①

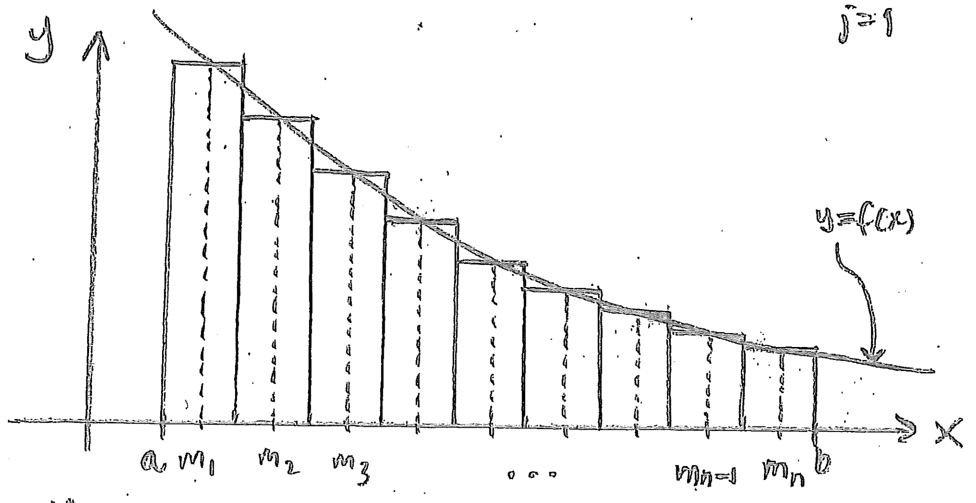
Föreläsning 14

Låt oss fortsätta med numerisk integrering.

Mittpunktsformeln: Detta är Riemannsumman $R(f, P, c)$ där $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ tas i mitten på respektive intervall.

Definition: Om $h = \frac{b-a}{n}$, låt $m_j = a + (j - \frac{1}{2})h$ för $1 \leq j \leq n$. Mittpunktsformeln med n delintervall som approximerar $\int_a^b f(x)\,dx$ betecknas M_n och ges av

$$M_n = h\left(f(m_1) + f(m_2) + \cdots + f(m_n)\right) = \sum_{j=1}^{n} f(m_j)$$



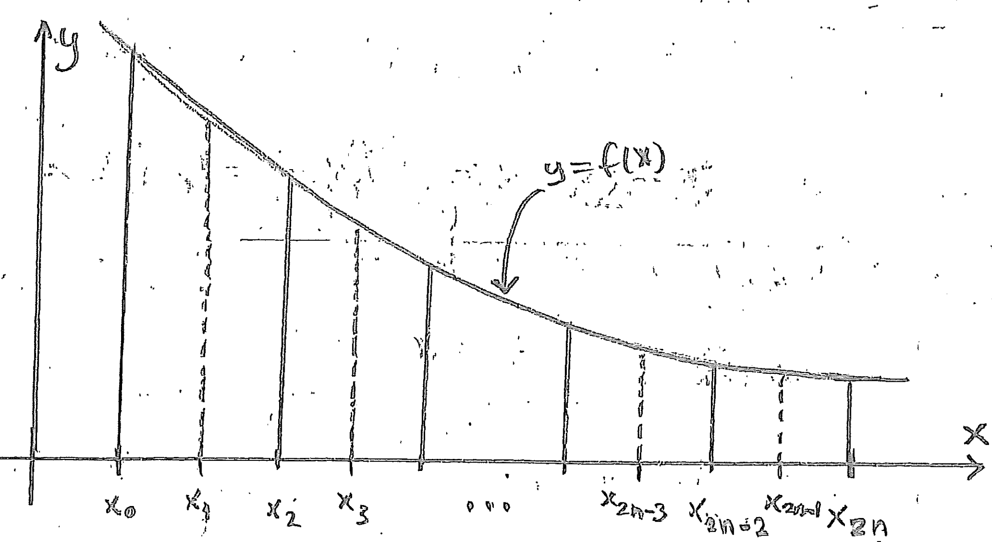
Eftersom värden tas i mittpunkter på delintervall kan ej dessa återanvändas vid fördubbling av antalet delintervall. Däremot så gäller det att

$$T_{2n} = \frac{h}{2}\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{2n-1}) + \frac{1}{2}f(x_{2n})\right) =$$

②

$$= \frac{1}{2}\Big(h\big(\tfrac{1}{2} f(x_0)+f(x_2)+\dots+f(x_{2n-2})+\tfrac{1}{2} f(x_{2n})\big)+$$
$$+\,h\big(f(x_1)+f(x_3)+\dots+f(x_{2n-3})+f(x_{2n-1})\big)\Big)$$
$$= \frac{1}{2}(T_n+M_n),$$

Se figuren:



Ett bra sätt att få högre och högre noggrannhet på är att räkna ut:

$$T_n,\ M_n,\ T_{2n} = \frac{T_n+M_n}{2},\ M_{2n},\ T_{4n} = \frac{T_{2n}+M_{2n}}{2},\ M_{4n},\ \dots$$

tills önskad noggrannhet uppnås (d.v.s. två på varandra följande termer är tillräckligt nära varandra).

Notera att M_n är en noggrannare uppskattning av integralen än vad T_n är.

<u>Sats:</u> Om f har en kontinuerlig andraderivata på $[a,b]$ och uppfyller $|f''(x)| \le K$ där så gäller feluppskattningarna

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n\right| \le \frac{K(b-a)}{12}h^2 = \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

③

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - M_n\right| \le \frac{K(b-a)}{24}h^2 = \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

där $h = \frac{a-b}{n}$.

Notera: • Det som avgör hur stort felet blir är $|f''(x)|$.
• Felet går som n^{-2} (d.v.s. fel $= O(n^{-2})$).

Exempel: Beräkna begränsningar för felet till T_4, T_8, T_{16}, M_4 och M_8 för $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ och jämför med exakta felen.

Lösning: Vi har redan räknat ut för trapetsformeln:

$T_4 = 0.6970238\ldots$, $T_8 = 0.6941218\ldots$, $T_{16} = 0.6933912\ldots$

För mittpunktsformeln får vi:

$$M_4 = h(f(m_1) + f(m_2) + f(m_3) + f(m_4)) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+1/8} + \frac{1}{1+1/4+1/8} + \frac{1}{1+1/2+1/8} + \frac{1}{1+3/4+1/8}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{8}{9} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15}\right) = 0.6912198\ldots$$

$$M_8 = h(f(m_1) + f(m_2) + \ldots + f(m_8)) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{1+1/16} + \frac{1}{1+1/8+1/16} + \frac{1}{1+1/4+1/16} + \ldots + \frac{1}{1+7/8+1/16}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{16}{17} + \frac{16}{19} + \frac{16}{21} + \ldots + \frac{16}{31}\right) =$$

$$= 0.6926605\ldots$$

Då blir de exakta felen (med $I = \ln 2$):

$$|I-T_4| = 0.0038766\ldots$$
$$|I-M_4| = 0.0019272\ldots$$
$$|I-T_8| = 0.0009746\ldots$$
$$|I-M_8| = 0.0004866\ldots$$
$$|I-T_{16}| = 0.0002440\ldots$$

$$f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2 \Rightarrow f''(x) = 2/x^3$$
$$\Rightarrow |f''(x)| = 2/x^3 \leq 2/1^3 = 2 \text{ på } [1,2],$$

d.v.s. $K=2$ i satsen. Vi får feluppskattningarna

$$|I-T_4| \leq \frac{2\cdot(2-1)}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{96} = \underline{\underline{0.0104166\ldots}}$$

$$|I-M_4| \leq \frac{2\cdot(2-1)}{24}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{192} = \underline{\underline{0.0052083\ldots}}$$

$$|I-T_8| \leq \frac{2\cdot(2-1)}{12}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{384} = \underline{\underline{0.0026041\ldots}}$$

$$|I-T_{16}| \leq \frac{2\cdot(2-1)}{12}\left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{1536} = \underline{\underline{0.0006510\ldots}}$$

Vi ser att de <u>uppskattade felen är mycket större än de exakta.</u> Detta beror på att f'' egentligen är mycket mindre än $K=2$ på det mesta av intervallet $[1,2]$. $\square$

<u>Simpsons formel:</u> Trapetsformeln approximerade $y=f(x)$ som rät linje mellan $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ och $(x_i, f(x_i))$ på delintervall $i = 1, 2, \ldots, n$.
Antag att vi istället approximerar $y=f(x)$ som

⑤ en andragradskurva över två delintervall, då bör man få ett mindre fel.

Låt n vara jämnt och betrakta delintervallet $[x_{j-1}, x_j]$ och $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 1, 3, 5, \ldots, n-3, n-1$,

där $x_{j-1} = x_j - h$, $x_{j+1} = x_j + h$

Kalla $y_L = f(x_{j-1})$, $y_M = f(x_j)$ och $y_R = f(x_{j+1})$

Antag f approximeras som andragradskurvan

$$y = A + Bx + Cx^2$$

på $[x_{j-1}, x_{j+1}] = [x_j - h, x_j + h]$ så att man får exakta värden i x_{j-1}, x_j och x_{j+1}:

$$\begin{cases} y_L = f(x_j - h) = A + B(x_j - h) + C(x_j - h)^2 & (1) \\ y_M = f(x_j) = A + Bx_j + Cx_j^2 & (2) \\ y_R = f(x_j + h) = A + B(x_j + h) + C(x_j + h)^2 & (3) \end{cases}$$

$$(1): \quad y_L = (A + Bx_j + Cx_j^2) - Bh - 2Chx_j + Ch^2 =$$

$$= y_M - Bh - 2Chx_j + Ch^2 \qquad (1')$$

$$(3): \quad y_R = (A + Bx_j + Cx_j^2) + Bh + 2Chx_j + Ch^2$$

$$= y_M + Bh + 2Chx_j + Ch^2 \qquad (3')$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -h & h^2 - 2hx_j \\ 1 & x_j & x_j^2 \\ 0 & h & h^2 + 2hx_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_L - y_M \\ y_M \\ y_R - y_M \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & x_j & x_j^2 & y_m \\ 0 & h & h^2+2hx_j & y_R-y_m \\ 0 & -h & h^2-2hx_j & y_L-y_m \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 1 \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & x_j & x_j^2 & y_m \\ 0 & h & h^2+2hx_j & y_R-y_m \\ 0 & 0 & 2h^2 & y_L+y_R-2y_m \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \boxed{1/h} \\ \boxed{1/2h^2} \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & x_j & x_j^2 & y_m \\ 0 & 1 & h+2x_j & \dfrac{y_R-y_m}{h} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{y_L+y_R-2y_m}{2h^2} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -(h+2x_j) \quad -x_j^2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & x_j & 0 & y_m - x_j^2\,\dfrac{y_L+y_R-2y_m}{2h^2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{y_R-y_m}{h} - (h+2x_j)\,\dfrac{y_L+y_R-2y_m}{2h^2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{y_L+y_R-2y_m}{2h^2} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -x_j \\ \end{array} \Leftrightarrow$$

- $A = y_m - x_j^2\,\dfrac{y_L+y_R-2y_m}{2h^2} - x_j\left(\dfrac{y_R-y_m}{h} - (h+2x_j)\,\dfrac{y_L+y_R-2y_m}{2h^2}\right) =$

$$= y_m - x_j^2\,\frac{y_L+y_R-2y_m}{2h^2} - x_j\,\frac{y_R-y_m}{h} +$$

$$+ x_j\,\frac{y_L+y_R-2y_m}{2h} + 2x_j^2\,\frac{y_L+y_R-2y_m}{2h^2} =$$

$$= y_m + x_j^2\,\frac{y_L+y_R-2y_m}{2h^2} + x_j\,\frac{y_L-y_R}{2h}$$

- $B = \dfrac{y_R-y_m}{h} - (h+2x_j)\,\dfrac{y_L+y_R-2y_m}{2h^2} =$

$$= \frac{y_R - y_M}{h} - \frac{y_L + y_R - 2y_M}{2h} - x_j \frac{y_L + y_R - 2y_M}{h^2} =$$

$$= \frac{y_R - y_L}{2h} - x_j \frac{y_L + y_R - 2y_M}{h^2}$$

- $C = \dfrac{y_L + y_R - 2y_M}{2h^2}$

Approximation av $\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)\,dx$:

$$\int_{x_j-h}^{x_j+h} (A + Bx + Cx^2)\,dx = \left(Ax + \frac{1}{2}Bx^2 + \frac{1}{3}Cx^3\right)\Bigg|_{x_j-h}^{x_j+h} =$$

$$= 2Ah + \frac{1}{2}B \cdot 4x_j h + \frac{1}{3}C\left(6x_j^2 h + 2h^3\right) =$$

$$= 2Ah + 2Bx_j h + 2Cx_j^2 h + \frac{2}{3}Ch^3 =$$

$$= \frac{h}{3}\left(6A + 6Bx_j + 6Cx_j^2 + 2Ch^2\right) =$$

$$= \frac{h}{3}\Bigg(\left(6y_M + 3x_j^2 \frac{y_L + y_R - 2y_M}{h^2} + 3x_j \frac{y_L - y_R}{h}\right) + \left(3\frac{y_R - y_L}{h} x_j - 6x_j^2 \frac{y_L + y_R - 2y_M}{h^2}\right) + 3x_j^2 \frac{y_L + y_R - 2y_M}{h^2} + (y_L + y_R - 2y_M)\Bigg) =$$

kvoter tar ut varann $= \dfrac{h}{3}\left(6y_M + (y_L + y_R - 2y_M)\right) = \dfrac{h}{3}\left(y_L + 4y_M + y_R\right)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f + \int_{x_2}^{x_4} f + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f =$$

$$= \frac{h}{3}\Big((y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\Big) =$$

(8)

$$= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

Definition: Simpsons formel med n (jämnt) delintervall (lika långa) som approximerar $\int_a^b f(x)\,dx$ betecknas S_n och ges av

$$S_n = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(\sum y_{\text{ändpunkter}} + 4\sum y_{\text{udda}} + 2\sum y_{\text{jämna}}\right)$$

Notera: Man kan visa att

$$S_{2n} = \frac{T_n + 2M_n}{3} = \frac{2T_{2n} + M_n}{3} = \frac{4T_{2n} - T_n}{3}$$

Vi har feluppskattning enligt satsen nedan:

Sats: Om f har kont. fjärdederivata på $[a,b]$ sådan att $|f^{(4)}(x)| \leq K$ där så gäller

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \leq \frac{K(b-a)}{180}h^4 = \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

där $h = \frac{b-a}{n}$

Notera: • $|f^{(4)}(x)|$ anger felets storlek.

• Felet går som n^{-4} (d.v.s. fel $= O(n^{-4})$).

Exempel: Beräkna S_4, S_8 och S_{16} för $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$

samt beräkna feluppskattningarna.

Lösning: $S_4 = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right) =$

$= \frac{1}{12}\left(1 + \frac{4}{1+1/4} + \frac{2}{1+1/2} + \frac{4}{1+3/4} + \frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{1}{12}\left(1 + \frac{16}{5} + \frac{4}{3} + \frac{16}{7} + \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{0.6932539\ldots}}$

$S_8 = \frac{h}{3}\left((y_0 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)\right) =$

$= \frac{1}{24}\left(1 + \frac{1}{2} + 4\left(\frac{1}{1+1/8} + \frac{1}{1+3/8} + \frac{1}{1+5/8} + \frac{1}{1+7/8}\right) + \right.$

$\left. + 2\left(\frac{1}{1+1/4} + \frac{1}{1+1/2} + \frac{1}{1+3/4}\right)\right) =$

$= \frac{1}{24}\left(\frac{3}{2} + 4\left(\frac{8}{9} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15}\right) + 2\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right)\right)$

$= \underline{\underline{0.6931545\ldots}}$

$S_{16} = \frac{h}{3}\left((y_0 + y_{16}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{15}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{14})\right)$

$= \frac{1}{48}\left(\frac{3}{2} + 4\left(\frac{1}{1+1/16} + \frac{1}{1+3/16} + \cdots + \frac{1}{1+15/16}\right) + \right.$

$\left. + 2\left(\frac{1}{1+1/8} + \frac{1}{1+2/8} + \cdots + \frac{1}{1+7/8}\right)\right) =$

$= \frac{1}{48}\left(\frac{3}{2} + 4\left(\frac{16}{17} + \frac{16}{19} + \cdots + \frac{16}{31}\right) + 2\left(\frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \cdots + \frac{8}{15}\right)\right) =$

$$= \underline{\underline{0.6931476\ldots}}$$

$$f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2 \Rightarrow f''(x) = 2/x^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(x) = -6/x^4 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 24/x^5$$

$$\Longrightarrow |f^{(4)}(x)| = 24/x^5 \leq 24 \quad \text{på } [1,2], \text{ d.v.s. } K = 24$$

Vi får feluppskattningarna:

$$|I - S_4| \leq \frac{24\cdot(2-1)}{180}\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{2}{15}\cdot\frac{1}{256} =$$

$$= \frac{1}{1920} = \underline{\underline{0.0005208\ldots}}$$

$$|I - S_8| \leq \frac{24(2-1)}{180}\left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{2}{15}\cdot\frac{1}{4096} =$$

$$= \frac{1}{30720} = \underline{\underline{0.0000325\ldots}}$$

$$|I - S_{16}| \leq \frac{24(2-1)}{180}\left(\frac{1}{16}\right)^4 = \frac{2}{15}\,\frac{1}{65536} =$$

$$= \frac{1}{491520} = \underline{\underline{0.0000020}} \qquad \square$$

Numerisk lösning av differentialekvationer

Antag att begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

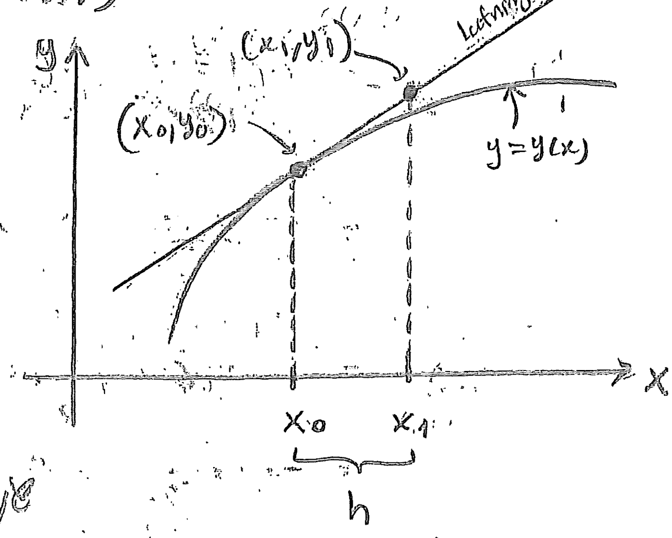
har unik lösning på ett intervall innehållandes x_0. Vi vill kunna approximera lösningen $y = y(x)$ i x_n med värden y_n, d.v.s. $y_n \approx y(x_n)$.

(11) Här gäller $x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ x_3 = x_0 + 3h, \ldots$
där h är den s.k. <u>steglängden</u> (kan vara negativ eller positiv, oftast det senare).

Vi går igenom två metoder här:

- Eulers stegmetod
- Den förbättrade Eulers stegmetod

(Vi går inte igenom den otroligt komplicerade Runge-Kutta-metoden.)



<u>Eulers stegmetod:</u>

Metodens idé:

Man låter approximativ lösning vara en polygonlinje där varje segment har horisontell längd h och höjd $hf(x, y)$ om den startar i (x, y), d.v.s.

Vi har iterationsformlerna:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)}$$

<u>Exempel:</u> Använd Eulers stegmetod för att lösa begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ på

intervallet $[0,1]$ med 5 steg med längd $h=0.2$. (12)
Beräkna felet $e_n = y(x_n) - y_n$ i varje steg.
($y(x) = x-1+2e^{-x}$ är exakt lösning.)

<u>**Lösning:**</u> Här gäller: $f(x,y) = x-y$, $x_0=0$, $y_0=1$, $h=0.2$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_n = x_0 + hn = 0+0.2\cdot n = 0.2\cdot n \\ y_{n+1} = y_n + h\,f(x_n,y_n) = y_n + 0.2\cdot(x_n - y_n) = \\ \quad = 0.2\cdot x_n + 0.8\,y_n \end{cases}$$

Vi itererar:

$$n=1 \quad \begin{cases} x_1 = 0.2\cdot 1 = \underline{\underline{0.2}} \\ y_1 = 0.2\cdot x_0 + 0.8\cdot y_0 = 0.2\cdot 0 + 0.8\cdot 1 = \underline{\underline{0.8}} \end{cases}$$

$$n=2 \quad \begin{cases} x_2 = 0.2\cdot 2 = \underline{\underline{0.4}} \\ y_2 = 0.2\cdot x_1 + 0.8\cdot y_1 = 0.2\cdot 0.2 + 0.8\cdot 0.8 = \underline{\underline{0.68}} \end{cases}$$

$$n=3 \quad \begin{cases} x_3 = 0.2\cdot 3 = \underline{\underline{0.6}} \\ y_3 = 0.2\cdot x_2 + 0.8\cdot y_2 = 0.2\cdot 0.4 + 0.8\cdot 0.68 = \underline{\underline{0.624}} \end{cases}$$

$$n=4 \quad \begin{cases} x_4 = \underline{\underline{0.8}} \\ y_4 = 0.2\cdot 0.6 + 0.8\cdot 0.624 = \underline{\underline{0.6192}} \end{cases}$$

$$n=5 \quad \begin{cases} x_5 = 1 \\ y_5 = 0.2\cdot 0.8 + 0.8\cdot 0.6192 = \underline{\underline{0.65536}} \end{cases}$$

Felet:

$$e_1 = y(x_1) - y_1 = x_1 - 1 + 2e^{-x_1} - y_1 =$$
$$= 0.2 - 1 + 2e^{-0.2} - 0.8 = \underline{\underline{0.0374615\ldots}}$$

$$e_2 = y(x_2) - y_2 = x_2 - 1 + 2e^{-x_2} - y_2 =$$
$$= 0.4 - 1 + 2e^{-0.4} - 0.68 = \underline{\underline{0.0606400\ldots}}$$

(13)

$$e_3 = y(x_3) - y_3 = 0.6 - 1 + 2e^{-0.6} - 0.624 = $$
$$= \underline{0.0736232\ldots}$$

$$e_4 = 0.8 - 1 + 2e^{-0.8} - 0.6192 = \underline{0.0794579\ldots}$$

$$e_5 = 1 - 1 + 2e^{-1} - 0.65536 = \underline{0.0803988\ldots}$$

$\square$

__Notera:__ Man kan visa att det ackumulerade felet går som $1/n$, d.v.s. $e_n = O(n^{-1})$.

__Den förbättrade Eulers Stegmetod:__

Eulers stegmetod använder bara vänstra ändpunktens (på $[x_n, x_{n+1}]$) värde hos lutningen, d.v.s. $f(x_n, y_n)$. Om vi tar genomsnittet av värdet hos lutningen i båda ändpunkter borde man få mer representativt värde på lutningen på intervallet $[x_n, x_{n+1}]$:

$$y_{n+1} = y_n + h \underbrace{\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})}{2}}_{\text{medellutningen på } [x_n, x_{n+1}]}$$

Vi kan dock ej ha y_{n+1} i indata, eftersom det är önskad utdata.

Gör så här istället: För högra ändpunkten använder vi istället ett y-värde som fås ur Eulers stegmetod, d.v.s. låt $u_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$

$$\underset{\text{(approximation)}}{\text{medellutning}} = \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2}$$

d.v.s. beräkna $$\boxed{\begin{aligned} u_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + h\frac{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},u_{n+1})}{2} \end{aligned}}$$ (14)

an sedan

Exempel: Använd den förbättrade Eulers stegmetod för att lösa begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x-y \\ y(0)=1 \end{cases}$ på intervallet $[0,1]$ med 5 steg med längd $h=0.2$. Beräkna felet $e_n = y(x_n) - y_n$ i varje steg. (Exakt lösn. $y(x) = x-1+2e^{-x}$.)

Lösning: Här gäller: $f(x,y) = x-y$, $x_0=0$, $y_0=1$, $h=0.2$

$$\begin{cases} x_n = x_0 + hn = 0+0.2\cdot n = 0.2\cdot n \\ u_{n+1} = y_n + hf(x_n,y_n) = y_n + 0.2\cdot(x_n - y_n) = \\ \quad = 0.2\cdot x_n + 0.8\cdot y_n \\ y_{n+1} = y_n + h\frac{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},u_{n+1})}{2} \\ \quad = y_n + 0.1\cdot((x_n-y_n)+(x_{n+1}-u_{n+1})) = \\ \quad = 0.9\cdot y_n + 0.1\cdot(x_n + x_{n+1} - u_{n+1}) \end{cases}$$

Vi itererar:

$$n=1 \begin{cases} x_1 = 0.2\cdot 1 = \underline{\underline{0.2}} \\ u_1 = 0.2\cdot x_0 + 0.8\cdot y_0 = 0.2\cdot 0 + 0.8\cdot 1 = 0.8 \\ y_1 = 0.9\cdot y_0 + 0.1\cdot(x_0 + x_1 - u_1) = \\ \quad = 0.9\cdot 1 + 0.1\cdot(0+0.2-0.8) = \underline{\underline{0.84}} \end{cases}$$

(15)

$n=2$
$$\begin{cases} x_2 = 0.2\cdot 2 = \underline{\underline{0.4}} \\ u_2 = 0.2\cdot x_1 + 0.8\cdot y_1 = 0.2\cdot 0.2 + 0.8\cdot 0.84 = 0.712 \\ y_2 = 0.9\cdot y_1 + 0.1\cdot(x_1 + x_2 - u_2) = \\ \quad = 0.9\cdot 0.84 + 0.1\cdot(0.2 + 0.4 - 0.712) = \underline{\underline{0.7448}} \end{cases}$$

$n=3$
$$\begin{cases} x_3 = 0.2\cdot 3 = \underline{\underline{0.6}} \\ u_3 = 0.2\cdot x_2 + 0.8\cdot y_2 = 0.2\cdot 0.4 + 0.8\cdot 0.7448 = 0.67584 \\ y_3 = 0.9\cdot y_2 + 0.1\cdot(x_2 + x_3 - u_3) = \\ \quad = 0.9\cdot 0.7448 + 0.1\cdot(0.4 + 0.6 - 0.67584) = \underline{\underline{0.702736}} \end{cases}$$

$n=4$
$$\begin{cases} x_4 = \underline{\underline{0.8}} \\ u_4 = 0.2\cdot 0.6 + 0.8\cdot 0.702736 = 0.6821888 \\ y_4 = 0.9\cdot 0.702736 + 0.1\cdot(0.6 + 0.8 - 0.6821888) = \\ \quad = \underline{\underline{0.7042435\ldots}} \end{cases}$$

$n=5$
$$\begin{cases} x_5 = \underline{\underline{1}} \\ u_5 = 0.2\cdot 0.8 + 0.8\cdot 0.7042435\ldots = 0.7233948\ldots \\ y_5 = 0.9\cdot 0.7042435\ldots + 0.1\cdot(0.8 + 1 - 0.7233948\ldots) = \\ \quad = \underline{\underline{0.7414796\ldots}} \end{cases}$$

Felet:
$$e_1 = y(x_1) - y_1 = 0.2 - 1 + 2e^{-0.2} - 0.84 =$$
$$= \underline{\underline{-0.0025384\ldots}}$$

$$e_2 = y(x_2) - y_2 = 0.4 - 1 + 2e^{-0.4} - 0.7448 =$$
$$= \underline{\underline{-0.0041599\ldots}}$$

$$e_3 = 0.6 - 1 + 2e^{-0.6} - 0.702736 = \underline{\underline{-0.0051127\ldots}}$$
$$e_4 = 0.8 - 1 + 2e^{-0.8} - 0.7042435\ldots = \underline{\underline{-0.0055855\ldots}}$$
$$e_5 = 1 - 1 + 2e^{-1} - 0.7414796\ldots = \underline{\underline{-0.0057208\ldots}}$$ $\square$

Några jämna uppgifter

6.6:4 $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, beräkna $T_4, M_4, T_8, M_8, T_{16}$ samt motsvarande exakta och uppskattade fel.

Lösning: • $T_4 = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{1}{2}y_4\right) =$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1+(1/4)^2} + \frac{1}{1+(1/2)^2} + \frac{1}{1+(3/4)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} + \frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{0.7827941\ldots}}$$

• $M_4 = h\left(f(m_1) + f(m_2) + f(m_3) + f(m_4)\right) =$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+(1/8)^2} + \frac{1}{1+(3/8)^2} + \frac{1}{1+(5/8)^2} + \frac{1}{1+(7/8)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{64}{65} + \frac{64}{73} + \frac{64}{89} + \frac{64}{113}\right) = \underline{\underline{0.7867001\ldots}}$$

• $T_8 = T_{2\cdot 4} = \frac{T_4 + M_4}{2} = \frac{0.7827941\ldots + 0.7867001\ldots}{2} =$

$$= \underline{\underline{0.7847471\ldots}}$$

• $M_8 = h\left(f(m_1) + f(m_2) + \cdots + f(m_8)\right) =$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{1+(1/16)^2} + \frac{1}{1+(3/16)^2} + \cdots + \frac{1}{1+(15/16)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{256}{257} + \frac{256}{265} + \frac{256}{281} + \frac{256}{305} + \frac{256}{337} + \frac{256}{377} + \frac{256}{425} + \frac{256}{481}\right) = \underline{\underline{0.7857236\ldots}}$$

• $T_{16} = T_{2\cdot 8} = \frac{T_8 + M_8}{2} = \frac{0.7847471\ldots + 0.7857236\ldots}{2} =$

$$= \underline{\underline{0.7852354\ldots}}$$

(17)

- Exakt värde: $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = (\arctan x)\Big|_0^1 =$

$= \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 =$

$= \underline{0.7853981\ldots}$

- Exakta fel: $I - T_4 = 0.7853981\ldots - 0.7827941\ldots =$

$= \underline{0.0026040\ldots}$

$I - M_4 = 0.7853981\ldots - 0.7867001\ldots =$

$= \underline{-0.0013019\ldots}$

$I - T_8 = \underline{0.0006510\ldots}$

$I - M_8 = \underline{-0.0003255\ldots}$

$I - T_{16} = \underline{0.0001627\ldots}$

- Uppskattade fel: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$,

$f''(x) = -\frac{(1+x^2)^2 \cdot 2 - 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} =$

$= -\frac{2(1+x^2) - 8x^2}{(1+x^2)^3} = -\frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3} = 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$

Man visar lätt att $|f''(x)| \le 4 \quad \forall x \in [0,1]$

$\Longrightarrow |I - T_4| \le \frac{4}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{48} = \underline{0.0208333\ldots}$

$|I - M_4| \le \frac{4}{24}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{96} = \underline{0.0104166\ldots}$

$|I - T_8| \le \frac{4}{12}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{192} = \underline{0.0052083\ldots}$

$|I - M_8| \le \frac{4}{24}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{384} = \underline{0.0026041\ldots}$

$|I - T_{16}| \le \frac{4}{12}\left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{768} = \underline{0.0013020\ldots}$

Uppskattade fel <u>mycket större</u> än de exakta felen. (Faktor 10 större)

(18)

6.7:4 $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, beräkna S_4 och S_8 samt motsvarande exakta fel. Jämför med T_4, T_8.

Lösning:

• $S_4 = \frac{h}{3}\left(\sum y_{\text{ändpkter}} + 4\sum y_{\text{udda}} + 2\sum y_{\text{jämna}}\right) =$

$= \frac{h}{3}\left((y_0+y_4) + 4(y_1+y_3) + 2y_2\right) =$

$= \frac{1/4}{3}\left((1+\frac{1}{2}) + 4\left(\frac{1}{1+(1/4)^2} + \frac{1}{1+(3/4)^2}\right) + 2\frac{1}{1+(1/2)^2}\right)$

$= \frac{1}{12}\left(\frac{3}{2} + 4\left(\frac{16}{17} + \frac{16}{25}\right) + 2\cdot\frac{4}{5}\right) =$

$= \frac{1}{8} + \frac{16}{3}\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{25}\right) + \frac{2}{15} = \underline{0.785392156\ldots}$

• $S_8 = \frac{h}{3}\left((y_0+y_8) + 4(y_1+y_3+y_5+y_7) + 2(y_2+y_4+y_6)\right)$

$= \frac{1/8}{3}\left((1+\frac{1}{2}) + 4\left(\frac{1}{1+(1/8)^2} + \frac{1}{1+(3/8)^2} + \frac{1}{1+(5/8)^2} + \frac{1}{1+(7/8)^2}\right)\right.$

$\left. + 2\left(\frac{1}{1+(1/4)^2} + \frac{1}{1+(1/2)^2} + \frac{1}{1+(3/4)^2}\right)\right) =$

$= \frac{1}{24}\left(\frac{3}{2} + 4\left(\frac{64}{65} + \frac{64}{73} + \frac{64}{89} + \frac{64}{113}\right) + \right.$

$\left. + 2\left(\frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25}\right)\right) =$

$= \frac{1}{16} + \frac{32}{3}\left(\frac{1}{65} + \frac{1}{73} + \frac{1}{89} + \frac{1}{113}\right) +$

$+ \frac{1}{3}\left(\frac{4}{17} + \frac{1}{5} + \frac{4}{25}\right) = \underline{0.785398125\ldots}$

• Exakt värde: $I = 0.785398163\ldots$ $(= \pi/4)$

• Exakta fel: $I - S_4 = 0.785398163\ldots - 0.785392156\ldots =$

$= \underline{0.000006006\ldots}$

$I - S_8 = 0.785398163\ldots - 0.785398125\ldots =$

$= \underline{0.000000037\ldots}$

(19)

Mycket mindre fel än för motsvarande exakta fel för trapetsformeln.

17.3:8 Lös m.h.a. den förbättrade Eulers stegmetod begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' = \cos y \\ y(0) = 0 \end{cases}$ på intervallet $[0, 1]$ med $h = 0.2$.

Lösning: Den förbättrade Eulers stegmetod: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$,

$$\begin{cases} x_n = x_0 + hn, \quad u_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + h \dfrac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2} \end{cases}$$

Här: $f(x,y) = \cos y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $h = 0.2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n = x_0 + hn = 0 + 0.2 \cdot n = 0.2 \cdot n \\ u_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) = y_n + 0.2 \cdot \cos y_n \\ y_{n+1} = y_n + h \dfrac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2} = \\ \quad = y_n + 0.1 \cdot (\cos y_n - \cos u_{n+1}) \end{cases}$$

Vi itererar:

$$n=1 \begin{cases} x_1 = 0.2 \cdot 1 = \underline{0.2} \\ u_1 = y_0 + 0.2 \cdot \cos y_0 = 0 + 0.2 \cdot \cos 0 = 0.2 \cdot 1 = 0.2 \\ y_1 = y_0 + 0.1 \cdot (\cos y_0 + \cos u_1) = 0 + 0.1 \cdot (\cos 0 + \cos 0.2) = \\ \quad = 0.1 \cdot (1 + \cos 0.2) = \underline{0.1980066\ldots} \end{cases}$$

$$n=2 \begin{cases} x_2 = 0.2 \cdot 2 = \underline{0.4} \\ u_2 = y_1 + 0.2 \cdot \cos y_1 = 0.1980066\ldots + 0.2 \cdot \cos 0.1980066\ldots = \\ \quad = 0.3940987\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + 0.1 \cdot (\cos y_1 + \cos u_2) = \\ \quad = 0.1980066\ldots + 0.1 \cdot (\cos 0.1980066\ldots + \cos 0.3940987\ldots) \\ \quad = \underline{0.3883870\ldots} \end{cases}$$

$$n=3 \begin{cases} x_3 = \underline{0.6} \\ u_3 = y_2 + 0.2 \cdot \cos y_2 = 0.5734912\ldots \\ y_3 = y_2 + 0.1 \cdot (\cos y_2 + \cos u_3) = \underline{0.5649403\ldots} \end{cases}$$

$$n=4 \begin{cases} x_4 = \underline{0.8} \\ u_4 = y_3 + 0.2 \cdot \cos y_3 = 0.7338644\ldots \\ y_4 = y_3 + 0.1 \cdot (\cos y_3 + \cos u_4) = \underline{0.7236615\ldots} \end{cases}$$

$$n=5 \begin{cases} x_5 = \underline{1} \\ u_5 = y_4 + 0.2 \cdot \cos y_4 = 0.8735388\ldots \\ y_5 = y_4 + 0.1 \cdot (\cos y_4 + \cos u_5) = \underline{0.8628119\ldots} \end{cases}$$

Se även RÖ 14 HT09 där jag löst bl.a.

17.3:4 (uppg. m. vanliga Eulers stegmetod.)

Lösning till denna återfinns också nedan.

(Vi startar i (b).)

<u>17.3:4</u> (a) Använd Eulers stegmetod med steglängd $h=0.2$ för ~~att~~ approximera $y(2)$ givet att
$$y' = xe^{-y} \quad \text{och} \quad y(0)=0.$$

<u>Lösning:</u> Vi har $f(x,y) = xe^{-y}$, $x_0=0$, $y_0=0$

Iterationsformlerna för Eulers metod blir därmed

21

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h = x_n + 0.2, & n = 0, 1, \dots \\ y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) = y_n + h\, x_n e^{-y_n} = y_n + 0.2 x_n e^{-y_n} \end{cases}$$

Vi får då:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + 0.2 = 0 + 0.2 = 0.2 \\ y_1 = y_0 + 0.2 x_0 e^{-y_0} = 0 + 0.2 \cdot 0 \cdot e^{-0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 0.2 = 0.2 + 0.2 = 0.4 \\ y_2 = y_1 + 0.2 x_1 e^{-y_1} = 0 + 0.2 \cdot 0.2 \cdot e^{-0} = 0.04 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0.6 \\ y_3 = 0.04 + 0.2 \cdot 0.4 \cdot e^{-0.04} \doteq 0.1169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 0.8 \\ y_4 = 0.1169 + 0.2 \cdot 0.6 \cdot e^{-0.1169} = 0.2236 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = 1.0 \\ y_5 = 0.2236 + 0.2 \cdot 0.8 \cdot e^{-0.2236} = 0.3516 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_6 = 1.2 \\ y_6 = 0.3516 + 0.2 \cdot 1.0 \cdot e^{-0.3516} = 0.4923 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_7 = 1.4 \\ y_7 = 0.4923 + 0.2 \cdot 1.2 \cdot e^{-0.4923} = 0.6390 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_8 = 1.6 \\ y_8 = 0.6390 + 0.2 \cdot 1.4 \cdot e^{-0.6390} = 0.7868 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_9 = 1.8 \\ y_9 = 0.7868 + 0.2 \cdot 1.6 \cdot e^{-0.7868} = 0.9325 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{10} = 2.0 \\ y_{10} = 0.9325 + 0.2 \cdot 1.8 \cdot e^{-0.935} = 1.0742 \end{cases}$$

d.v.s. approximativt gäller $y(2) = 1.0742$.

(Notera: Exakt lösning $y(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)$ vilket ger $y(2) = \ln\left(\frac{1}{2}2^2 + 1\right) = \ln 3 \approx 1.0986$, d.v.s. vi har ett fel $e_{10} = y_{10} - y(2) \approx -0.0245$.)