

④

Föreläsning 2

Summor

Sigma notation:
$$\sum_{i=m}^n f(i) = f(m) + f(m+1) + \dots + f(n)$$

Exempel:
$$\sum_{i=2}^4 i^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 = 8 + 27 + 64 = 99$$

(Här: $f(i) = i^3$)

Variabeln i är stam variabel, n är övre summationsgräns och m undre summationsgräns.

Ibland använder man notationen:

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

Notera:

- $$\sum_{i=m}^n (A f(i) + B g(i)) = A \sum_{i=m}^n f(i) + B \sum_{i=m}^n g(i)$$
- $$\sum_{j=m}^{m+n} f(j) = \sum_{i=0}^n f(i+m)$$

Första påståendet: Summation är linjär operation

Andra " : Man kan substituera index

Ibland kan summor uttryckas på sluten form, d.v.s. som ett kompakt uttryck.

Sats: (a) $\sum_{i=1}^n 1 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ termer}} = n$ ②

(b) $\sum_{i=1}^n i = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(c) $\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(d) $\sum_{i=1}^n r^{i-1} = 1+r+r^2+\dots+r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1},$
där $r \neq 1$

Bes: (a) Uppenbart.

(b) Gauß' trick: $S = \sum_{i=1}^n i$, dvs.

$S = 1+2+\dots+(n-1)+n$
eller $S = n+(n-1)+\dots+2+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)+(n+1)}_{n \text{ termer}}$

$= n(n+1)$

$\Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$

(c) Notera följt:

$\sum_{i=m}^n (f(i+1) - f(i)) = f(n+1) - f(m),$

en s.k. teleskopsumma (alla utom första och sista termer tar ut varann)

③

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n ((i+1)^3 - i^3) = (n+1)^3 - 1^3 \\ = (n+1)^3 - 1$$

Å andra sidan:

$$\sum_{i=1}^n ((i+1)^3 - i^3) = \sum_{i=1}^n (i^3 + 3i^2 + 3i + 1 - i^3)$$

$$= \sum_{i=1}^n (3i^2 + 3i + 1) =$$

$$= 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 =$$

$$= 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3} \left((n+1)^3 - 1 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - n \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left((n+1)^3 - \frac{3}{2} n(n+1) - (n+1) \right) =$$

$$= \frac{1}{3} (n+1) \left((n+1)^2 - \frac{3}{2} n - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{6} (n+1) (2(n^2 + 2n + 1) - 3n - 2) =$$

$$= \frac{1}{6} (n+1) (2n^2 + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(d) \quad S = \sum_{i=1}^n r^{i-1} = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}$$

$$\Rightarrow rS = \sum_{i=1}^n r^i = r + r^2 + r^3 + \dots + r^n$$

$$\Rightarrow (n-1)S = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} + r^n - (1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1}) = \\ = r^n - 1$$

$$\Rightarrow S = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$



Induktion

Beakta summor

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 = 1^2 \\ 1+3 & = & 4 = 2^2 \\ 1+3+5 & = & 9 = 3^2 \\ 1+3+5+7 & = & 16 = 4^2 \end{array}$$

och så vidare ...

Tydligen tycks gälla:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

d.v.s.

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2 \quad (*)$$

Detta kan förstås bevisas genom (b) på förra sidan. Alternativt kan induktion användas

Induktionsaxiomet: Om M delmängd

av $\mathbb{N}$ som uppfyller

$$(i) \quad 1 \in M$$

(startsteget)

$$(ii) \quad p \in M \Rightarrow p+1 \in M$$

(induktionssteg)

för alla $p \in \mathbb{N}$

Så gäller att $M = \mathbb{N}$

Tillämpat på påstående (*) så betyder induktionsaxiomet att man kan bevisa det

⑤ på följande sätt:

$$\sum_{i=1}^1 (2i-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 = 1^2$$

d.v.s. (*) sant för $n=1$.

Vi har visat (i), d.v.s. startsteget.

• Antag (*) sant för $n=p$, d.v.s.

$$\sum_{i=1}^p (2i-1) = p^2 \quad (**)$$

Då gäller för $n=p+1$ (nästa steg):

$$\sum_{i=1}^{p+1} (2i-1) = \sum_{i=1}^p (2i-1) + (2(p+1)-1) =$$

$$\stackrel{(**)}{=} p^2 + (2(p+1)-1) =$$

$$= p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$$

d.v.s. (*) är isåfall sant för $n=p+1$.

Vi har visat (ii), d.v.s. induktionssteget.

Enligt induktionsaxiomet så är då (*)

sant för alla $n \in \mathbb{N}$.

Detta kallas för ett induktionsbevis.

Man kan likna det vid att ha en ändlig rad med dominobrickor. Peta till den första ($1 \in M$) och givet att de faller varann i följd ($p \in M \Rightarrow p+1 \in M$) så faller alla ($M = \mathbb{N}$). ($M =$ alla fallande brickor.)

Induktionsbevis

Konvergens av talföljder

En talföljd är en ordnad lista med ett första men inget sista element (oändlig).

Man brukar beteckna termerna (d.v.s. elementen) som a_n och följden $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.

Exempel:

- $\{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$

— explicit definition ($a_n = n^2$)

- $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \{a_n\} = \{1, 2, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}, \dots\}$

— rekursiv definition

Lite terminologi:

Definition: (a) $\{a_n\}$ nedåt begränsad av L och L undre begränsning till $\{a_n\}$ om
 $a_n \geq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(P.S.S. uppåt begr. av M , M övre begr. om $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

$|a_n| \leq K$
 $K = \max\{|L|, |M|\}$
funktion

speciellt: $\{a_n\}$ begränsad om
både nedåt & uppåt begr.

(b) $\{a_n\}$ positiv om $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

och negativ om $a_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(c) $\{a_n\}$ växande om $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

⑦

(och antagande $a_n \leq a_{n+1}$)

Allmänt: $\{a_n\}$ monoton om antingen
växande eller antagande

(d) $\{a_n\}$ alternerande om $a_n a_{n+1} < 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, d.v.s. två på varandra följande
termer har olika tecken (ex $\{-1, 2, -3, 4, \dots\}$)

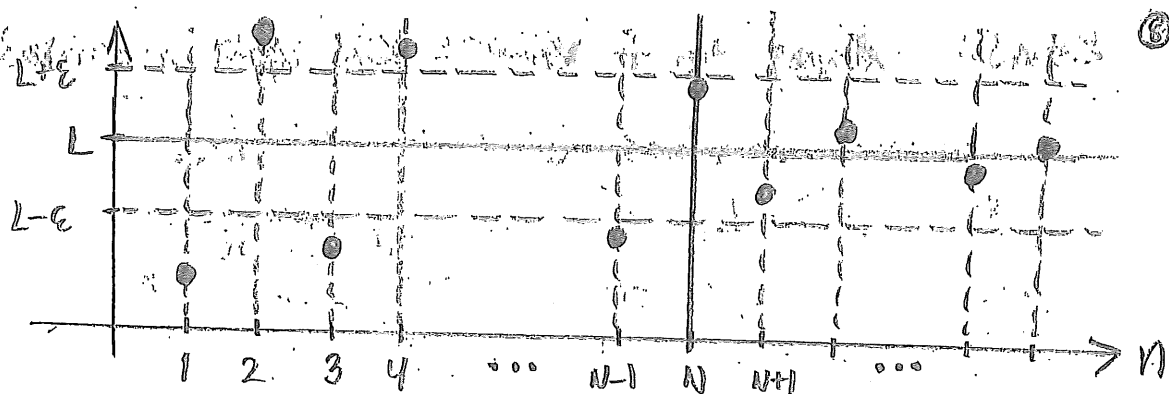
Angående (b), (c) & (d), det intressanta är egentligen
bara vad som händer på lång sikt. Därför
säger man att om $\{a_n\}$ är växande
först fr.o.m. $N > 1$ (d.v.s. $a_{n+1} \geq a_n$
 $\forall n \geq N$) så är talföljden slutligen växande.

(Motvarande för slutligen antagande, slutligen
positiv, slutligen negativ samt slutligen
alternerande.)

Konvergens av talföljder:

Vi har konvergens av $\{a_n\}$ om $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$
existerar, och $\{a_n\}$ sägs då konvergera mot L .
Mer exakt så har vi:

Definition: $\{a_n\}$ sägs konvergera mot gränsvärdet L , d.v.s. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, om
för varje $\varepsilon > 0$ finns ett heltal N
sådant att om $n \geq N$ så $|a_n - L| < \varepsilon$



Notera: Om $\{a_n\}$ inte konvergerar så divergerar den.

Eftersom det gäller att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \text{ och } a_n = f(n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

så kan man välja med gränsvärden till tal-
följder p.s.s. som med gränsvärden för
funktioner.

Sats: Om $\{a_n\}$ konvergerar så är $\{a_n\}$ begränsad.

Beweis: Antag $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. Fixera $\epsilon = 1$.

Finns N s.d. $|a_n - L| < 1 \quad \forall n \geq N$.

$$\Rightarrow |a_n| = |(a_n - L) + L| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L|$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |L|\}$$

d.v.s. $\{a_n\}$ begränsad. □

Sats: Om $\{a_n\}$ slutligen växande och chippat
begränsad så konvergerar den.

⑨ Beweis: Antag $\{a_n\}$ växande och uppåt begränsad.

Definiera delmängd $S = \{a_n\}$ till $\mathbb{R}$.

S har alltså en övre begränsning.

P.g.a. fullständighetsaxiomet finns minsta övre begränsning $\sup S$. Låt $L = \sup S$.

$\Rightarrow a_n \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$ och det gäller

för $\varepsilon > 0$ att det finns $N \geq 1$ s.a.

$a_n > L - \varepsilon$ (ty annars $a_n \leq L - \varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N}$, d.v.s. $L - \varepsilon$ är mindre än
minsta övre begränsning !!!)

$\{a_n\}$ växande $\Rightarrow a_n > L - \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

d.v.s. $\{a_n\}$ konvergerar (mot L) □

(Motörande resultat för slutligen avtagande och nedåt begränsade talföljder.)

Notera: Antag i börjet egentligen växande, men det spelar ingen roll för slutsatsen.

Sats: Om $\{a_n\}$ slutligen växande så gäller:

• $\{a_n\}$ uppåt begränsad ($\Rightarrow$ konvergent)

eller

• $\{a_n\}$ ej uppåt begränsad ($\Rightarrow$ divergerar mot oändligheten)

Beweis: Antag $\{a_n\}$ växande, d.v.s. antar att $\textcircled{m}$
det finns $N \geq 1$ s.a. $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Två fall:

- Finns $K \in \mathbb{R}$ s.a. $a_n \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(d.v.s. $\{a_n\}$ uppåt begränsad)

- Finns inte sådant K , d.v.s.
för varje $K \in \mathbb{R}$ finns $N \geq 1$
sådant att $a_n > K$

Men $\{a_n\}$ växande

$\Rightarrow$ för varje $K \in \mathbb{R}$ finns $N \geq 1$
sådant att $n \geq N \Rightarrow a_n > K$

Detta är precis definitionen att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$



(Motvarande resultat för slutligen antagande
talföljder.)

Notera: Antag växande i beviset, men slut-
satsen samma för slutligen växande.

Sats: Om $a \leq a_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$ och $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$
så gäller $a \leq L \leq b$

Beweis: Antag $L > b$. (Vi kör en motsägelse-
bevis!) Låt $\varepsilon = L - b (> 0)$

⑪

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Rightarrow \text{Finns } N \in \mathbb{N} \text{ s.a.} \\ |a_N - L| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow a_N > L - \varepsilon = \\ = L - (L - b) = b$$

$$\text{Motbeger att } a_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow L \leq b$$

$$\text{P.s.s. f\"ors } L \geq a$$



Sats: (a) Om $|x| < 1$ s\"a $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$

(b) Om $x \in \mathbb{R}$ s\"a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

B\"eris: (a) Visa $\lim_{n \rightarrow \infty} |x|^n = 0$ f\"orst.

Betyder: F\"or varje $\varepsilon > 0$ finns $N \geq 1$ s.a. $n \geq N \Rightarrow ||x|^n - 0| < \varepsilon$

$$||x|^n - 0| = |x|^n < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|}$$

tg $|x| < 1$. V\"alj $N = \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} \right\rceil$
(d.v.s. $\ln |x| < 0$)

Eftersom $-\overset{\rightarrow 0}{|x|^n} \leq x^n \leq \overset{\rightarrow 0}{|x|^n}$ s\"a ger
inst\"angningssatsen $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$

(b) L\"at $N > |x|$. F\"or $n > N$ g\"aller:

$\lceil a \rceil =$ minsta
heltal
 $\geq a$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{x^n}{n!} \right| &= \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{|x|}{n} \cdot \frac{|x|}{n+1} \cdots \frac{|x|}{n-1} \frac{|x|}{n} \quad (2) \\
&< \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \underbrace{\frac{|x|}{N} \frac{|x|}{N} \cdots \frac{|x|}{N} \frac{|x|}{N}}_{n-n+1 \text{ faktorer}} = \\
&= \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{|x|}{N} \right)^{n-n+1} = \\
&= \underbrace{\left(\frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{|x|}{N} \right)^{1-n} \right)}_{=K} \left(\frac{|x|}{N} \right)^n = \\
&= \underbrace{K}_{\text{oberoende av } n} \left(\frac{|x|}{N} \right)^n \quad (*)
\end{aligned}$$

Vi har $N > |x| \Leftrightarrow \frac{|x|}{N} < 1$

$\Rightarrow$ [Tillämpa (a)] $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|x|}{N} \right)^n = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$



Notera:

Instängningsatsen i de två
sista stegen i beviset.

13

Några jämna övningsuppgifter

5.1:12

$$\begin{aligned} 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{2n} &= \\ &= (-1)^0 x^0 + (-1)^1 x^1 + (-1)^2 x^2 + \\ &\quad + (-1)^3 x^3 + \dots + (-1)^{(2n)} x^{(2n)} = \\ &= \boxed{\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i x^i} \end{aligned}$$

5.1:16

$$\begin{aligned} \sum_{k=-5}^m \frac{1}{k^2+1} &= [i = k+6 \text{ t.g. då} \\ &\quad k=-5 \Leftrightarrow i=1] = \\ &= \sum_{i=-5+6}^{m+6} \frac{1}{(i-6)^2+1} = \\ &= \boxed{\sum_{i=1}^{m+6} \frac{1}{(i-6)^2+1}} \end{aligned}$$

5.1:20

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (2^i - i^2) &= \sum_{i=1}^n 2^i - \sum_{i=1}^n i^2 = \\ &= 2 \sum_{i=1}^n 2^{i-1} - \sum_{i=1}^n i^2 = \\ &= 2 \frac{2^n - 1}{2 - 1} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ &= \boxed{2^{n+1} - 2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \end{aligned}$$

5.1:38

Visa $\sum_{i=1}^n r^{i-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
med induction.

• Startstep: $VL_{n+1} = \sum_{i=1}^1 r^{i-1} = r^{1-1} = r^0 = 1$ (1)

$$HL_{n+1} = \frac{r^1 - 1}{r - 1} = \frac{r - 1}{r - 1} = 1$$

$\Rightarrow$ Startstep $n=1$ verifiziert

• Induktionsstep: Ang. $VL_p = HL_p$ (*)

$$\Rightarrow VL_{p+1} = \sum_{i=1}^{p+1} r^{i-1} = \sum_{i=1}^p r^{i-1} + r^{(p+1)-1} =$$

$$= VL_p + r^p \stackrel{(*)}{=} HL_p + r^p =$$

$$= \frac{r^p - 1}{r - 1} + r^p = \frac{(r^p - 1) + r^p(r - 1)}{r - 1} =$$

$$= \frac{r^p - 1 + r^{p+1} - r^p}{r - 1} = \frac{r^{p+1} - 1}{r - 1} = HL_{p+1}$$

$\Rightarrow$ Induktionsstep verifiziert

Induktionsaxiomet ger. bestätigt.



9.1:8 $\left\{ \frac{(-1)^n n}{e^n} \right\}$, $a_n = \frac{(-1)^n n}{e^n}$

(a) Begrenzt by $n/e^n \rightarrow 0$

(b)(c) Alternierende by $\{-1/e, +2/e^2, -3/e^3, \dots\}$

(d) Konvergenz mit 0 by $\frac{n}{e^n} \rightarrow 0$ da $n \rightarrow \infty$

somit Leibnizkriterium $\left(\underbrace{-\frac{n}{e^n}}_{\rightarrow 0} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{n}{e^n}}_{\rightarrow 0} \right)$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{15} \quad \underline{9.1:18} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2\sqrt{n} + 1}{1 - n - 3n^2} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - 2n^{1/2} + 1)/n^2}{(1 - n - 3n^2)/n^2} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2n^{-3/2} + 1/n^2}{1/n^2 - 1/n - 3} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^2 - 2/n\sqrt{n} + 1}{1/n^2 - 1/n - 3} = \\
 &= \frac{0 - 0 + 1}{0 - 0 - 3} = \boxed{-\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{9.1:26} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \right)^n = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n / \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n} \right)^n / \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \\
 &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = e^a \right] = \\
 &= e^{-1} / e^1 = \underline{\underline{e^{-2}}}
 \end{aligned}$$

Se även RÖ 9. HT09 där jag löst bl.a.

9.1:10, 9.1:24, 9.1:28

Lösningar till dessa återfinns också nedan.

9.1:10

Bestäm huruvida talföljden $\left\{ \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right\}$ är

(16)

(a) begränsad (uppgåt eller nedåt), (b) positiv eller negativ (slutligen), (c) växande, avtagande eller alternerande, och (d) konvergent, divergent, eller divergent mot $\pm \infty$.

Lösning:

$$\begin{aligned} \frac{(n!)^2}{(2n)!} &= \frac{n! \cdot n!}{2n \cdot (2n-1) \cdots (n+1) \cdot n!} = \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n+n) \cdot (n+n-1) \cdots (n+3)(n+2)(n+1)} = \\ &= \frac{n}{n+n} \cdot \frac{n-1}{n+n-1} \cdots \frac{3}{n+3} \cdot \frac{2}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2n-1} \cdots \frac{3}{n+3} \cdot \frac{2}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \quad (*) \end{aligned}$$

(b) Talföljden är positiv ty $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$
(till och med strikt olikhet).

(a) Ur (b) ses att t.ex. 0 är en undre begränsning.

Ur (*) ser vi att $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdots 1 = \frac{1}{2}$

$$\text{ty } \frac{n-1}{2n-1} \leq \frac{2n-1}{2n-1} = 1, \dots, \frac{1}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+1} = 1$$

Alltså är $\frac{1}{2}$ en övre begränsning.

$$(c) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(*)}{(*)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2n+1} \cdots \frac{2}{n+3} \cdot \frac{1}{n+2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2n-1} \cdots \frac{2}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1}} =$$

17

$$= \frac{(2n-1) \cdots (n+2)(n+1) \cdot n \cdots 2 \cdot 1}{(2n+1) \cdots (n+3)(n+2) \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{(n+1) \cdot n}{(2n+1) \cdot 2n} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{n+1}{2n+1} < \frac{1}{2} \frac{2n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow a_{n+1} < \frac{1}{2} a_n < a_n$, d.v.s. avtagande

(d) Enligt (*) gäller

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n}{2n} \frac{n-1}{2n-1} \cdots \frac{3}{n+3} \frac{2}{n+2} \frac{1}{n+1} \leq$$

$$\leq \left[\text{Faktor } \frac{j}{n+j} \text{ kräver } n \geq j \Rightarrow \frac{j}{n+j} \leq \frac{j}{j+j} = \frac{1}{2} \right] \leq$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{n \text{ faktorer}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Eftersom $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (konvergent) så fås

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 0 \text{ d.v.s. konvergent.}$$

9.1:24 Bestäm om möjligt gränsvärdet till $\{a_n\}$

om $a_n = n - \sqrt{n^2 - 4n}$.

Lösning: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 4n}) = [\text{Förl. m. konj.}] =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \sqrt{n^2 - 4n})(n + \sqrt{n^2 - 4n})}{n + \sqrt{n^2 - 4n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - (n^2 - 4n)}{n + \sqrt{n^2 - 4n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{n + \sqrt{n^2 - 4n}} =$$

$$= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 4/n}} = 4 \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 0}} =$$

$$= 4 \frac{1}{1+1} = 4 \frac{1}{2} = 2$$

[dividera m. $\frac{1}{n}$
i täljare och
nämnare]

9.1:28 Bestäm om möjligt gränsvärdet till $\{a_n\}$
 om $a_n = \frac{n^2 2^n}{n!}$.

Lösning: Vi skriver $a_n = \frac{n^2 2^n}{n!} = \frac{n^2}{2^n} \cdot \frac{(2^n)^2}{n!} =$
 $= \frac{n^2}{2^n} \cdot \frac{(2^2)^n}{n!} = \underbrace{\frac{n^2}{2^n}}_{=b_n} \cdot \underbrace{\frac{4^n}{n!}}_{=c_n}$

Att $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ för

vi betrakta som ett standardgränsvärde. ((B5) i gröna boken)

På föreläsningen visade vi att $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ (*)

för all $x \in \mathbb{R}$. Alltså måste $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{n!} = 0$
 ((*) med $x=4$). (Se också (B9) i gröna boken.)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 2^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n \cdot c_n) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \cdot 0 = 0.$$