedan.

3.7:10 Bestäm den allmänna lösningen till

$$y'' - 4y' + 5y = 0 \qquad (y = y(t))$$

Lösning: Den karaktäristiska ekvationen är

$$r^2 - 4r + 5 = 0$$

med rötter $r = 2 \pm \sqrt{2^2 - 5} = 2 \pm \sqrt{4-5} =$

$$= 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm i$$

vilket ger allmän lösning

$$y(t) = C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t$$

där C_1, C_2 är konstanter.

3.7:14 Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 2 \end{cases} \qquad (y = y(t))$$

19

Lösning: Den karaktäristiska ekvationen är

$$r^2 + 10r + 25 = 0$$

med rötterna $r = -5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 25} =$

$$= -5 \pm \sqrt{25-25} = -5 \quad \text{(dubbel)}$$

Detta ger allmänna lösningen

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-5t}$$

där C_1, C_2 konstanter. Derivering ger

$$y'(t) = C_2 e^{-5t} + (C_1 + C_2 t)e^{-5t}(-5) =$$

$$= (C_2 - 5C_1 - 5C_2 t)e^{-5t}$$

Då fås begynnelsevillkoren

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (C_1 + C_2)e^{-5} = 0 \\ (C_2 - 5C_1 - 5C_2)e^{-5} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -5C_1 - 4C_2 = 2e^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ -5(-C_2) - 4C_2 = 2e^5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ C_2 = 2e^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -2e^5 \\ C_2 = 2e^5 \end{cases}$$

Då blir alltså lösningen

$$y(t) = (-2e^5 + 2e^5 t)e^{-5t}$$

d.v.s. $y(t) = 2(t-1)e^{-5(t-1)}$

17.5:6 Skriv den allmänna lösningen till den linjära DE med konstanta koefficienter som har den karaktäristiska ekvationen

$$(r^2-r-2)^2(r^2-4)^2 = 0.$$

Lösning: Rötterna till den karaktäristiska ekvationen (grad 8) fås genom att hitta nollställena till r^2-r-2 och r^2-4. Vi har

- $r^2-r-2=0 \Leftrightarrow r=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-(-2)} = \frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = \frac{1}{2}\pm\frac{3}{2} = \begin{cases}2\\-1\end{cases}$
- $r^2-4=0 \Leftrightarrow r^2=4 \Leftrightarrow r=\pm 2$

Vi kan alltså faktorisera:

$$(r^2-r-2)^2(r^2-4)^2 = ((r-2)(r-(-1)))^2 \cdot ((r-2)(r-(-2)))^2 = (r-2)^2(r-(-1))^2(r-2)^2(r-(-2))^2 = (r-(-1))^2(r-2)^4(r-(-2))^2$$

d.v.s. rötterna är
- $r_{1,2}=-1$ (dubbelrot)
- $r_{3,\dots,6}=2$ (fyrfaldig rot)
- $r_{7,8}=-2$ (dubbelrot)

Detta innebär att de 8 linjärt oberoende lösningarna till DE:en är

$$e^{-t}, te^{-t} \;;\; e^{2t}, te^{2t}, t^2e^{2t}, t^3e^{2t} \;;\; e^{-2t}, te^{-2t}$$

21 Den allmänna lösningen är därför

$$y(x) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + (C_3 + C_4 t + C_5 t^2 + C_6 t^3)e^{2t} + (C_7 + C_8 t)e^{-2t}, \quad C_1, \dots, C_8 \in \mathbb{R}$$

17.5:10 Bestäm de allmänna lösningarna till Eulerekvationen

$$x^2 y'' - xy' + 5y = 0.$$

Lösning: Den karaktäristiska ekvationen är

$$r(r-1) - r + 5 = 0$$

d.v.s. $r^2 - 2r + 5 = 0$

med lösningar $r = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$

Detta innebär att den allmänna lösningen är

$$y(x) = C_1 |x|^1 \cos(2\ln|x|) + C_2 |x|^1 \sin(2\ln|x|) = C_1 |x| \cos(2\ln|x|) + C_2 |x| \sin(2\ln|x|)$$

där C_1, C_2 godtyckliga reella konstanter.

17.6:6 Lös $y'' + 4y = x^2$.

Lösning: Homogen ekvation: $y'' + 4y = 0$.

Karaktäristisk ekvation: $r^2 + 4 = 0$

$$r^2 = -4$$

med lösningarna $r = \pm 2i$

$$\Longrightarrow y_h = C_1 e^{0\cdot x} \cos 2x + C_2 e^{0\cdot x} \sin 2x = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

där C_1, C_2 godtyckliga reella konstanter.

Vi försöker nu hitta en partikulärlösning y_p till den inhomogena, ursprungliga ekvationen. Det verkar här rimligt med ansatsen

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$\Rightarrow y_p' = 2Ax + B$$

$$\Rightarrow y_p'' = 2A$$

vilket vid insättning ger

$$2A + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

$$4Ax^2 + 4Bx + (2A + 4C) = x^2$$

Vi identifierar koefficienterna:

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 4B = 0 \\ 2A + 4C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/4 \\ B = 0 \\ C = -\frac{2}{4}A = -2/16 = -1/8 \end{cases}$$

d.v.s. $y_p = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$ vilket ger allmän lösning

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

17.6:10 Lös $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin x$

Lösning: Homogen ekvation: $y'' + 2y' + 2y = 0$

Karakteristisk ekvation: $r^2 + 2r + 2 = 0$

med lösningarna $r = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$

$$\Longrightarrow \quad y_h = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x$$

där C_1, C_2 godtyckliga reella konstanter

Vi försöker nu hitta en partikulärlösning y_p till den inhomogena, ursprungliga ekvationen. Eftersom $e^{-x}\sin x$ i högerledet till den inhomogena ekvationen löser den homogena ekvationen (se y_h ovan, välj $C_1=0, C_2=1$) så prövar vi en ansats av typen

$$y_p = Axe^{-x}\cos x + Bxe^{-x}\sin x$$

OBS!!!

d.v.s. liknande y_h med med andra konstanter och med faktor x. Derivera y_p:

$$y_p' = Ae^{-x}\cos x - Axe^{-x}\cos x - Axe^{-x}\sin x + Be^{-x}\sin x - Bxe^{-x}\sin x + Bxe^{-x}\cos x =$$

$$= (A+(B-A)x)e^{-x}\cos x + (B-(A+B)x)e^{-x}\sin x$$

$$y_p'' = (B-A)e^{-x}\cos x - (A+(B-A)x)e^{-x}\cos x - (A+(B-A)x)e^{-x}\sin x - (A+B)e^{-x}\sin x - (B-(A+B)x)e^{-x}\sin x + (B-(A+B)x)e^{-x}\cos x =$$

$$= (B-A-A-Bx+Ax+B-Ax-Bx)e^{-x}\cos x + (-A-Bx+Ax-A-B-B+Ax+Bx)e^{-x}\sin x =$$

$$= 2((B-A)-Bx)e^{-x}\cos x + 2((-A-B)+Ax)e^{-x}\sin x$$

vilket vid insättning ger

$$\begin{aligned} e^{-x}\sin x = \; & 2((B-A)-Bx)e^{-x}\cos x + \\ & + 2((-A-B)+Ax)e^{-x}\sin x + \\ & + 2(A+(B-A)x)e^{-x}\cos x + \\ & + 2(B-(A+B)x)e^{-x}\sin x + \\ & + 2Axe^{-x}\cos x + 2Bxe^{-x}\sin x = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (2B-2A-2Bx+2A+2Bx-2Ax+2Ax)e^{-x}\cos x + \\ &+ (-2A-2B+2Ax+2B-2Ax-2Bx+2Bx)e^{-x}\sin x = \end{aligned}$$

$$= 2Be^{-x}\cos x - 2Ae^{-x}\sin x$$

Vi identifierar koefficienterna:

$$2B = 0, \quad -2A = 1 \Leftrightarrow B = 0, \; A = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \; y_p = -\frac{1}{2}xe^{-x}\cos x$$

vilket ger allmän lösning

$$y = y_p + y_h = -\frac{1}{2}xe^{-x}\cos x + e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$$