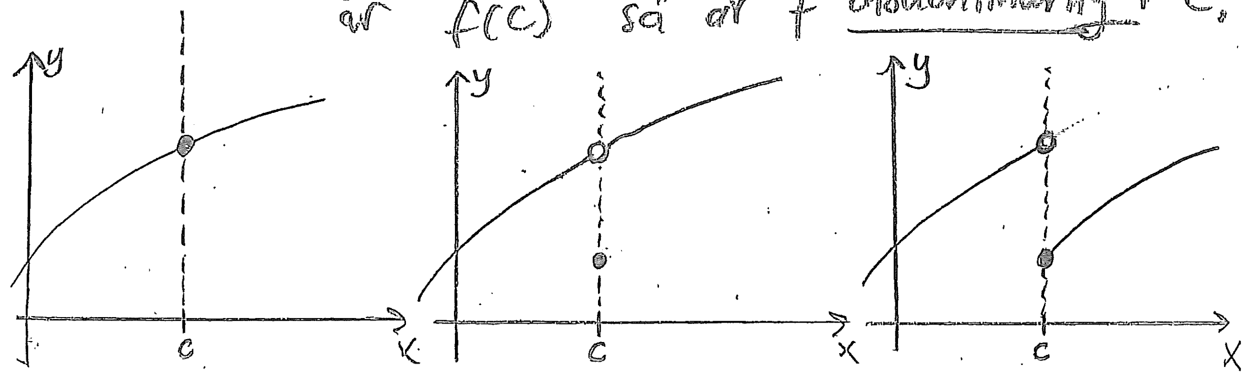
Föreläsning 3

Kontinuitet Funktioner vars grafer kan ritas utan att lyfta pennan kallas kontinuerliga.

Definition: Funktion f kontinuerlig i inre punkt c till dess definitionsmängd om

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Om $\lim_{x \to c} f(x)$ ej existerar eller inte är $f(c)$ så är f diskontinuerlig i c.



kont. i c ($\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$)

ej kont. i c ($\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$)

ej kont. i c ($\lim_{x \to c} f(x)$ finns ej)

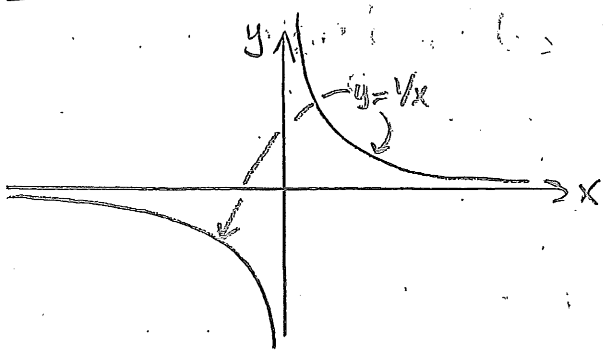
Definition:
- f högerkontinuerlig om $\lim_{x \to c_+} f(x) = f(c)$
- f vänsterkontinuerlig om $\lim_{x \to c_-} f(x) = f(c)$

(Detta ger mening åt kontinuitet i ändpunkter.)

Definition: f kontinuerlig på intervall I om kontinuerlig i varje punkt i I.

(Om definitionsmängd ej intervall så talar man bara om kontinuerliga funktioner.) ②

Exempel: Är $f(x) = \frac{1}{x}$ kontinuerlig?



Ja, ty definitionsmängden innehåller ej $x=0$. För $x \neq 0$ är $f(x) = \frac{1}{x}$ helt klart kontinuerlig.

Tack vare gränsvärdesregler vi redan nämnt så är $f \pm g$, fg, f/g ($g(c) \neq 0$) och $(f(x))^{1/n}$ ($f(c) > 0$ om n jämn) kontinuerliga om f och g är det. (m.a.p. $x = c$)

Sats: Om $f(g(x))$ definierad på intervall innehållande c och om f kontinuerlig i L och $\lim_{x \to c} g(x) = L$ så

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right)$$

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$ vara givet.

f kontinuerlig i L: Finns $r > 0$ s.a.

$$|y - L| < r \Rightarrow |f(y) - f(L)| < \varepsilon$$

$\lim_{x \to c} g(x) = L$: Givet $r > 0$ så finns

③ $\delta > 0$ s.a. $|x-c| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |g(x) - L| < r$$

Vi drar alltså slutsatsen att det finns

$\delta > 0$ s.a. $|x-c| < \delta \underset{y=g(x)}{\Rightarrow} |f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$

Betyder $\lim\limits_{x \to c} f(g(x)) = f(L)$. $\square$

Exempel: $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x+1} = ?$

Vet (1) $\lim\limits_{x \to 0} x+1 = 1$ och (2) $f(t) = \sqrt{t}$

är kontinuerlig i $x = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \sqrt{x+1} = \sqrt{\lim_{x \to 0} (x+1)} = \sqrt{1} = \underline{1}$$

$\square$

Hävbara diskontinuiteter:

Om en funktion f är diskontinuerlig i en punkt på ett sånt sätt att om den omdefinieras i punkten blir kontinuerlig där så har f en hävbar diskontinuitet där.

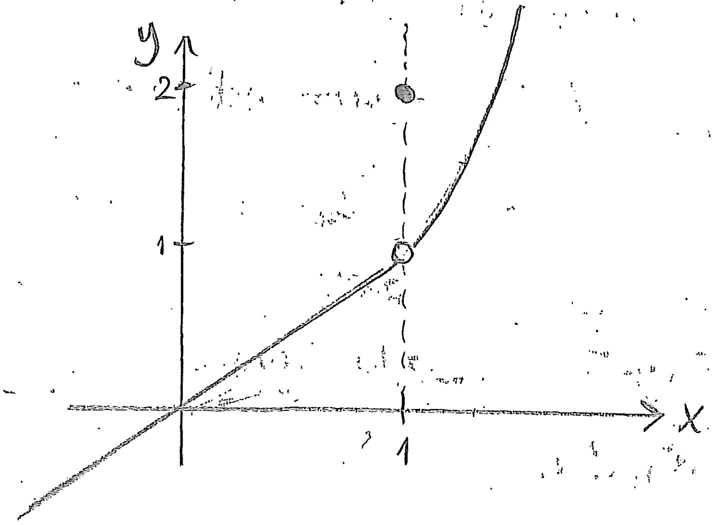
Exempel: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1 \\ x, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

Hävbar diskontinuitet i $x = 1$?

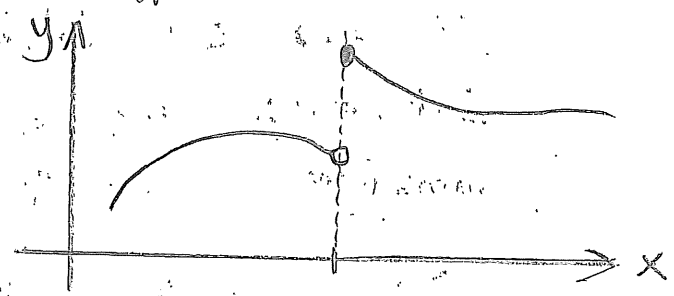
Lösning: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$. Definiera om f s.

värde i $x=1$ enligt $f(1)=1$.

Då blir f kontinuerlig. f har alltså en hävbar diskontinuitet i $x=1$. $\square$



En funktion av följande typ har inte hävbar diskontinuitet:



Från och med nu antas slutna ändliga intervall $[a,b]$.

<u>Sats:</u> Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ så är f begränsad där.

<u>Bevis:</u> Vi visar att f är uppåt begränsad.
(Ej viktigt) Bilda $S_n = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b$ och $f(x) > n\}$.

f uppåt begränsad omm $S_n = \emptyset$ för något $n \in \mathbb{N}$. (Då är n en övre begränsning till f.)

⑤ Antag motsatsen, d.v.s. $S_n \neq \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$S_n \subset [a,b]$ så nedåt begränsad av a.

Fullständighetsaxiomet $\Longrightarrow$ $\inf S_n$ existerar

Sätt $x_n = \inf S_n$. Notera att $a \leq x_n$.

$S_n \neq \emptyset \Rightarrow f(x) > n$ någonstans i $[a,b]$

P.g.a. kontinuitet så gäller detta ett intervall i $[a,b]$. (Detta ligger då i S_n.)

$\Longrightarrow x_n < b$

$\Longrightarrow f(x_n) \geq n$ (ty om $f(x_n) < n$ så $f(x) < n$ till höger om x_n p.g.a. kont., d.v.s. $\inf S_n > x_n$, vilket motsäger $x_n = \inf S_n$)

$S_{n+1} \subset S_n \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n \Rightarrow \{x_n\}$ är växande talföljd. $\{x_n\}$ har övre begränsning b så $\{x_n\}$ konvergerar. (Se F2 sid. 8.)

Låt $\lim_{n\to\infty} x_n = L$

$a \leq x_n < b \Rightarrow a \leq L \leq b$ (Se F2 sid. 10.)

f kont. i $L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(L)$

(Detta är i princip analogt med satsen på sid. 2.)

Å andra sidan, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \geq \lim_{n\to\infty} n = \infty$

$(f(x_n) \geq n)$

Vi har en motsägelse
Antagandet $S_n \neq \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}$ är fel
$\Longrightarrow$ f uppåt begränsad. $\square$

(Motsvarande för att bevisa f nedåt begränsad.)
Vi behöver satsen för att visa:

__Satsen om största och minsta värde:__

Om f kontinuerlig på $[a,b]$ så finns $p,q \in [a,b]$ s.a. $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ för alla $x \in [a,b]$.

__Bevis:__ Värdemängden $S = \{f(x) : a \leq x \leq b\}$ till f har övre begränsning enligt föregående sats.
$\Longrightarrow$ Fullständighetsaxiomet ger att $\sup S$ finns, skriv $M = \sup S$.
Antag finns ej $q \in [a,b]$ s.a. $f(q) = M$.
$\Longrightarrow$ $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ är kontinuerlig på $[a,b]$.

$\Longrightarrow$ Finns $K > 0$ s.a. $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)} \leq K$

för alla $x \in [a,b]$ enl. föregående sats.

$\Longrightarrow$ $f(x) \leq M - 1/K \quad \forall x \in [a,b]$
Motsäger att $M = \sup S$. Motsägelse!

7

Finns alltså $q \in [a,b]$ s.a. $f(q) = M$

$M = \sup S \Rightarrow f(x) \leq f(q) \quad \forall x \in [a,b]$

(P.s.s. för $f(p) \leq f(x)$.) $\square$

Notera: $m = f(p)$ minsta värde och
$M = f(q)$ största värde

Exempel: Har $f(x) = 3 + 2x - x^2$ ett största värde på $[0,2]$ och isåfall vilket och var?

Lösning: f kontinuerlig på slutet ändligt intervall $[0,2]$

$\Rightarrow$ f antar på $[0,2]$ ett största värde enligt satsen (vi har en garanti!)

$$f(x) = 3 + 2x - x^2 = 3 - (x^2 - 2x) =$$
$$= 3 - (x^2 - 2x + 1 - 1) = 3 - ((x-1)^2 - 1) =$$
$$= 4 - (x-1)^2 \leq 4 = f(1)$$

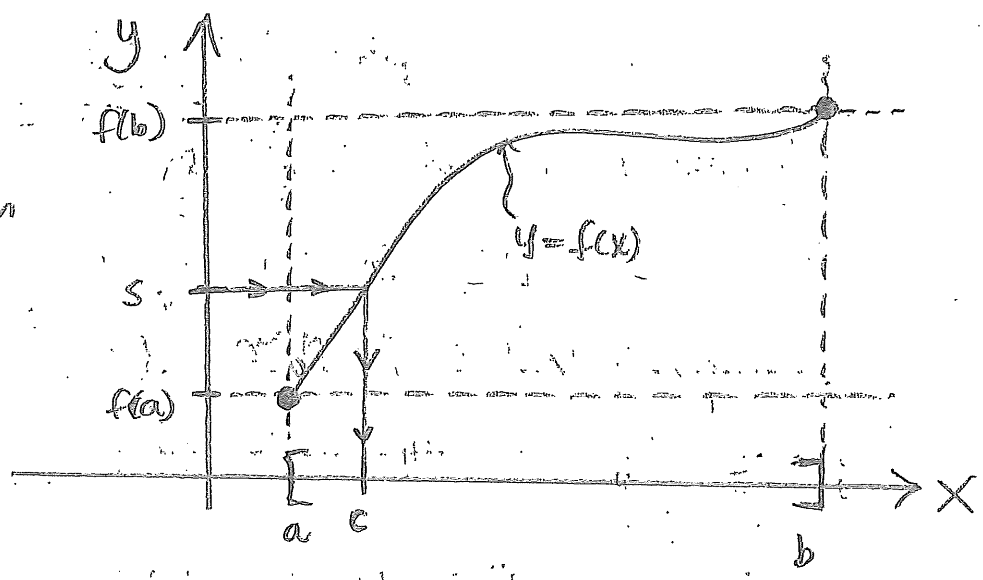
för alla $x \in [0,2]$.

Största värdet är $\underline{4}$ och antas i $\underline{x = 1}$. $\square$

Satsen om mellanliggande värden:

Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ och s ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$ så finns $c \in [a,b]$ sådant att $f(c) = s$.

f är en <u>sammanhängande</u> kurva



<u>Bevis:</u> Antag $f(a) < s < f(b)$.

Låt $S = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b$ och $f(x) \leq s\}$

$$\left.\begin{array}{l} a \in S \Rightarrow S \neq \emptyset \\ b \text{ övre begränsning till } S \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Fullständighetsaxiomet ger att $\sup S$ finns

Kalla $c = \sup S$.

Antag $f(c) > s \xRightarrow{f(a) < s} c \neq a$

Kontinuitet $\Rightarrow$ Finns $\delta > 0$ s.a. $f(x) > s$

på $\underbrace{(c-\delta; c]}$ ← funkar ty $c \neq a$

$\Rightarrow$ $c - \delta$ övre begränsning till S

Men $c - \delta < c = \sup S$.

Motsägelse, vilket innebär $f(c) \leq s$.

Antag $f(c) < s \xRightarrow{s < f(b)} c \neq b$

Kontinuitet $\Rightarrow$ Finns $\delta > 0$ s.a. $f(x) < s$

⑨

på $\underbrace{[c, c+\delta)}_{\text{funkar fg } c \neq b}$

Uppenbarligen gäller $[c, c+\delta) \subset S$.

Men $c = \sup S$ är övre begränsning till S.

Motsägelse, vilket innebär $f(c) \geq s$.

Totalt har vi alltså visat $f(c) = s$. $\square$

(Motsvarande bevis i fallet $f(a) > s > f(b)$.)

<u>Exempel:</u> Visa att $x^3 - x - 1 = 0$ har minst en lösning på $[1, 2]$

<u>Lösning:</u> Låt $f(x) = x^3 - x - 1$, kontinuerlig funktion

$$f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0$$

$$f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5 > 0$$

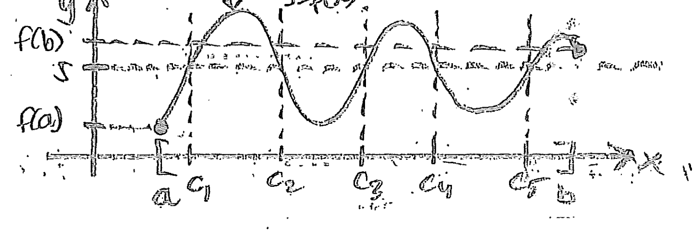
0 ligger mellan -1 och 5 och f kont.

$\Longrightarrow$ Finns $c \in [1,2]$ s.a. $f(c) = 0$

d.v.s. $c^3 - c - 1 = 0$, d.v.s. c lösning. $\square$

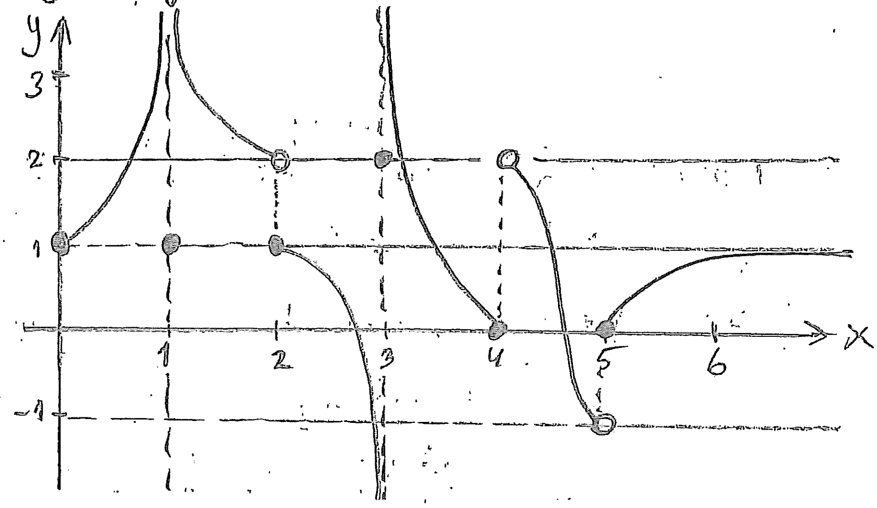
<u>Notera:</u> Satsen om mellanliggande värden kan ge flera olika c, förstås:

$$s = f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = f(c_4) = f(c_5)$$



Några jämna övningsuppgifter

1.4:4



Diskontinuerlig: $\boxed{x=1,\ x=2,\ x=3,\ x=4,\ x=5}$

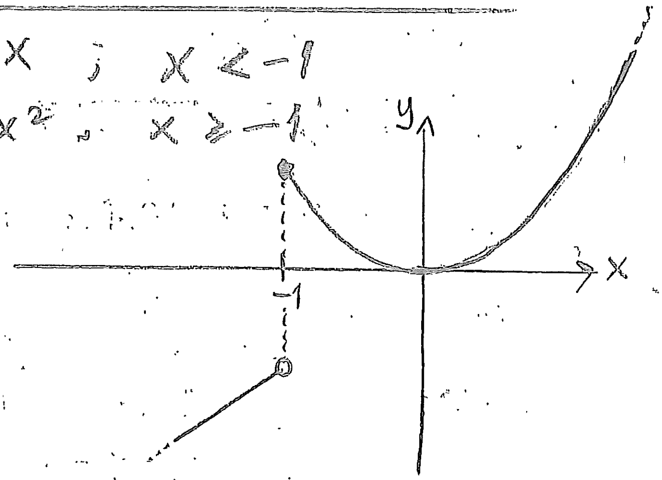
Vänsterkontinuerlig: $\boxed{x=4}$

Högerkontinuerlig: $\boxed{x=2 \text{ och } x=5}$

1.4:8

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x < -1 \\ x^2 & ; \quad x \geq -1 \end{cases}$$

Låt oss skissa:



Kontinuerlig överallt utom i $x=-1$ (diskontinuitet).

$$\lim_{x\to -1_-} f(x) = \lim_{x\to -1_-} x = \lim_{x\to -1} x = -1 \quad \text{(vänster)}$$

$$\lim_{x\to -1_+} f(x) = \lim_{x\to -1_+} x^2 = \lim_{x\to -1} x^2 = 1 \quad \text{(höger)}$$

$f(1) = 1^2 = 1 \Rightarrow$ Högerkontinuerlig i $x=-1$

(11) <u>1.4:14</u> $f(t) = \frac{1+t^3}{1-t^2}$ i $t = -1$.

f är diskontinuerlig i $t=-1$.
Notera att $1+t^3$ har nollställe i $t=-1$
$(1+(-1)^3 = 1-1 = 0)$ så man kan bryta
ut $1+t$ genom t.ex. polynomdivision:

$$\begin{array}{l} \quad t^2 - t + 1 \\ \hline t^3 + 1 \quad \big| \, t+1 \\ -t^2(t+1) \\ \hline -t^2 + 1 \\ -(-t)(t+1) \\ \hline t+1 \\ -1(t+1) \\ \hline 0 \end{array}$$

← jämnt ut!

$$\Rightarrow 1+t^3 = (1+t)(1-t+t^2)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1+t^3}{1-t^2} = \frac{(1+t)(1-t+t^2)}{(1+t)(1-t)} =$$

$$= \frac{1-t+t^2}{1-t}, \quad t \neq -1$$

$$\lim_{t\to -1} f(t) = \lim_{t\to -1} \frac{1-t+t^2}{1-t} = \frac{1-(-1)+(-1)^2}{1-(-1)} =$$

$$= \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

Definiera $f(t) = \frac{3}{2}$ så blir f kontinuerlig i $t=-1$, och formeln för "utvidgningen" blir $f(t) = \frac{1-t+t^2}{1-t}$

<u>1.4:30</u> Visa $x^3 - 15x + 1 = 0$ har tre lösningar i $[-4,4]$.

<u>Lösning:</u> $f(x) = x^3 - 15x + 1$ kontinuerlig

Låt oss testa att beräkna f i några punkter:

$$f(-4) = (-4)^3 - 15 \cdot (-4) + 1 = $$
$$= -64 + 60 + 1 = -3 < 0$$

$$f(-3) = (-3)^3 - 15 \cdot (-3) + 1 = $$
$$= -27 + 45 + 1 = 19 > 0$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 15 \cdot (-2) + 1 = $$
$$= -8 + 30 + 1 = 23 > 0$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 15 \cdot (-1) + 1 = $$
$$= -1 + 15 + 1 = 15 > 0$$

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(1) = 1 - 15 + 1 = -13 < 0$$

$$f(2) = 8 - 30 + 1 = -21 < 0$$

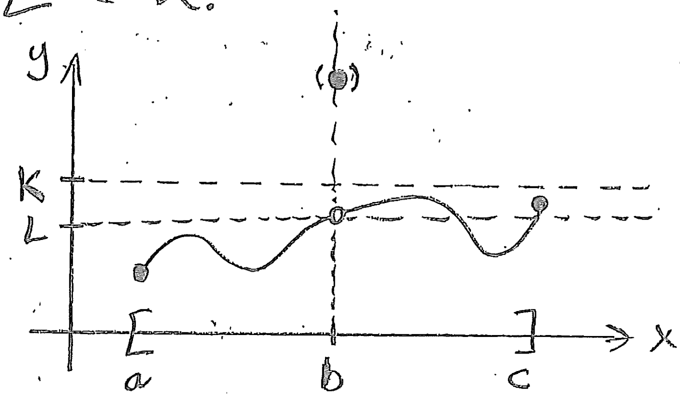
$$f(3) = 27 - 45 + 1 = -17 < 0$$

$$f(4) = 64 - 60 + 1 = 5 > 0$$

Enligt satsen om mellanliggande värden finns p.g.a. teckenväxlingarna nollställen till f mellan $x = -4$ och $x = -3$, mellan $x = 0$ och $x = 1$ samt mellan $x = 3$ och $x = 4$. $\square$

(13) **A. III : 2** Visa att om $f(x) \leq K$ på $[a,b)$ och $(b,c]$ och om $\lim_{x \to b} f(x) = L$ så måste $L \leq K$.

Lösning:



Antag $L > K$.

Låt $\varepsilon = \frac{L-K}{2}$. Notera $\varepsilon > 0$.

$\lim_{x \to b} f(x) = L \Rightarrow$ Finns $\delta > 0$ som uppfyller

$$\delta < \max\{b-a, c-b\} \quad \text{s.a.}$$

$$0 < |x-b| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Speciellt gäller i detta fall:

$$f(x) > L - \varepsilon = L - \frac{L-K}{2} =$$

$$= \frac{L+K}{2} > \frac{K+K}{2} = K$$

Detta motsäger $f(x) \leq K$

$\Longrightarrow$ $L \leq K$ måste gälla! $\square$

A. III : 10 Visa $f(x) = |x|$ kontinuerlig på $\mathbb{R}$

Lösning: Låt $\varepsilon > 0$ vara givet.

Vill nu hitta $\delta > 0$ s.a.

$$|x-a| < \delta \Rightarrow \big||x|-|a|\big| < \varepsilon$$

Vi har: $|x| = |(x-a)+a| \leq |x-a|+|a|$

$$\Longrightarrow |x|-|a| \leq |x-a|$$

och: $|a| = |-a| = |(x-a)+(-x)| \leq$

$$\leq |x-a|+|-x| = |x-a|+|x|$$

$$\Longrightarrow -(|x|-|a|) \leq |x-a|$$

Totalt: $\pm(|x|-|a|) \leq |x-a|$

d.v.s. $\big||x|-|a|\big| \leq |x-a|$

Om $\delta = \varepsilon$ så gäller att

$$|x-a| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \big||x|-|a|\big| \leq |x-a| < \delta = \varepsilon$$

och vi är klara. $\square$

Se även RÖ 2 HT09 där jag löst bl.a.

1.4:6 och 1.4:18

Lösningar till dessa återfinns också nedan.

1.4:6 $\text{sgn}\, x = \frac{x}{|x|}$ varken kontinuerlig eller diskontinuerlig i $x=0$. Varför?

Eftersom en funktion endast kan vara kontinuerlig eller diskontinuerlig i punkter i definitionsmängden så kan inte $\text{sgn}\, x$ vara kont. eller diskont. i $x=0$ eftersom $\text{sgn}\, x$ odefinierad i $x=0$.

1.4:18 $g(x) = \begin{cases} x-m & , x<3 \\ 1-mx & , x \geq 3 \end{cases}$. Bestäm m

så att g kontinuerlig överallt (läs: i $x=3$).

Vill ha $\lim_{x\to 3} g(x) = g(3)$ för kontinuitet

i $x=3$. $\lim_{x\to 3} g(x)$ väldefinierad omm

$$\lim_{x\to 3-} g(x) = \lim_{x\to 3+} g(x):$$

$$\lim_{x\to 3-} (x-m) = \lim_{x\to 3+} (1-mx)$$

$$3-m = 1-m\cdot 3$$

$$m = -1$$

Vilket ger $\lim_{x\to 3} g(x) = 4$ samma!

Eftersom $g(3) = 1-(-1)\cdot 3 = 4$

Så har vi kontinuitet i $x=3$.

Kontinuitet fås alltså omm $m=-1$.