①

Föreläsning 13

Numerisk ekvationslösning

Vi vill bestämma rötter till ekvationen $f(x)=0$. Ofta kan man ej bestämma rötter exakt, då måste man använda alternativa metoder, t.ex. s.k. numeriska metoder där man följer en algoritm.

Bisektionsmetoden:

Detta är en dålig metod (långsam konvergens) men principiellt viktig och är en robust metod.

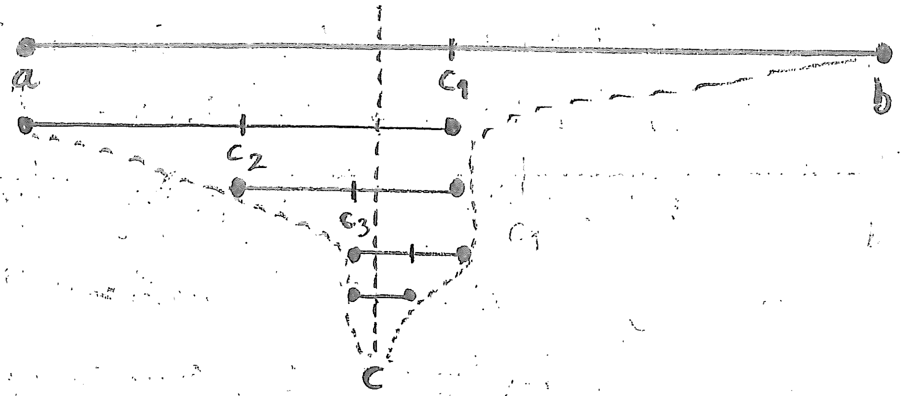
Bisektionsmetoden baseras på Satsen om mellanliggande värden. Antag därför f kontinuerlig.

Låt $f(a)$ och $f(b)$ ha olika tecken, då finns alltid en punkt $c \in (a,b)$ s.a. $f(c)=0$.

- Låt $c_1 = \frac{a+b}{2}$, d.v.s. mittpunkten mellan a och b.
- Beräkna $f(c_1)$ och jämför med $f(a)$ och $f(b)$, om $f(c_1)$ har samma tecken som $f(a)$ så blir nya intervallet $[c_1, b]$, annars $[a, c_1]$. Antag det senare.
- Låt $c_2 = \frac{a+c_1}{2}$, mittpunkt mellan a och c_1
- Beräkna $f(c_2)$. Om $f(c_2)$ samma tecken som $f(a)$ så nytt intervall $[c_2, c_1]$, annars $[a, c_2]$.
- Upprepa proceduren tills önskad noggrannhet uppnåtts.

Vi har nu ett intervall där nollstället c ligger.

Se figur:



Exempel: Lös $x^3 - x - 1 = 0$ med bisektionsmetoden till en noggrannhet så att felet till sitt absolutbelopp blir mindre än 0.01.

Lösning: Låt $f(x) = x^3 - x - 1$.

Notera att $f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$

och $f(2) = 8 - 2 - 1 = 5 > 0$

$\Rightarrow$ Nollstället till f finns inuti intervallet $[1, 2]$. Detta är vårt startintervall $[a, b]$.

$\Rightarrow c_1 = \dfrac{1+2}{2} = 1.5 \Rightarrow f(c_1) = 1.5^3 - 1.5 - 1 = 0.875 > 0$

$\Rightarrow$ Nollställe finns i $[1, c_1] = [1, 1.5]$

$\Rightarrow c_2 = \dfrac{1+1.5}{2} = 1.25 \Rightarrow f(c_2) = 1.25^3 - 1.25 - 1 = -0.296875 < 0$

$\Rightarrow$ Nollställe finns i $[c_2, c_1] = [1.25, 1.5]$

$\Rightarrow c_3 = 1.375 \Rightarrow f(c_3) = 0.2246\ldots > 0$

$\Rightarrow$ Nollställe finns i $[c_2, c_3] = [1.25, 1.375]$

$\Rightarrow c_4 = 1.3125 \Rightarrow f(c_4) = -0.0515\ldots < 0$

$\Rightarrow$ Nollställe finns i $[c_4, c_3] = [1.3125, 1.375]$

$\Rightarrow c_5 = 1.34375 \Rightarrow f(c_5) = 0.0826\ldots > 0$.

③

$\Rightarrow$ Nollställe finns i $[c_4, c_5] = [1.3125, 1.343...]$

$\Rightarrow c_6 = 1.32812... \Rightarrow f(c_6) = 0.0145... > 0$

$\Rightarrow$ Nollställe i $[c_4, c_6] = [1.3125, 1.32812...]$

$\Rightarrow c_7 = 1.32031... \Rightarrow f(c_7) = -0.0187... < 0$

$\Rightarrow$ Nollställe i $[c_7, c_6] = [1.32031..., 1.32812...]$

Notera nu att $c_6 - c_7 = 0.00781... < 0.01$

Mittpunkten $c_8 = \frac{c_7 + c_6}{2} = 1.3242...$ är alltid ett nollställe till $f(x)$ med ett fel < 0.01.

$\boxed{\text{Lösningen till ekvationen är } 1.3242... \text{ med ett fel mindre än } 0.01.}$ □

(Notera: • Exakt lösning: 1.324717957...
• Man kunde ha svarat med godtycklig punkt på intervallet $[c_7, c_6]$.)

Fixpunktsmetoden: Mycket effektivare än bisektionsmetoden, men mindre robust.

Metoden grundar sig på följande sats:

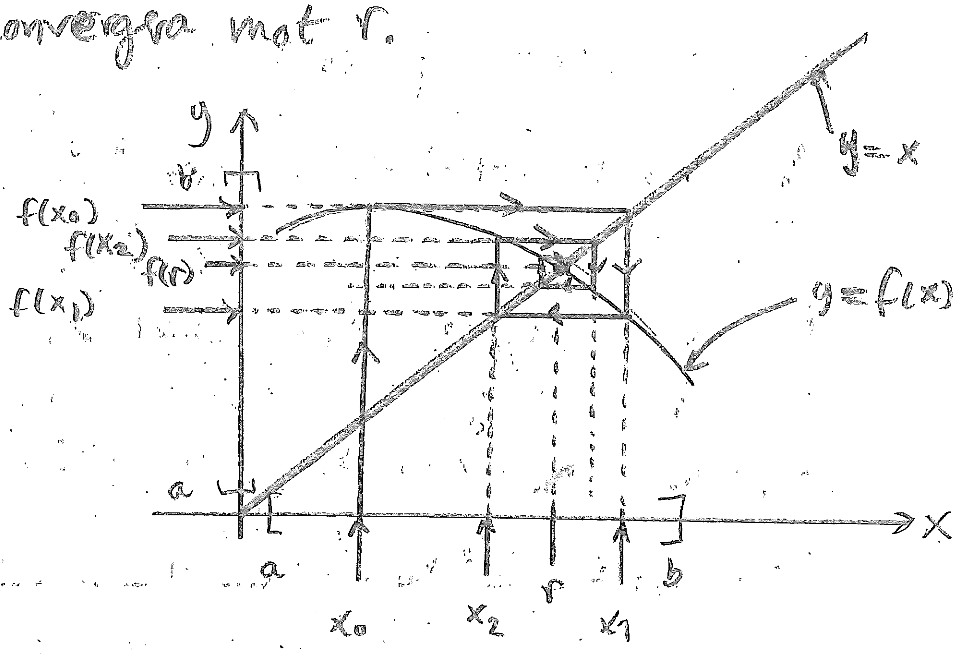
Fixpunktssatsen: Antag f definierad på intervall $I = [a, b]$ och uppfyller villkoren

(i) $x \in I \Rightarrow f(x) \in I$

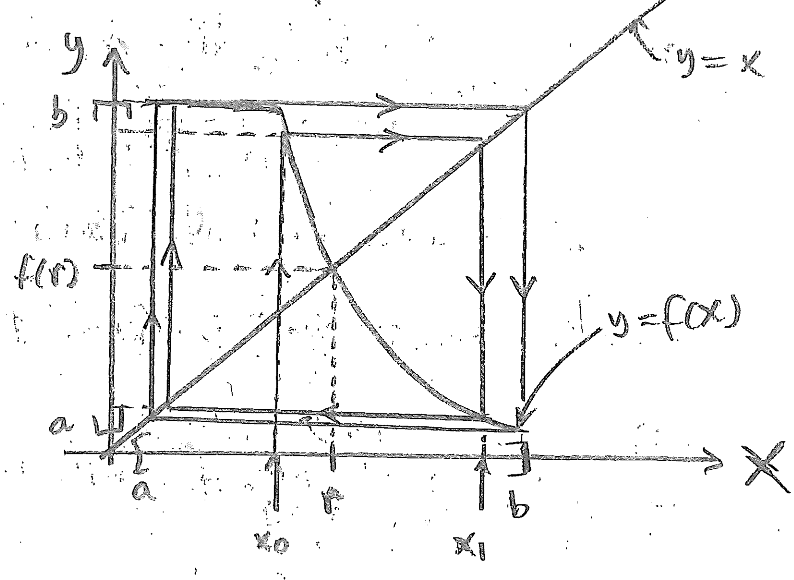
(ii) Finns konstant $K \in (0,1)$ s.a. för varje $u, v \in I$ så gäller
$$|f(u) - f(v)| \leq K|u - v|$$

Då har f en unik fixpunkt $r \in I$, d.v.s. punkt sådan att $f(r)=r$, och om $x_0 \in I$ så kommer följden $\{x_n\}$, där $x_{n+1} = f(x_n)$, $n=0,1,2,\dots$, att konvergera mot r.

Figur:



Villkoret (ii) ser till så att lutningen inte är för stor, då kan följande hända:



d.v.s. vi får ej konvergens mot fixpunkten r där $f(r)=r$.

Exempel: Finn en rot till ekvationen

$$\cos x - 5x = 0 \qquad (*)$$

⑤ Lösning: Vill skriva (*) på formen $f(x) = x$ för något f:

$$\cos x - 5x = 0$$
$$\cos x = 5x$$
$$\frac{1}{5}\cos x = x$$

d.v.s. $f(x) = \frac{1}{5}\cos x$.

Det gäller alltså att $x_{n+1} = f(x_n) = $
$$= \frac{1}{5}\cos x_n$$

Välj en lämplig startpunkt x_0.
Verkar rimligt att roten ligger nära 0 eftersom $\cos x \approx 1$ för små x. Låt $x_0 = 0.2$.

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{5}\cos x_0 = \frac{1}{5}\cos 0.2 = 0.196013315\ldots$

$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{5}\cos x_1 = \frac{1}{5}\cos 0.196013315\ldots =$
$= 0.196170163\ldots$

$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{5}\cos x_2 = \frac{1}{5}\cos 0.196170163\ldots =$
$= 0.196164051\ldots$

$\Rightarrow x_4 = \frac{1}{5}\cos x_3 = 0.196164290\ldots$

$\Rightarrow x_5 = \frac{1}{5}\cos x_4 = 0.196164280\ldots$

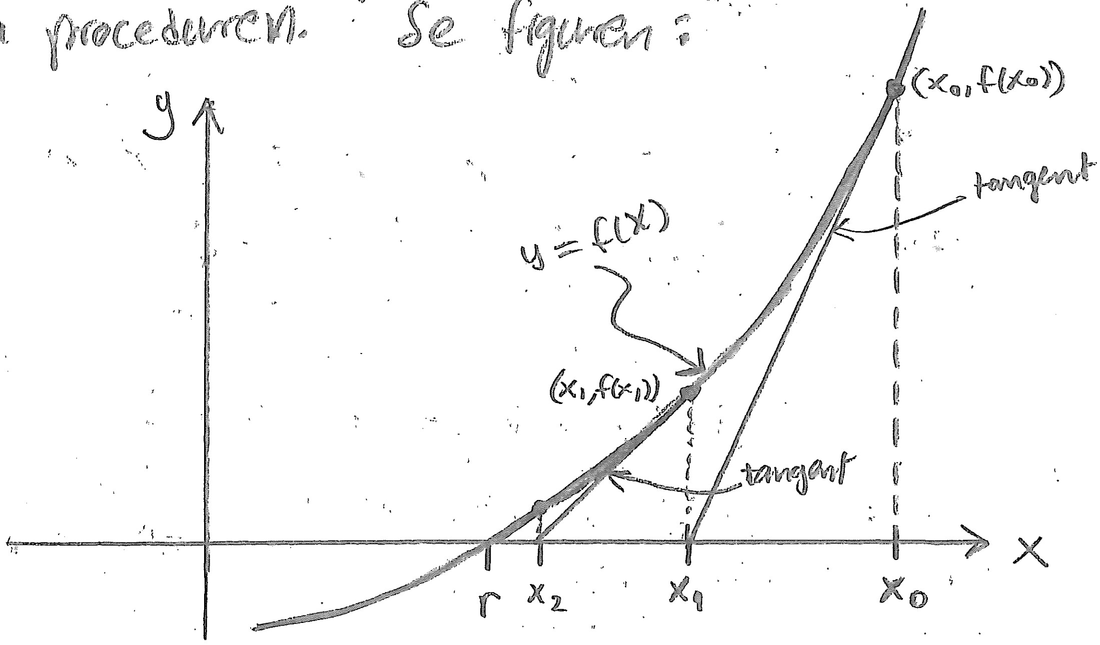
$\Rightarrow x_6 = 0.196164281\ldots$

$\Rightarrow x_7 = 0.196164281\ldots$
$\vdots$

d.v.s. verkar rimligt att roten är $0.19616428\ldots$ $\square$

Newtons metod: En variant av fixpunktsmetoden. Vi söker en rot till $f(x) = 0$, d.v.s. ett tal r s.a. $f(r)=0$.

Börja med en gissning $x=x_0$. Dra tangenten till f i $(x_0, f(x_0))$ och finn x_1 som är skärningen mellan tangenten och x-axeln. Upprepa proceduren. Se figuren:



x_{n+1} är skärningen mellan tangenten till $f(x)$ i $x=x_n$ och x-axeln för varje $n \geq 0$.

Tangentlinjens ekvation:

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x-x_n)$$

$$\left(\text{ty } f'(x_n) = \frac{y-f(x_n)}{x-x_n}\right)$$

Per definition så ligger $(x_{n+1}, 0)$ också på tangentlinjen:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)$$

d.v.s.
$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}, \quad n \geq 0$$

Detta är <u>Newtons</u> (eller <u>Newton-Raphsons</u>) <u>metod</u>.
(Eg. formeln för metoden.)

⑦ Detta är en fixpunktsmetod för funktionen

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \text{så att} \quad x_{n+1} = g(x_n).$$

Exempel: Använd Newtons metod för att finna den enda reella roten till $x^3 - x - 1 = 0$ med tio decimalers noggrannhet.

Lösning: Låt $f(x) = x^3 - x - 1$. Vi vill lösa ekvationen $f(x) = 0$. Notera att

$$\begin{cases} f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0 \\ f(2) = 8 - 2 - 1 = 5 > 0 \end{cases}$$

d.v.s. enligt Satsen om mellanliggande värden finns minst en rot i $[1,2]$. Då är det meningsfullt att använda Newtons metod och vi använder t.ex. startvärdet $x_0 = 1.5$.

Eftersom $f'(x) = 3x^2 - 1$

så blir i det här fallet Newtons metods formel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} =$$

$$= x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1} =$$

$$= \frac{x_n(3x_n^2 - 1) - (x_n^3 - x_n - 1)}{3x_n^2 - 1} =$$

$$= \frac{3x_n^3 - x_n - x_n^3 + x_n + 1}{3x_n^2 - 1} =$$

$$= \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 - 1}$$

och vi får

$$x_1 = \frac{2x_0^3+1}{3x_0^2-1} = \frac{2\cdot 1.5^3+1}{3\cdot 1.5^2-1} = 1.347826086695\ldots$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{2x_1^3+1}{3x_1^2-1} = \frac{2\cdot 1.3478\ldots^3+1}{3\cdot 1.3478\ldots^2-1} = 1.32520039895\ldots$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{2x_2^3+1}{3x_2^2-1} = 1.324718173999\ldots$$

$$\Rightarrow x_4 = \frac{2x_3^3+1}{3x_3^2-1} = 1.32471795724\ldots$$

$$\Rightarrow x_5 = \frac{2x_4^3+1}{3x_4^2-1} = 1.32471795724\ldots$$

$$\vdots$$

Det verkar alltså som att $\underline{r = 1.3247179572}$ är roten till 10 decimalers noggrannhet. $\square$

<u>Sats:</u> (Felgränser för Newtons metod)

Antag att f, f' och f'' är kontinuerliga på intervall I som innehåller x_n, x_{n+1} och en rot $x = r$ till $f(x) = 0$.

Antag också att det finns $K > 0$ och $L > 0$ så att $\forall x \in I$ vi har

(i) $|f''(x)| \leq K$

(ii) $|f'(x)| \geq L$

Då gäller

(a) $|x_{n+1} - r| \leq \frac{K}{2L} |x_{n+1} - x_n|^2$

(b) $|x_{n+1} - r| \leq \frac{K}{2L} |x_n - r|^2$

⑨ Villkor (i) innebär att tangentlinjen inte ändras för snabbt och (ii) säger att tangentlinjen inte är för horisontell.

Numerisk integrering

Vi vill kunna approximera en bestämd integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

genom att använda ett ändligt antal värden för funktionen f mellan a och b.
Vi kommer titta på tre metoder:

- Trapetsformeln (Förel. 13)
- Mittpunktsformeln (Förel. 14)
- Simpsons formel (— " —)

Dessa är metoder för s.k. numerisk integrering.

Trapetsformeln:

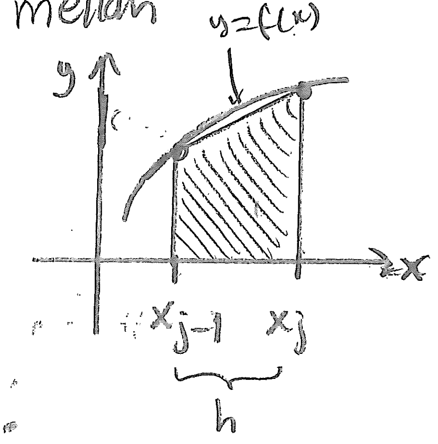
Antag $f(x)$ kontinuerlig på $[a,b]$.
Dela upp $[a,b]$ i n st delintervall av samma längd $h = \frac{b-a}{n}$ m.h.a. de $n+1$ punkterna

$$x_0 = a,\; x_1 = a+h,\; x_2 = a+2h, \dots, x_n = a+nh = b$$

Funktionsvärdet i dessa punkter antas vara kända:

$$y_0 = f(x_0),\; y_1 = f(x_1),\; y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$$

Approximera ytan under grafen mellan x_{j-1} och x_j som en trapets:



Arean hos trapetsen är basen h ggr medelvärdet $\frac{y_{j-1}+y_j}{2}$ hos höjden, d.v.s. $h\frac{y_{j-1}+y_j}{2}$.

Summera alla (mellan a och b) n st trapetsers areor och man får:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n} h\frac{y_{j-1}+y_j}{2} =$$

$$= h\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\dots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)$$

$$= h\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\dots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right)$$

__Definition:__ __Trapetsformeln__ med n delintervall som approximerar $\int_a^b f(x)dx$ betecknas T_n och ges av

$$T_n = h\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\dots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right)$$

__Exempel:__ Beräkna trapetsformelapproximationerna T_4, T_8 och T_{16} för $I=\int_1^2 \frac{dx}{x}$

__Lösning:__ • $\underline{n=4} \Rightarrow h = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow T_4 = h\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+y_3+\frac{1}{2}y_4\right) =$$

(11)

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{5/4} + \frac{1}{6/4} + \frac{1}{7/4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{0.6970238\ldots}}$$

• $\underline{n=8} \Rightarrow h = \frac{2-1}{8} = \frac{1}{8}$

$$\Rightarrow T_8 = h\left(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_7 + \tfrac{1}{2}y_8\right) =$$

ger $4T_4$

$$= \frac{1}{8}\left(4T_4 + y_1 + y_3 + \cdots + y_7\right) =$$

$$= \frac{1}{2}T_4 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{9/8} + \frac{1}{11/8} + \frac{1}{13/8} + \frac{1}{15/8}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}T_4 + \frac{1}{8}\left(\frac{8}{9} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15}\right) =$$

$$= \underline{\underline{0.6941218\ldots}}$$

• $\underline{n=16} \Rightarrow h = \frac{2-1}{16} = \frac{1}{16}$

$$\Rightarrow T_{16} = h\left(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{15} + \tfrac{1}{2}y_{16}\right) =$$

ger $8T_8$

$$= \frac{1}{16}\left(8T_8 + y_1 + y_3 + \cdots + y_{15}\right) =$$

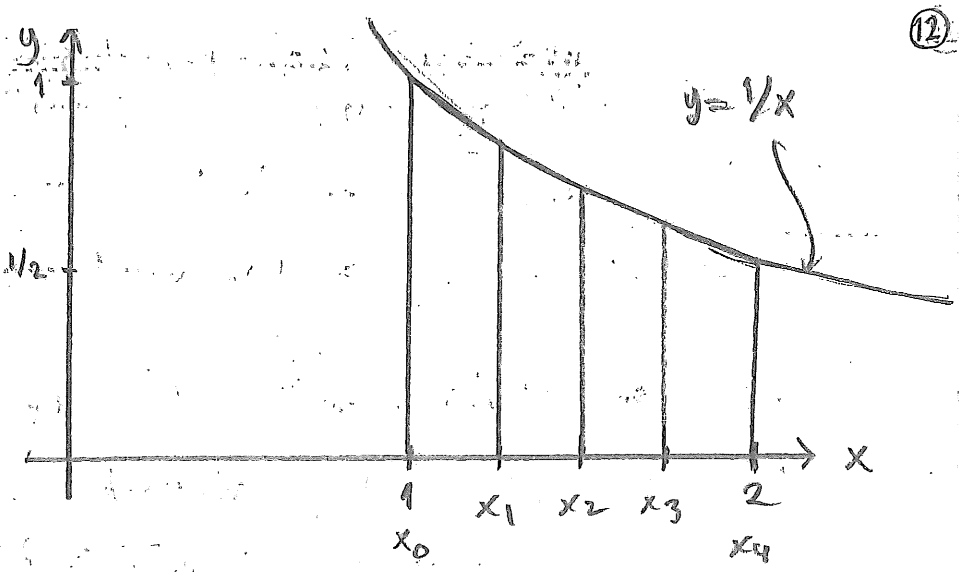
$$= \frac{1}{2}T_8 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{17/16} + \frac{1}{19/16} + \frac{1}{21/16} + \frac{1}{23/16} + \frac{1}{25/16} + \frac{1}{27/16} + \frac{1}{29/16} + \frac{1}{31/16}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}T_8 + \frac{1}{16}\left(\frac{16}{17} + \frac{16}{19} + \frac{16}{21} + \frac{16}{23} + \frac{16}{25} + \frac{16}{27} + \frac{16}{29} + \frac{16}{31}\right) =$$

$$= \underline{\underline{0.6933912\ldots}} \qquad \square$$

(Jmf. med det exakta värdet $\ln 2 = 0.6931471\ldots$)

T_4:



Notera att eftersom $f(x) = 1/x$ konvex på $x>0$ så överskattar T_n integralen.

Nästa föreläsning: Mittpunktsformeln och Simpsons formel.

(13)

Några jämna uppgifter

1.4:40 Lös $\cos x - x = 0$ med bisektionsmetoden till tre decimalers noggrannhet.

Lösning: Låt $f(x) = \cos x - x$, ska lösa $f(x) = 0$.

Vi ser att: $\begin{cases} f(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0 \\ f(1) = \underbrace{\cos 1}_{<1} - 1 < 1 - 1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ roten ligger i intervallet $[0, 1]$.

$f(\frac{0+1}{2}) = f(0.5) = \cos 0.5 - 0.5 = 0.377\ldots > 0$

$\Rightarrow$ rot i intervallet $[0.5, 1]$

$f(\frac{0.5+1}{2}) = f(0.75) = \cos 0.75 - 0.75 = -0.018\ldots < 0$

$\Rightarrow$ rot i $[0.5, 0.75]$

$f(\frac{0.5+0.75}{2}) = f(0.625) = \cos 0.625 - 0.625 = 0.185 > 0$

$\Rightarrow$ rot i $[0.625, 0.75]$

$f(\frac{0.625+0.75}{2}) = f(0.6875) = \cos 0.6875 - 0.6875 =$
$= 0.085\ldots > 0$

$\Rightarrow$ rot i $[0.6875, 0.75]$

$f(\frac{0.6875+0.75}{2}) = 0.033\ldots > 0 \Rightarrow [0.7187\ldots, 0.75]$

$f(\frac{0.7187\ldots+0.75}{2}) = 0.0078\ldots > 0 \Rightarrow [0.7343\ldots, 0.75]$

$f(\frac{0.7343\ldots+0.75}{2}) = -0.0051\ldots < 0 \Rightarrow [0.7343\ldots, 0.7421\ldots]$

$f(\frac{0.7343\ldots+0.7421\ldots}{2}) = 0.0013\ldots > 0 \Rightarrow [0.7382\ldots, 0.7421\ldots]$

$f(\frac{0.7382\ldots+0.7421\ldots}{2}) = -0.0019\ldots < 0 \Rightarrow [0.7382\ldots, 0.7402\ldots]$

$f\left(\frac{0.7382...+0.7402...}{2}\right) = -0.00028... < 0 \Rightarrow [0.7382..., 0.7392...]$

$f\left(\frac{0.7382...+0.7392...}{2}\right) = 0.00052... > 0 \Rightarrow [0.7387..., 0.7392...]$

$f\left(\frac{0.7387...+0.7392...}{2}\right) = 0.00011... > 0 \Rightarrow [0.7390..., 0.7392...]$

$\Rightarrow$ Roten till ekvationen ligger i intervallet
$[0.7390..., 0.7392...]$

$\Rightarrow$ Roten är <u>0.739</u> till 3 decimalers noggrannhet.

4.2:6

Lös $x^3+10x-10=0$ med fixpunktsmetoden till 5 decimalers noggrannhet.

<u>Lösning:</u> Skriv på formen $f(x)=x$:

$$x^3+10x-10=0$$
$$10-x^3=10x$$
$$1-\frac{1}{10}x^3=x$$

d.v.s. $f(x)=1-\frac{1}{10}x^3$.

Fixpunktsformeln: $x_{n+1}=f(x_n)$

Behöver x_0. $f(1)=1-\frac{1}{10}1^3=1-\frac{1}{10}=$

$=0.9 \approx 1$,

d.v.s. $x_0=1$ ligger rimligen nära roten

$x_1=f(x_0)=f(1)=[\text{enl. ovan}]=0.9$

$x_2=f(x_1)=f(0.9)=1-\frac{1}{10}\cdot 0.9^3=0.9271$

$x_3=f(0.9271)=1-\frac{1}{10}\cdot 0.9271^3=0.920314...$

$x_4=f(0.920314...)=1-\frac{1}{10}\cdot 0.920314...^3=0.922051...$

$x_5=1-\frac{1}{10}\cdot 0.922051...^3=0.921609...$

$x_6 = 1 - \frac{1}{10} \cdot 0.921609\ldots^3 = 0.921721\ldots$

$x_7 = 1 - \frac{1}{10} \cdot 0.921721\ldots^3 = 0.921693\ldots$

$x_8 = 1 - \frac{1}{10} \cdot 0.921693\ldots^3 = 0.921700\ldots$

$x_9 = 1 - \frac{1}{10} \cdot 0.921700\ldots^3 = 0.921698\ldots$

$x_{10} = 1 - \frac{1}{10} \cdot 0.921698\ldots^3 = 0.921699\ldots$

$x_{11} = 1 - \frac{1}{10} \cdot 0.921699\ldots^3 = 0.921698\ldots$

$x_{12} = 1 - \frac{1}{10} \cdot 0.921698\ldots^3 = 0.921699\ldots$

$\vdots$

Verkar till fem decimalers noggrannhet ha roten $\underline{\underline{0.92170}}$.

4.2:10 Finn roten till $x^3+2x^2-2=0$ mellan 0 och 1 med Newtons metod med så många decimalers noggrannhet som möjligt.

Lösning: Newtons metod: Ekvation $f(x)=0$

$\Rightarrow$ Newtons formel $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Här är $f(x) = x^3+2x^2-2$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2+4x$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3+2x_n^2-2}{3x_n^2+4x_n} =$$

$$= \frac{x_n(3x_n^2+4x_n)-(x_n^3+2x_n^2-2)}{3x_n^2+4x_n} =$$

$$= \frac{2x_n^3+2x_n^2+2}{3x_n^2+4x_n} = 2\,\frac{x_n^3+x_n^2+1}{3x_n^2+4x_n}$$

Låt oss starta med $x_0 = 0.5 \in [0,1]$ och nöja oss med 10 decimalers noggrannhet.

$$x_1 = 2\,\frac{x_0^3 + x_0^2 + 1}{3x_0^2 + 4x_0} = 2\,\frac{0.5^3+0.5^2+1}{3\cdot 0.5^2+4\cdot 0.5} = 1$$

$$x_2 = 2\,\frac{x_1^3+x_1^2+1}{3x_1^2+4x_1} = 2\,\frac{1^3+1^2+1}{3\cdot 1^2+4\cdot 1} = 0.857142\ldots$$

$$x_3 = 2\,\frac{0.857\ldots^3+0.857\ldots^2+1}{3\cdot 0.857\ldots^2+4\cdot 0.857\ldots} = 0.839544\ldots$$

$$x_4 = 2\,\frac{0.839\ldots^3+0.839\ldots^2+1}{3\cdot 0.839\ldots^2+4\cdot 0.839\ldots} = 0.83928681006\ldots$$

$$x_5 = 0.8392867552\,1\ldots$$

$$x_6 = 0.8392867552\,1\ldots$$

$$x_7 = 0.8392867552\,1\ldots$$

d.v.s. till 10 decimalers noggrannhet är

$\underline{0.8392867552}$ en rot till ekvationen

mellan 0 och 1.

<u>4.2:20</u> $f(x)=x^2$, ekvation $f(x)=0$ har lösningen $x=0$. Finn x_1, x_2 och x_3 med Newtons metod givet $x_0=1$.

<u>Lösning:</u> $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} =$$

$$= x_n - \frac{1}{2}x_n = \frac{1}{2}x_n$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_0 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \underline{\underline{1/2}}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{1/4}}$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \underline{\underline{1/8}}$$

(17)

a) <u>Bestäm x_n:</u> $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$, $x_0 = 1$.

Verkar som att $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

d.v.s. $\boxed{x_n = 2^{-n}}$ (kan bevisas med induktion.)

b) <u>Antal iterationer (d.v.s. värdet på n) då felet hos x_n är < 0.0001 till absolutbeloppet:</u>

$x_n = 2^{-n}$, $r = 0$ (roten)

$\Rightarrow$ Abs.-belopp av felet är

$|x_n - r| = |2^{-n} - 0| = 2^{-n}$

Detta är $< 0.0001 = 10^{-4}$ omm ("om och endast om")

$2^{-n} < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{-n}} > \frac{1}{10^{-4}} \Leftrightarrow 2^n > 10^4$

Notera att $2^{13} = 8192 < 10^4$

men $2^{14} = 16\,384 > 10^4$

d.v.s. $n \geq 14$ för $2^n > 10^4$

Det krävs minst <u>14 iterationer</u> för att få ett fel som till absolutbeloppet är < 0.0001.

c) <u>Antal iterationer för att få $|f(x_n)| < 0.0001$:</u>

$|f(x_n)| < 0.0001 \Leftrightarrow x_n^2 < 10^{-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2^{-n})^2 < 10^4 \Leftrightarrow 2^{-2n} < 10^{-4} \Leftrightarrow 2^{2n} > 10^4$

enligt ovan måste $2n \geq 14 \Leftrightarrow n \geq 7$

Det krävs minst <u>7 iterationer</u> för att få $|f(x_n)| < 0.0001$.

d) Varför konvergerar Newtons metod så långsamt här jämfört med i andra exempel? (18)

Detta beror på att i roten $x=0$ så gäller att derivatan $f'(x)$ är noll.
Se villkor (ii) i satsen på sid. 8 där $|f'(x)| \geq L$ för alla x kring roten krävs för att garantera felgränserna (a) och (b) i samma sats.