①

Föreläsning 15

Vi räknar 16 uppgifter (motsv. 2 tentor) från gamla tentor.

110114: 1. a) Visa med hjälp av den formella gränsvärdesdefinitionen (d.v.s. med ε–δ-formalism) att $\lim_{x\to-1}(2-3x)=5$. (1.5p)

b) Avgör huruvida $x=2$ är en hävbar diskontinuitet eller ej till funktionen $f(x)=\frac{x^3-2x^2+x-2}{x-2}$ samt definiera $f(2)$ för att få kontinuitet. (1.5p)

1. a) Visa $\lim_{x\to-1}(2-3x)=5$ formellt.

Lösning: Låt $f(x)=2-3x$, $a=-1$, $L=5$. Vill visa:

För varje $\varepsilon>0$ finns $\delta>0$ s.a.

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon \quad (*)$$

Det gäller att om $\varepsilon>0$ är givet så:

$$|f(x)-L| = |(2-3x)-5| = |-3-3x| =$$
$$= |3+3x| = 3|x+1| = 3|x-(-1)| \quad (**)$$

Detta är $<\varepsilon$ omm $3|x-(-1)|<\varepsilon$
$|x-(-1)|<\varepsilon/3$

Välj $\delta=\varepsilon/3$. Då gäller:

$$0<|x-a|<\delta \underset{\delta=\varepsilon/3}{\Longrightarrow} 0<|x-(-1)|<\varepsilon/3 \underset{(**)}{\Longrightarrow}$$

$$\underset{(**)}{\Longrightarrow} |f(x) - L| < \varepsilon$$

Vilket precis är implikationen (*).

b) Låt $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x - 2}$. Är $x = 2$ en hävbar diskontinuitet?

<u>Lösning:</u> Notera att det för täljaren gäller vid insättning av $x = 2$:

$$2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 - 2 = 8 - 8 + 2 - 2 = 0 + 0 = 0,$$

d.v.s. kan faktorisera ut $x - 2$ ur täljaren:

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{1}{l}{x^2 + 1} & \\ \hline x^3 - 2x^2 + x - 2 & \underline{x - 2} \\ -x^2(x-2) & \\ \hline \quad x - 2 & \\ \quad -1 \cdot (x-2) & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

$\longleftarrow$ Jämnt ut!

$$\Longrightarrow x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2+1)$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{(x-2)(x^2+1)}{x-2} = x^2 + 1$$

Vi har: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$

d.v.s. gränsvärdet finns

$\Longrightarrow$ <u>$x = 2$ är en hävbar diskontinuitet!</u>

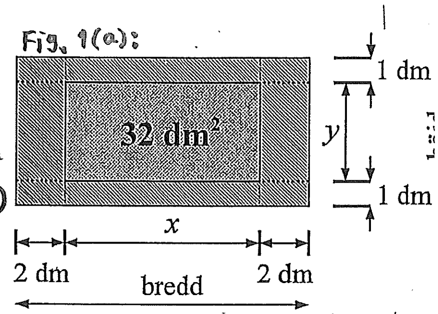
Eftersom $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$ så ska vi

<u>definiera $f(2) = 5$.</u>

③

110825: 2. Man vill tillverka en affisch som ska innehålla 32 dm^2 tryckt text och grafik, vänster- och högermarginaler på 2 dm vardera samt topp- och bottenmarginaler på 1 dm vardera; se Figur 1(a). Hur hög och bred ska affischen vara för att minimera dess totala area? **(3p)**

Fig. 1(a):



2. Affisch med 32 dm^2 text & grafik, vänster- & högermarginaler 2 dm, topp- & bottenmarginaler 1 dm. Höjd & bredd för minimal area hos affisch?

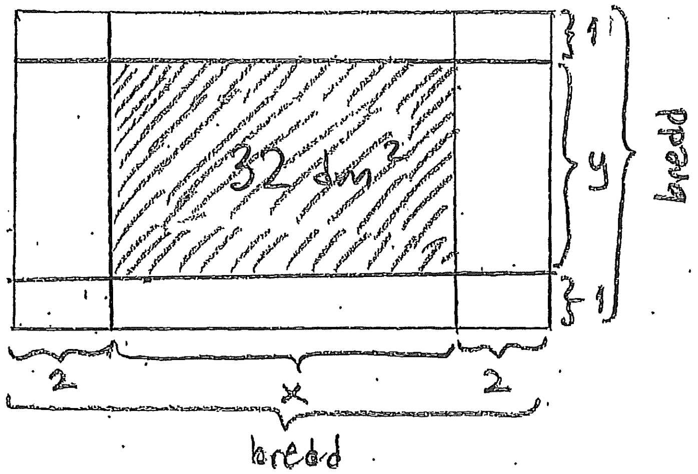
<u>Lösning:</u> Rita figur:

Enhet: dm

x: text- & grafikbredd

y: —— " —— höjd

$xy = 32$ dm^2



Total area A: $A =$ bredd $\times$ höjd $=$

$$= (2+x+2)(1+y+1) =$$

$$= (x+4)(y+2)$$

Men $xy = 32$ ty detta är arean hos fältet med text & grafik.

$$\Longrightarrow \quad y = 32/x$$

$$\Longrightarrow \quad A(x) = (x+4)(32/x + 2), \quad x > 0$$

är affischens totala area

Vill minimera $A(x)$ på intervall $(0,\infty)$.

$$A(x) = (x+4)(32/x + 2) = 32 + 2x + 128/x + 8 =$$
$$= 2x + 40 + 128/x$$
$$\Rightarrow A'(x) = 2 - 128/x^2$$

Detta ger kritiska punkt:

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 128/x^2 = 0 \Leftrightarrow 2 = \frac{128}{x^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 64 \Leftrightarrow x = \pm 8$$

- Om $x < 8$ så gäller: $x^2 < 64 \Rightarrow 1/x^2 > 1/64 \Rightarrow$
$$\Rightarrow 128/x^2 > 2 \Rightarrow -128/x^2 < -2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 - 128/x^2 < 2 - 2 = 0$$

d.v.s. $A'(x) < 0$ om $x < 8$

- Om $x > 8$ så gäller: $x^2 > 64 \Rightarrow \dots \Rightarrow 2 - 128/x^2 > 0$

d.v.s. $A'(x) > 0$ om $x > 8$

Teckentabell:

x		8	
A'	$- \; - \; -$	0	$+ \; + \; +$
A	$\searrow$	$A(8)$	$\nearrow$

$\Rightarrow$ Vi har ett minimum i $x = 8$.

$$\Big(A(8) = (x+4)(32/x + 2)\Big|_{x=8} =$$
$$= (8+4)(32/8 + 2) = 12 \cdot (4+2) =$$
$$= 12 \cdot 6 = 72,$$

⑤

d.v.s. minsta möjliga affischarea är $72\ dm^2$.

Minimerande bredd $= (x+4)|_{x=8} = 8+4 = \underline{12\ dm}$

— " — höjd $= (\frac{32}{x}+2)|_{x=8} = 4+2 = \underline{6\ dm}$

110114: 3. Bestäm andra ordningens Taylorpolynom $P_2(x)$ till $f(x) = x^{2/3}$ kring $x = 8$ och approximera med hjälp av detta $10^{2/3}$ samt uppskatta absolutbeloppet $|E_2(10)|$ av felet för approximationen. (3p)

3. $f(x) = x^{2/3}$, bestämma $P_2(x)$ i $x=8$, approximera $10^{2/3}$ samt uppskatta $|E_2(10)|$.

Lösning: Taylorpolynom av andra ordningen i $x=8$:

$$P_2(x) = f(8) + f'(8)(x-8) + \frac{1}{2!}f''(8)(x-8)^2$$

Felet blir enligt Taylors sats:

$$E_2(x) = \frac{1}{3!}f'''(s)(x-8)^3, \quad s \in (8, x) \qquad (x>8)$$

Vi får för $f(x) = x^{2/3}$:

$$f(8) = 8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$\Rightarrow f'(8) = \frac{2}{3}8^{-1/3} = \frac{2}{3}(8^{1/3})^{-1} = \frac{2}{3}2^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-1/3-1} = -\frac{2}{9}x^{-4/3}$$

$$\Rightarrow f''(8) = -\frac{2}{9}8^{-4/3} = -\frac{2}{9}(8^{1/3})^{-4} =$$

$$= -\frac{2}{9}2^{-4} = -\frac{2}{9}\frac{1}{16} = -\frac{1}{72}$$

$$f'''(x) = -\frac{2}{9}\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-4/3-1} = \frac{8}{27}x^{-7/3}$$ ⑥

Vi får därför:

$$P_2(x) = 4 + \frac{1}{3}(x-8) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{72}\right)(x-8)^2$$

$$\boxed{P_2(x) = 4 + \frac{1}{3}(x-8) - \frac{1}{144}(x-8)^2}$$

$$\Longrightarrow 10^{2/3} = f(10) \approx P_2(10) =$$
$$= 4 + \frac{1}{3}(10-8) - \frac{1}{144}(10-8)^2 =$$
$$= 4 + \frac{1}{3}\cdot 2 - \frac{1}{144}\cdot 2^2 = 4 + \frac{2}{3} - \frac{1}{36} =$$
$$= \frac{144+24-1}{36} = \frac{167}{36} = 4.63\overline{8}$$

d.v.s. vi har approximationen $\underline{\underline{10^{2/3} \approx 4.63\overline{8}}}$

Felet:
$$E_2(x) = \frac{1}{6}\cdot\frac{8}{27}s^{-7/3}\cdot(x-8)^3 =$$
$$= \frac{4}{81}s^{-7/3}(x-8)^3, \quad s \in (8, x)$$

$$\Longrightarrow |E_2(10)| = \left|\frac{1}{6}s^{-7/3}(10-8)^3\right| =$$
$$= \frac{1}{6}2^3 s^{-7/3} = \frac{4}{3}s^{-7/3} <$$
$$< [s > 8 \Rightarrow s^{-7/3} < 8^{-7/3}]\ \frac{4}{3}8^{-7/3} =$$
$$= \frac{4}{3}(8^{1/3})^{-7} = \frac{4}{3}2^{-7} = \frac{4}{3}\frac{1}{128} =$$
$$= \frac{1}{96} = 0.0104\overline{16}$$

7

d.v.s. $|E_2(10)| < 0.010416\overline{6}$

Notera: M.h.a. miniräknare: $10^{2/3} = 4.6415888\ldots$

$\Rightarrow |E_2(10)| = |10^{2/3} - P_2(10)| =$

$= |4.6415888\ldots - 4.6388888\ldots| =$

$= 0.0026999\ldots < 0.0104166\ldots,$

så det vi härlett tycks stämma. $\square$

110428:4. a) Beräkna den bestämda integralen $\int_{1/2}^{5} x\sqrt{2x-1}\,dx$. (1p)

b) Beräkna den generaliserade integralen $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$. (1p)

c) Beräkna den obestämda integralen $\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}\,dx$. (1p)

4. a) $\int_{1/2}^{5} x\sqrt{2x-1}\,dx = \left[\begin{cases} u = 2x-1 \\ du = 2\,dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u+1}{2} \\ dx = \frac{1}{2}\,du \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \Leftrightarrow u = 9 \\ x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow u = 0 \end{cases} \right] =$

$$= \int_0^9 \frac{u+1}{2}\sqrt{u}\,\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{4}\int_0^9 (u^{3/2} + u^{1/2})\,du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_0^9 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}9^{5/2} + \frac{2}{3}9^{3/2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}3^5 + \frac{2}{3}3^3\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\cdot 243 + \frac{2}{3}\cdot 27\right) = \frac{243}{10} + \frac{9}{2} =$$

$$= \frac{243+45}{10} = \frac{288}{10} = \boxed{\frac{144}{5}}$$

⑧

b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \underbrace{(\ln x)}_{\downarrow} \underbrace{x^{-2}\,dx}_{\uparrow} =$

$$= \left[\begin{cases} U = \ln x \\ dU = \frac{dx}{x} \end{cases}, \begin{cases} dV = x^{-2}\,dx \\ V = -x^{-1} \end{cases} \right] =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left((\ln x)(-x^{-1})\Big|_1^R - \int_1^R (-x^{-1})\frac{dx}{x} \right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^R + \int_1^R x^{-2}\,dx \right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^R + (-x^{-1})\Big|_1^R \right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1+\ln x}{x} \right)\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1+\ln R}{R} + \frac{1+\ln 1}{1} \right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{R} - \frac{\ln R}{R} \right) + 1 = (0+0)+1 = \underline{\underline{1}}$$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}\,dx = (*)$

Ansätt integrand som partialbråk:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} =$$

⑨ $$= \frac{A(x^2-1)+Bx+B+C(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+1)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^2+(B-2C)x+(-A+B+C)}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=1 \\ B-2C=0 \\ -A+B+C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1-C \\ B=2C \\ -(1-C)+2C+C=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

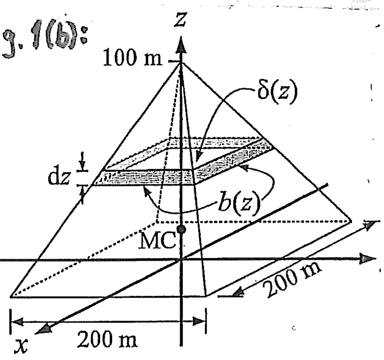
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=1-C \\ B=2C \\ 4C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1-1/4=3/4 \\ B=2\cdot(1/4)=1/2 \\ C=1/4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (*) = \int\left(\frac{3/4}{x-1}+\frac{1/2}{(x-1)^2}+\frac{1/4}{x+1}\right)dx =$$

$$= \boxed{\frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\ln|x+1| + C}$$

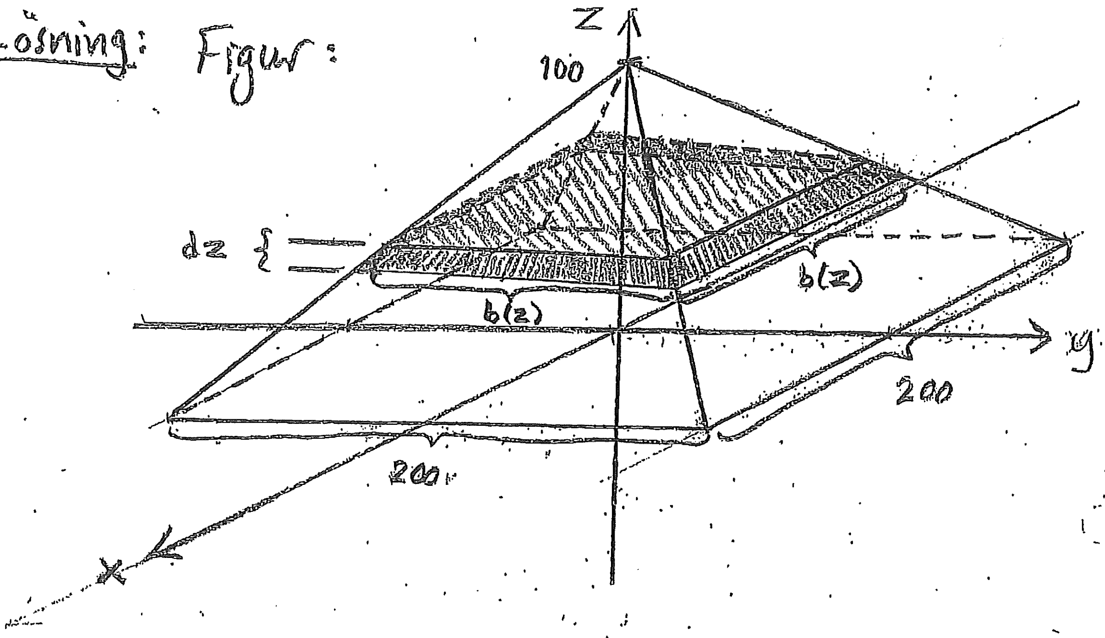
110825:5. En pyramid har en höjd på 100 m, en kvadratisk bas med sidorna 200 m och en masstäthet $\delta(z)=10\left(1-\frac{z}{100}\right)$ ton/m^3 på höjden z m från markplanet; se Figur 1(b). På vilken höjd från markplanet ligger pyramidens masscentrum? (Ledtråd: En skiva med höjd dz vid höjden z från markplanet har massan $dm=\delta(z)\left(b(z)\right)^2dz$ där $b(z)$ är sidlängden hos pyramiden vid höjden z.) (3p)

Fig. 1(b):



5. Masscentrum hos pyramid 100 m hög, kvadratisk bas m. sidor 200 m samt masstäthet $\delta(z) = 10\left(1-\frac{z}{100}\right)$ ton/m^3 vid höjd z m.

Lösning: Figur:



P.g.a. symmetri måste $\bar{x} = \bar{y} = 0$ i koordinatsystemet ovan, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ är MC:s koordinater.

För $\bar{z}$ gäller: $\bar{z} = \dfrac{M_{z=0}}{m}$ där

$M_{z=0}$ = momentet kring $z=0$, m = massan.

Vi betraktar en skiva vid höjd z med tjocklek dz och area $(b(z))^2$ där

$b(z)$ = skivans längd och bredd

$$\Longrightarrow \quad dm = \delta(z)\,(b(z))^2\,dz$$

för skivans massa, $\delta(z) = 10\left(1 - \dfrac{z}{100}\right)$.

<u>b(z)</u>: Vet: $b(0) = 200$, $b(100) = 0$

$$\Longrightarrow \quad b(z) = 200 - 2z$$

(ty $b(z)$ är en rät linje m.a.p. z)

(11) $\Longrightarrow$ $dm = 10\left(1-\frac{z}{100}\right)(200-2z)^2\,dz =$

$$= \frac{10}{100}(100-z)\left(2(100-z)\right)^2 dz =$$

$$= \frac{40}{100}(100-z)(100-z)^2\,dz = \frac{2}{5}(100-z)^3\,dz$$

$$\Longrightarrow \underline{m} = \int_{z=0}^{z=100} dm = \int_0^{100} \frac{2}{5}(100-z)^3\,dz =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}(100-z)^4(-1)\right)\Big|_0^{100} =$$

$$= -\frac{1}{10}\left((100-z)^4\right)\Big|_0^{100} = -\frac{1}{10}\left(0^4 - 100^4\right) =$$

$$= \frac{100^4}{10} = \frac{(10^2)^4}{10} = \frac{10^8}{10} = \underline{10^7 \text{ ton}}$$

(d.v.s. pyramiden väger 10 miljoner ton!)

och $\underline{M_{z=0}} = \int_{z=0}^{z=100} z\,dm = \int_0^{100} z \cdot \frac{2}{5}(100-z)^3\,dz =$

$$= \frac{2}{5}\int_0^{100} \underbrace{z}_{\downarrow}\,\underbrace{(100-z)^3\,dz}_{\uparrow} =$$

$$= \left[\begin{cases} u = z \\ du = dz \end{cases},\ \begin{cases} dv = (100-z)^3\,dz \\ v = -\frac{1}{4}(100-z)^4 \end{cases}\right] =$$

$$= \frac{2}{5}\left(z\left(-\frac{1}{4}\right)(100-z)^4\Big|_0^{100} - \int_0^{100}\left(-\frac{1}{4}\right)(100-z)^4\,dz\right) =$$

$$= \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)\left(z(100-z)^4\Big|_0^{100} - \left(-\frac{1}{5}(100-z)^5\right)\Big|_0^{100}\right) =$$

$$= -\frac{1}{10}\left(z(100-z)^4 + \frac{1}{5}(100-z)^5\right)\Big|_0^{100} =$$

$$= -\frac{1}{50}\left(5z\cdot(100-z)^4 + (100-z)^5\right)\Big|_0^{100} =$$

$$= -\frac{1}{50}\left((5z+(100-z))(100-z)^4\right)\Big|_0^{100} =$$

$$= -\frac{1}{50}\left((4z+100)(100-z)^4\right)\Big|_0^{100} =$$

$$= -\frac{2}{25}\left((z+25)(100-z)^4\right)\Big|_0^{100} =$$

$$= -\frac{2}{25}\left(125\cdot 0^4 - 25\cdot 100^4\right) =$$

$$= 2\cdot 100^4 = 2\cdot(10^2)^4 = 2\cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{ton}$$

(d.v.s. momentet är 200 miljoner m·ton i $z=0$!)

Detta ger masscentrumkoordinaten i z-led:

$$\bar{z} = \frac{M_{z=0}}{m} = \frac{2\cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{ton}}{10^7 \text{ ton}} = 20 \text{ m}$$

$$\boxed{\text{d.v.s. masscentrum ligger på höjden 20 m ovanför markplanet.}}$$

110428:6. Bestäm de värden på x för vilka serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n\sqrt{n}}$ absolutkonvergerar, konvergerar betingat resp. divergerar. (3p)

6. Värden på x för vilka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n\sqrt{n}}$ absolutkonvergerar, konvergerar betingat resp. divergerar.

(13) **Lösning:** Serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ där $a_n = \dfrac{x^n}{3^n\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$.

• **Absolutkonvergens:** $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ betraktas,

Kvotkriteriet ger:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}/(3^{n+1}\sqrt{n+1})|}{|x^n/(3^n\sqrt{n})|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| \frac{3^n\sqrt{n}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x| \frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \left|\frac{x}{3}\right| \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+1/n}} =$$

$$= \left|\frac{x}{3}\right| \sqrt{\frac{1}{1+0}} = \left|\frac{x}{3}\right|$$

$\rho < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow x \in (-3,3)$

ger konvergens för $\sum_n |a_n|$

$\rho > 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{3}\right| > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty)$

ger divergens för $\sum_n |a_n|$

$\rho = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{3}\right| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 3$

kvotkriteriet ger inget

$x = \pm 3$: $|a_n| = \left|\dfrac{(\pm 3)^n}{3^n\sqrt{n}}\right| = \left|\dfrac{(\pm 1)^n 3^n}{3^n\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

ger divergens för $\sum_n |a_n|$ ty $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ är en divergent serie

$\boxed{\text{Serien är absolutkonvergent för } x \in (-3,3).}$

- <u>Betingad konvergens:</u> $\sum_n a_n$ betraktas, och vi vet redan att $x \in (-3,3)$ ger abs.-konv.

<u>$x < -3$:</u> $a_n = \dfrac{x^n}{3^n\sqrt{n}} = \dfrac{(-|x|)^n}{3^n\sqrt{n}} =$

$$= \underbrace{(-1)^n \underbrace{\left(\frac{|x|}{3}\right)^n}_{>1}}_{\to\infty \text{ då } n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

d.v.s. a_n går ej mot 0

$\Longrightarrow \sum_n a_n$ div.

<u>$x = -3$:</u> $a_n = \dfrac{(-3)^n}{3^n\sqrt{n}} = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Enligt Kriterium för alternerande serier måste $\sum_n a_n$ konv.

<u>$x = 3$:</u> $a_n = \dfrac{3^n}{3^n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Vet att $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ div., så $\sum_n a_n$ div.

<u>$x > 3$:</u> $a_n = \dfrac{x^n}{3^n\sqrt{n}} = \underbrace{\left(\frac{x}{3}\right)}_{>1}^n \dfrac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow \infty,\ n\to\infty$

d.v.s. a_n går ej mot 0

$\Longrightarrow \sum_n a_n$ div. (mot ∞)

$\boxed{\text{Serien är betingat konvergent för } x=-3 \text{ och divergent för } x<-3 \text{ och } x \geq 3.}$

(15)

110114:7. a) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' + 2xy = xe^{-x^2}, \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$ (1.5p)

b) Lös differentialekvationen $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x}$. (1.5p)

7. a) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' + 2xy = xe^{-x^2} \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$

Lösning: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ löser vi med hjälp av integrerande faktor. Vi har:

$$\mu = \int 2x\,dx = x^2 \Rightarrow I.F. = e^{\mu} = e^{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad e^{x^2}(y' + 2xy) = e^{x^2} x e^{-x^2}$$

$$e^{x^2} y' + e^{x^2} \cdot 2x \cdot y = x$$

$$e^{x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(e^{x^2})\, y = x$$

$$\frac{d}{dx}(e^{x^2} y) = x$$

$$e^{x^2} y = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (*)$$

Men $y(0) = 1/2 \Rightarrow e^{0^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} 0^2 + C \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} = 0 + C \Leftrightarrow C = 1/2$$

$\Rightarrow$ (*) blir $\quad e^{x^2} y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)$$

d.v.s. $\boxed{y(x) = \frac{1}{2} e^{-x^2}(1 + x^2).}$

b) Lös $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x}$ (**) (16)

Lösning: • Homogen version av (**): $y'' + 6y' + 8y = 0$
Detta ger karakteristisk ekvation

$$r^2 + 6r + 8 = 0 \Leftrightarrow r = -3 \pm \sqrt{9-8} = -3 \pm 1 = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Den komplementära lösningen är

$$y_h(x) = Ce^{-2x} + De^{-4x}$$

• Partikulärlösning till (**): $HL_{(**)} = 3e^{-2x} = P_n(x)e^{-3x}$
där $P_n(x) = 3$, d.v.s. $n = 0$ (0:e-grads-polynom).
Pröva med (där $A_n(x)$ ansätt n:te-grads-polynom, $n=0$):

$$y_p(x) = x^m A_n(x) e^{-2x} = [n=0] = $$
$$= x^m A e^{-2x} = Ax^m e^{-2x}$$

$m = 0 \Rightarrow y_p(x) = Ae^{-2x}$, löser den homogena ODE:n (d.v.s. Ae^{-2x} ingår redan i y_h)

$m = 1 \Rightarrow y_p(x) = Axe^{-2x}$, löser inte den homogena ODE:n

Vi väljer alltså $y_p(x) = Axe^{-2x}$

$$\Longrightarrow y_p'(x) = A\left(1 \cdot e^{-2x} + x(-2)e^{-2x}\right) =$$
$$= A(1-2x)e^{-2x}$$

17 $\Longrightarrow y_p''(x) = A\left((-2)e^{-2x} + (1-2x)(-2)e^{-2x}\right) =$

$= A(4x-4)e^{-2x} = 4A(x-1)e^{-2x}$

Sätt in y_p, y_p' och y_p'' i (**):

$$4A(x-1)e^{-2x} + 6\cdot A(1-2x)e^{-2x} + 8\cdot Axe^{-2x} = 3e^{-2x}$$

$\Updownarrow$

$$A\left((4x-4) + 6(1-2x) + 8x\right)e^{-2x} = 3e^{-2x}$$

$\Updownarrow$ $A(4x-4+6-12x+8x) = 3$

$\Updownarrow$

$$2A = 3$$

$\Updownarrow$

$$A = 3/2$$

$$\Longrightarrow y_p(x) = \frac{3}{2}xe^{-2x}$$

Den allmänna lösningen är $y = y_p + y_h$:

$$y(x) = Ce^{-2x} + De^{-4x} + \frac{3}{2}xe^{-2x}$$

d.v.s. $\boxed{y(x) = (C + \frac{3}{2}x)e^{-2x} + De^{-4x}}$.

110428:8. Bestäm T_6, M_6 och S_6 för integralen $\int_0^3 \frac{dx}{x+1}$ samt uppskatta felen. (Ledtråd: Felen för approximationerna T_n, M_n och S_n för integralen $I = \int_a^b f(x)\,dx$ kan uppskattas enligt formlerna $|I - T_n| \leqslant \frac{K_2(b-a)}{12}h^2$, $|I - M_n| \leqslant \frac{K_2(b-a)}{24}h^2$ resp. $|I - S_n| \leqslant \frac{K_4(b-a)}{180}h^4$ där $h = \frac{b-a}{n}$ samt $|f''(x)| \leqslant K_2$ på $[a,b]$ och $|f^{(4)}(x)| \leqslant K_4$ på $[a,b]$.) (3p)

8. T_6, M_6, S_6 för $\int_0^3 \frac{dx}{x+1}$ och uppskatta felen.

<u>Lösning:</u> Delintervallängd $h=\frac{3-0}{6}=\frac{1}{2}$ för $n=6$.

- $$T_6 = h\left(\tfrac{1}{2}y_0+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+\tfrac{1}{2}y_6\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{0+1}+\frac{1}{1/2+1}+\frac{1}{1+1}+\frac{1}{3/2+1}+\frac{1}{2+1}+\frac{1}{5/2+1}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{3+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{1+2}+\frac{2}{2+2}\;\frac{2}{3+2}+\frac{2}{4+2}+\frac{2}{5+2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{2}{6}+\frac{2}{7}+\frac{1}{8}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{16}=\underline{\underline{1.4053571\ldots}}$$

- $$M_6 = h\big(f(m_1)+f(m_2)+f(m_3)+f(m_4)+f(m_5)+f(m_6)\big)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1/4+1}+\frac{1}{1/2+1/4+1}+\frac{1}{1+1/4+1}+\frac{1}{3/2+1/4+1}+\frac{1}{2+1/4+1}+\frac{1}{5/2+1/4+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{1+4}+\frac{4}{2+1+4}+\frac{4}{4+1+4}+\frac{4}{6+1+4}+\frac{4}{8+1+4}+\frac{4}{10+1+4}\right)=$$

$$=2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)=\underline{\underline{1.3769341\ldots}}$$

(19)

- $S_6 = \frac{h}{3}\left(\sum y_{\text{ändpukter}} + 4\sum y_{\text{udda}} + 2\sum y_{\text{jämna}}\right) =$

$$= \frac{1/2}{3}\left((y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\left(1+\frac{1}{4}\right)+4\left(\frac{1}{1/2+1}+\frac{1}{3/2+1}+\frac{1}{5/2+1}\right)+\right.$$
$$\left.+\,2\left(\frac{1}{2/2+1}+\frac{1}{4/2+1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{4}+4\left(\frac{2}{1+2}+\frac{2}{3+2}+\frac{2}{5+2}\right)+2\left(\frac{2}{2+2}+\frac{2}{4+2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{4}+4\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}\right)+2\left(\frac{2}{4}+\frac{2}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{5}{24}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \underline{1{,}3876984\ldots}$$

- Uppskattning av felen: $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \Rightarrow f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5}$$

Detta ger:

$$\begin{cases} |f''(x)| = \left|\frac{2}{(x+1)^3}\right| = \frac{2}{(x+1)^3} \le \frac{2}{(0+1)^3} = 2 \\ |f^{(4)}(x)| = \left|\frac{24}{(x+1)^5}\right| = \frac{24}{(x+1)^5} \le \frac{24}{(0+1)^5} = 24 \end{cases}$$

på intervallet $[0,3]$.

$\Longrightarrow$ Man kan välja $K_2 = 2$, $K_4 = 24$

Vi får då feluppskattningarna

$$\left|\int_0^3 \frac{dx}{x+1} - T_6\right| \leq \frac{K_2(3-0)}{12} h^2 =$$

$$= \frac{2 \cdot 3}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \underline{\underline{0.125}}$$

$$\left|\int_0^3 \frac{dx}{x+1} - M_6\right| \leq \frac{K_2(3-0)}{24} h^2 =$$

$$= \frac{2 \cdot 3}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = \underline{\underline{0.0625}}$$

$$\left|\int_0^3 \frac{dx}{x+1} - S_6\right| \leq \frac{K_4(3-0)}{180} h^4 =$$

$$= \frac{24 \cdot 3}{180}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{40} = \underline{\underline{0.025}}$$

Notera: De exakta felen är $\left(\int_0^3 \frac{dx}{x+1} = \ln 4 = 1.3862943\ldots\right)$:

$$\left|\int_0^3 \frac{dx}{x+1} - T_6\right| = |1.3862943\ldots - 1.4053571\ldots| =$$

$$= 0.0190628\ldots < 0.125, \text{ ok}$$

$$\left|\int_0^3 \frac{dx}{x+1} - M_6\right| = |1.3862943\ldots - 1.3769341\ldots| =$$

$$= 0.0093602\ldots < 0.0625, \text{ ok}$$

$$\left|\int_0^3 \frac{dx}{x+1} - S_6\right| = |1.3862943\ldots - 1.3876984\ldots| =$$

$$= 0.0014041\ldots < 0.025$$

(21)

111024:6. (a) Ge den formella definitionen av påståendet "funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i punkten $x = a$". (1p)

(b) Låt a och b vara reella tal och betrakta funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{om } x < -2, \\ b - ax - x^2 & \text{om } -2 \le x < 1, \\ -3 + bx & \text{om } x \ge 1. \end{cases}$$

För vilka värden på a och b är funktionen f kontinuerlig? (2p)

6. a) Definition av "$f(x)$ kontinuerlig i $x=a$".

Lösning: f är kontinuerlig i (inre) punkt c till dess definitionsmängd om

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

(Se, t.ex., sid. 1 i F3.)

b) $a, b \in \mathbb{R}$ och definiera funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & , x < -2 \\ b - ax - x^2 & , -2 \le x < 1 \\ -3 + bx & , x \geq 1 \end{cases}$$

Vilka a, b ger kontinuitet?

Lösning: Potentiella diskontinuiteter i $x=-2$ och 1.
Vänster- och högergränsvärden ska vara lika i dessa och detta gränsvärde ska vara lika med funktionsvärdet.

• $x=-2$: Vänster: $\lim_{x \to -2_-} f(x) = \lim_{x \to -2_-} (1-x) = 3$

Höger: $\lim_{x \to -2_+} f(x) = \lim_{x \to -2_+} (b - ax - x^2) =$

$= b + 2a - 4$

Vänster-g.v. = Höger-g.v. $\Leftrightarrow$ $3 = b + 2a - 4$. (1)
Om detta uppfylls så fås kontinuitet i $x=-2$ ty

$f(-2) = b+2a-4$

• $x=1$: Vänster: $\lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_-} (b-ax-x^2) =$

$= b-a-1$

Höger: $\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} (-3+bx) = -3+b$

V-g.v. = H-g.v. $\Leftrightarrow b-a-1 = -3+b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+1 = 3 \Leftrightarrow a=2$ (2)

Om detta uppfylls så fås kontinuitet i $x=1$ ty $f(1) = -3+b$

Om (2) sätts in i (1) fås: $3 = b+2\cdot 2-4 \Leftrightarrow b=3$

Alltså, $\boxed{f \text{ är kontinuerlig omm } a=2, b=3.}$

101025: (3) Undersök om funktionen $f(x) = xe^{-x}$ har något maximum eller minimum på intervallet $0 \leq x$. Beräkna maximum och minimum om de existerar. (3p)

3. Har $f(x) = xe^{-x}$ största eller minsta värde för $x \geq 0$? Bestäm dem isåfall.

Lösning: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$

$\Rightarrow$ Största och minsta värden antas i kritiska punkter, singulära punkter (finns ej här) eller i ändpunkter

(23)

• Kritiska punkter: $f'(x) = 1\cdot e^{-x} + x\cdot(-1)e^{-x} =$

$= (1-x)e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

• Ändpunkter: $x=0$

Värden som antas: $\begin{cases} f(1) = 1\cdot e^{-1} = 1/e & (>0) \\ f(0) = 0\cdot e^{-0} = 0 & (< 1/e) \end{cases}$

$\boxed{\text{Största värdet är } 1/e \text{ (antas i } x=1) \text{ och minsta värdet är } 0 \text{ (antas i } x=0).}$

100531:(5) Find the Taylor polynomial of degree 3 for $\ln(1-x)$ about $x = 0$ and use it to calculate

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\ln(1-x) + 2x + x^2}{4x^3 + x^4}.$$

(3p)

5) Find the Taylor polynomial of degree 3 for $\ln(1-x)$ about $x=0$ and use it to calculate

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\ln(1-x) + 2x + x^2}{4x^3 + x^4}$$

Solution: Let $f(x) = \ln(1-x)$. We find

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3.$$

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x} = -(1-x)^{-1}$$

$$f''(x) = -(1-x)^{-2}$$

$$f^{(3)}(x) = -2(1-x)^{-3}$$

$$f(0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(0) = -1$$

$$f''(0) = -1$$

$$f^{(3)}(0) = -2$$

$$T_3(x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

We know that

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + O(x^4)$$

and use this to calculate

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\ln(1-x) + 2x + x^2}{4x^3 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + x^2 + O(x^4)}{4x^3 + x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^3 + O(x^4)}{4x^3 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3} + \frac{O(x^4)}{x^3}}{4 + x} = -\frac{2}{3\cdot 4} = -\frac{1}{6}$$

100115:2. Bestäm integralerna nedan.

a) $\int \ln(1+x^2)\,dx$. (1p)

b) $\int_1^3 \frac{dx}{x^3+x}$. (1p)

c) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. (1p)

(25)

2. a) $\int \ln(1+x^2)\,dx = \int u\,dv \overset{P.I.}{=} uv - \int v\,du =$

$= \Big[$ Låt $u = \ln(1+x^2)$, $dv = dx$

d.v.s. $du = \dfrac{2x}{1+x^2}\,dx$, $v = x \Big] =$

$$= \ln(1+x^2)\cdot x - \int x\,\frac{2x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int\left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int 1\,dx + 2\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C$$

b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^3+x} = \int_1^3 \frac{dx}{x(x^2+1)} = (*)$

Partialbråksuppdela integranden:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} \overset{\text{ansätt}}{=} \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)x}{x(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(x^2+1)}$$

Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} A+B = 0 & (1) \\ C = 0 & (2) \\ A = 1 & (3) \end{cases}$$

Låt $A=1$ (ur (3)) i (1): $1+B=0 \Leftrightarrow B=-1$

$$\Longrightarrow A=1,\ B=-1,\ C=0$$

$$\Longrightarrow (*) = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{(-1)x+0}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \int_1^3 \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x}{x^2+1} = \left[\frac{d}{dx}(x^2+1)=2x\right]$$

$$= \left(\ln|x|\right)\Big|_1^3 - \frac{1}{2}\left(\ln|x^2+1|\right)\Big|_1^3 =$$

$$= \left(\ln|x| - \ln\left(|x^2+1|^{1/2}\right)\right)\Big|_1^3 =$$

$$= \left(\ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\Big|_1^3 = \ln \frac{3}{\sqrt{3^2+1}} - \ln \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} =$$

$$= \ln\left(\frac{3}{\sqrt{10}} \Big/ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}} =$$

$$= \ln \frac{3}{\sqrt{5}} \quad (\approx 0.2939)$$

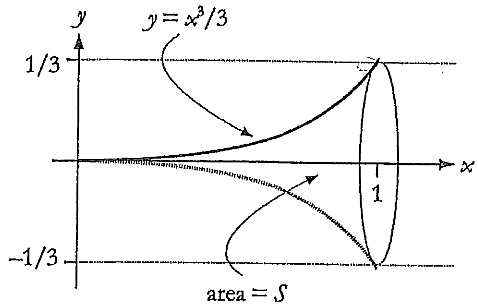
(27)

c) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{cases} u=\sqrt{x} \\ du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{cases}\right] =$

$= \int \sin u \cdot 2\,du = 2\int \sin u\,du =$

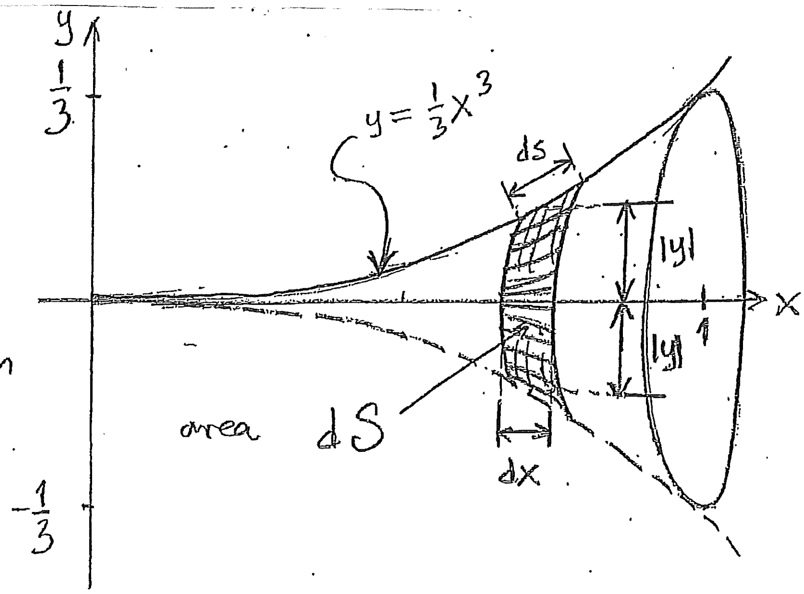
$= 2(-\cos u) + C = C - 2\cos\sqrt{x}$

100826:5. Bestäm arean S för den rotationsyta som bildas när man roterar kurvan $y = \frac{1}{3}x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, kring x-axeln. (Ledtråd: Se Figur 2.) (3p)



Figur 2. Rotationsytan med arean S i Uppgift 5.

5. Figur:



Betrakta ett band med bredden dx i x-led, en ring med radien $|y| = \frac{1}{3}x^3$ och bredden $ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ längs ytan. Då är bandets area dS givet genom

$$dS = \underbrace{2\pi|y|}_{\text{omkrets}} \cdot \underbrace{ds}_{\text{bredd}} = 2\pi \frac{1}{3}x^3 \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

Vi har att

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\cdot 3x^2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1+(x^2)^2} = \sqrt{1+x^4}$$

Rotationsytans totala area S fås som

$$S = \int_{x=0}^{x=1} dS = \int_0^1 2\pi \frac{1}{3}x^3\sqrt{1+x^4}\,dx =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^1 x^3(1+x^4)^{1/2}\,dx =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{4}\,\frac{2}{3}(1+x^4)^{3/2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{9}\left((1+x^4)^{3/2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{9}\left(2^{3/2}-1^{3/2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{9}(2\sqrt{2}-1) \text{ areaenheter } (\approx 0{,}638 \text{ a.e.})$$

110530: 3. Är serien

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\cdots$$

konvergent eller divergent? Beräkna värdet, om den är konvergent. (3p)

3. Is the series

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\cdots$$

convergent or divergent? If it is convergent, calculate its value.

Solution. Let

$$a_n = \frac{1}{3^{2n-1}}+\frac{2}{3^{2n}},$$

then

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(29)

Thus, for any positive integer N we have

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^{2n-1}} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{3^{2n}}$$
$$= 3 \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{9^n} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{9^n} = 5 \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{9^n} = \frac{5}{9} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{9^n}$$

Considering geometric series we get

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n} = \frac{1}{1-1/9} = \frac{9}{8}$$

and therefore, using the limit rule for scaling we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \frac{5}{9} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{9^n} = \frac{5}{9} \cdot \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{9^n} = \frac{5}{9} \cdot \frac{9}{8} = \frac{5}{8}.$$

This shows that the series is convergent and its value is 5/8.

100316:8. a) Bestäm de allmänna lösningarna till $y' - \frac{2}{x}y = x^2e^x$. (2p)

b) Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, & (\dagger) \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 1. \end{cases}$$

(Ledtråd: Differentialekvationen (†) är en Eulerekvation.) (2p)

8. a) DE: $y' - \frac{2}{x}y = x^2e^x$ (*)

Denna är:
- Första ordningens
- Linjär
- Inhomogen

Alltså ska man använda integrerande faktor (I.F.). Då ska (*) multipliceras med I.F. e^{M} där

$$\mu = \int \left(-\frac{2}{x}\right) dx = -2\ln|x|$$

$$\Rightarrow e^{\mu} = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2} \qquad (\dagger)$$

Vi får då att $(*)$ och $(\dagger)$ ger

$$e^{\mu} y' - e^{\mu}\frac{2}{x} y = e^{\mu} x^2 e^x$$

$$\frac{1}{x^2} y' - \frac{2}{x^3} y = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2} y\right) = e^x$$

$$\frac{1}{x^2} y = e^x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

d.v.s. $$y = (e^x + C)x^2$$

är våra allmänna lösningar.

b) DE (BVP): $$\begin{cases} x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 & (\dagger) \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

Det gäller att $(\dagger)$ är en s.k. Euler-ekvation $\left(x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 4y = 0 \right)$.

x^2 $\qquad$ x

De allmänna lösningarna till $(\dagger)$ fås genom att lösa den karaktäristiska ekvationen:

$$1 \cdot r(r-1) - 3r + 4 = 0$$

31

d.v.s. $r^2 - 4r + 4 = 0$

konj. regeln: $(r+2)(r-2) = 0$

så att $r = \pm 2$

Eftersom vi har en dubbelrot så är allmänna lösningarna till (†)

$$y = (C_1 + C_2 \ln|x|)|x|^r =$$
$$= (C_1 + C_2 \ln|x|)x^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ ger

$$(C_1 + C_2 \underbrace{\ln 1}_{=0}) 1^2 = 1$$
$$C_1 = 1$$

$$\Longrightarrow y = (1 + C_2 \ln|x|)x^2$$

Derivera:

$$y' = C_2 \frac{1}{x} x^2 + (1 + C_2 \ln|x|) \cdot 2x =$$
$$= C_2 x + 2(1 + C_2 \ln|x|)x$$

Begynnelsevillkoret $y'(1) = 1$ ger

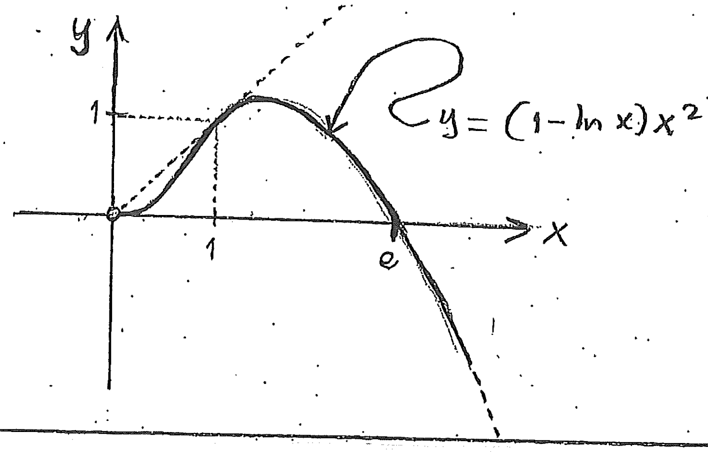
$$C_2 \cdot 1 + 2(1 + C_2 \underbrace{\ln 1}_{=0}) \cdot 1 = 1$$
$$C_2 + 2 = 1$$
$$C_2 = -1$$

$\Longrightarrow$ Lösningen är

$$y = (1 - \ln|x|)x^2$$

(Notera att lösningen endast är giltig för $x>0$ så man kan skriva $y=(1-\ln x)x^2$.)

Skiss:



110825:7. (a) Lös initialvärdesproblemet
(Stefan Borell)

$$2y' = xy, \qquad y(0) = 1. \tag{2p}$$

(b) Använd den förbättrade Euler-metoden med $h = 1$ för att approximera värdet $y(2)$ av lösningen till ekvationen ovan. Kom ihåg att iterationerna som används i den förbättrade Euler-metoden för att approximera lösningen till ekvationen $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, är på formen

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h, \\ u_{n+1} = y_n + h \cdot F(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot \big(F(x_n, y_n) + F(x_{n+1}, u_{n+1})\big)/2. \end{cases} \tag{1p}$$

7. (a) Solve the initial value problem

$$2y' = xy, \qquad y(0) = 1.$$

(b) Use Euler's Improved Method with $h = 1$ in order to approximate the value $y(2)$ of the solution to the equation above. Recall that the iterations used in Euler's Improved Method for approximating the solution the equation $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, are of the form

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h, \\ u_{n+1} = y_n + h \cdot F(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot \big(F(x_n, y_n) + F(x_{n+1}, u_{n+1})\big)/2. \end{cases}$$

Solution. a) This problem can be solved in at least two ways: 1) by use of the fact that the equation is separable; 2) using an integrating factor.

1) The equation may be written as

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{2}.$$

Integrating both sides with respect to x, we get

$$\ln|y| = \int \frac{y'}{y}\,dx = \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Applying the exponential function we get

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{\frac{x^2}{4}+C} = e^C e^{x^2/4} = De^{x^2/4}, \qquad D = e^C \geq 0.$$

We conclude that all solutions to the equation $2y' = xy$ are given by $y(x) = De^{x^2/4}$, where D is any real number. The initial condition $y(0) = 1$ gives

$$1 = y(0) = De^0 = D.$$

We conclude that the solution is given by $y(x) = e^{x^2/4}$.

2) The equation may be written as

$$y' - \frac{x}{2}y = 0.$$

Thus, the integrating factor is given by

$$e^{\int -x/2\,dx} = e^{-x^2/4}.$$

Multiplying both sides of the equation by the integrating factor, the equation may be written as

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/4}y\right) = e^{-x^2/4}\left(y' - \frac{x}{2}y\right) = 0.$$

Next, we integrate both sides of this equation with respect to x in order to get

$$e^{-x^2/4}y = \int \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/4}y\right) dx = \int 0\,dx = C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

and we conclude that $y(x) = Ce^{x^2/4}$, $C \in \mathbb{R}$. Using the initial value $y(0) = 1$, we get

$$1 = y(0) = Ce^0 = C.$$

We conclude that the solution is given by $y(x) = e^{x^2/4}$.

b) The equation may be written as

$$y' = \frac{xy}{2} = F(x, y),$$

with initial values $x_0 = 0$ and $y_0 = 1$. With $h = 1$ we get

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 0 + 1 = 1, \\ u_1 = y_0 + h \cdot F(x_0, y_0) = 1 + F(0, 1) = 1, \\ y_1 = y_0 + h \cdot \dfrac{F(x_0, y_0) + F(x_1, u_1)}{2} = 1 + \dfrac{0 + 1/2}{2} = \dfrac{5}{4}, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + h = 1 + 1 = 2, \\ u_2 = y_1 + h \cdot F(x_1, y_1) = \dfrac{5}{4} + F(1, 5/4) = \dfrac{15}{8}, \\ y_2 = y_1 + h \cdot \dfrac{F(x_1, y_1) + F(x_2, u_2)}{2} = \dfrac{5}{4} + \dfrac{5/8 + 15/8}{2} = \dfrac{40}{16} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

We conclude that the approximated value of $y(2)$ is $5/2 = 2.5$. In view of 7.a) we now that the exact value is given by $y(2) = e^1 \approx 2.7182$.