

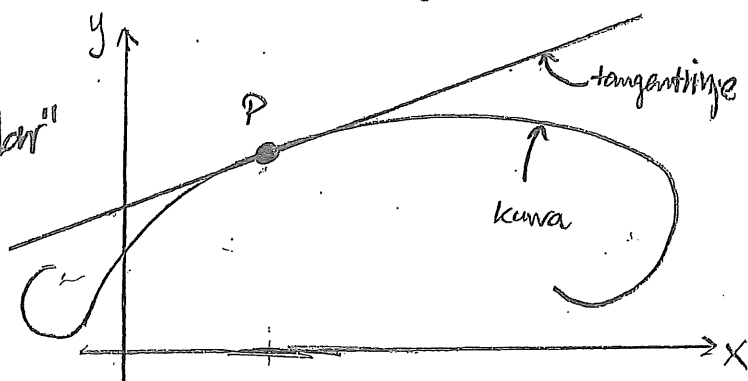
④

Föreläsning 4

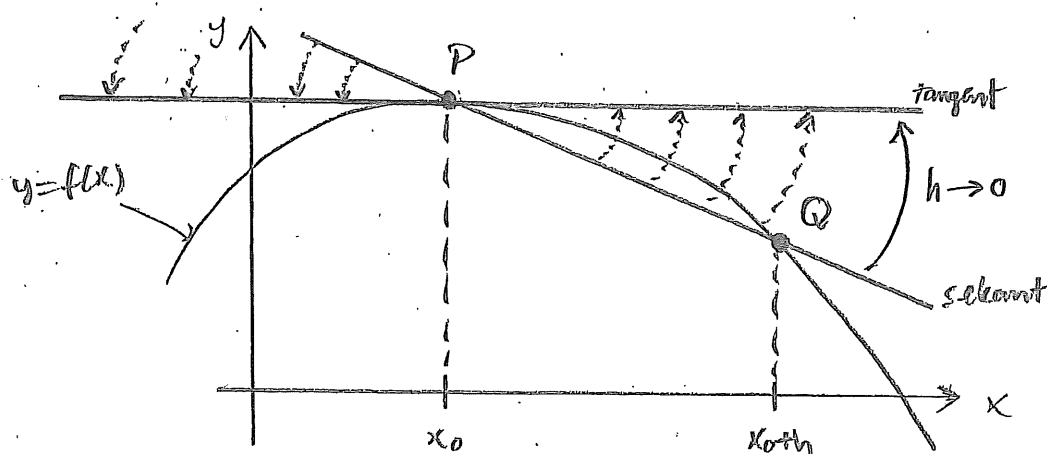
Tangentlinjer

En tangentlinje till en kurva (t.ex. en funktionsgraf) är en rät linje som går genom kurvan i en bestämd punkt och har samma lutning som kurvan där.

Tangenten "nuddar" alltså bara kurvan där.



För en funktion $y=f(x)$:



Sekantlinje PQ där $P=(x, f(x))$ och $Q=(x_0+h, f(x_0+h))$. Lutningen är:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Sekantlinjen $\longrightarrow$ tangentlinjen då $h \rightarrow 0$
d.v.s. lutningen för tangentlinjen är

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (*) \quad (2)$$

Man inser att tangentens Elevation ges av

$$y = m(x - x_0) + y_0 \quad (\text{icke-vertikal})$$

(m lutningen, $y(x_0) = m(x_0 - x_0) + y_0 = y_0$, Stämmer)

Om gränsvärdet (*) är oändligt (antingen $+\infty$ eller $-\infty$) så har man en

vertikal tangent i $x = x_0$. Om gränsvärdet (*) saknas så saknas även tangent.

Normaler: Linjen genom P, som är vinkelrät mot tangenten kallas för normalen.

Horisontell (vertikal) tangent har vertikal (horisontell) normal, i övrigt gäller:

$$\text{Normallutningen} = - \frac{1}{\text{tangentlutningen}}$$

Exempel: Hitta tangent och normal till

$$y = x^{3/2} \quad \text{i} \quad (4, 8).$$

Lösning: Tangentlutning i $(x_0, y_0) = (4, 8)$:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^{3/2} - 8}{(4+h) - 4}$$

$$\begin{aligned}
 ③ \quad &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((4+h)^{3/2} - 8)((4+h)^{3/2} + 8)}{h((4+h)^{3/2} + 8)} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^3 - 64}{h((4+h)^{3/2} + 8)} = [(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3] = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(64 + 48h + 12h^2 + h^3) - 64}{h((4+h)^{3/2} + 8)} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{48 + 12h + h^2}{(4+h)^{3/2} + 8} = \frac{48}{8+8} = 3
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Tangentlinjens ekvation är

$$\begin{aligned}
 y &= m(x - x_0) + y_0 = \\
 &= 3(x - 4) + 8 = 3x - 4
 \end{aligned}$$

d.v.s. $\boxed{3x - y + 4 = 0}$

För normalen gäller lutningen:

$$m_{\text{normal}} = -\frac{1}{m_{\text{tangent}}} = -\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ Normallinjens ekvation är

$$\begin{aligned}
 y &= m(x - x_0) + y_0 = \\
 &= -\frac{1}{3}(x - 4) + 8
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -3y = (x - 4) - 24$$

d.v.s. $\boxed{x + 3y - 28 = 0}$



Derivatan Om man betraktar lutningen av tangenten till en funktionsgraf som en funktion så har man den s.k.

derivatan:

④

Definition: Derivatan till en funktion f är en funktion f' definierad genom

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (*)$$

i de punkter x för vilka gränsvärdet existerar d.v.s. där f är deriverbar.

Derivatan beskriver hur snabbt en storhet $y = f(x)$ ändras m.a.p. en storhet x .

(T.ex. $y = \text{läge}$, $x = \text{tid} \Rightarrow f'(x) = \text{hastighet}$.)

Notera: Att, kan man skriva (*) som

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(inses genom variabelsubstitution)

Höger- och vänsterderivator: Vi definierar:

• Högerderivata i $x=a$: $f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

• Vänsterderivata i $x=b$: $f'_-(b) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$

Definition: f är deriverbar på $[a,b]$ om

$f'(x)$ finns $\forall x \in (a,b)$ och både $f'_+(a)$ och $f'_-(b)$ finns.

- ⑤ (I denna definition inkluderas alltså även ändpunkterna och inte bara inre punkter.)

Leibniznotation: Det finns många sätt att skriva en derivata på. För en funktion $y = f(x)$ kan man t.ex. skriva:

$$D_x y, y', \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx} f(x), f'(x), D_x f(x), Df(x)$$

$D_x, \frac{d}{dx}$ och D är differentialoperatorer.

(På linjär algebra-språk så är det en linjär avbildning: $D(af+bg) = aDf + bDg$.)

Tecknet $|$ kallas mättningssteckel.

$$\begin{aligned} D_x y|_{x=x_0} &= y'|_{x=x_0} = \frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = \\ &= \frac{d}{dx} f(x)|_{x=x_0} = f'(x_0) = D_x f(x_0) \end{aligned}$$

Differentiabler: $\frac{dy}{dx}$ är en kvot. Kan

derivatan (d.v.s. gränsvärdet då $\Delta x \rightarrow 0$)

betraktas som kvot?

Låt dx vara en oberoende variabel

(differentialen av x) och

låt dy vara en beroende variabel

(differentialen av y) m.a.p. x och dx :

$$dy = \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{derivatan!}} dx = f'(x) dx$$

På detta sätt kan man betrakta $\frac{dy}{dx}$ som en kvot, och värdet är $f'(x)$. ⑥

Differentiäler dx och dy kan i vissa tillämpningar ses som "infinitesimala", d.v.s. oändligt små men väldefinierade. (Detta gränser till filosofi och synsättet äldre matematiker.)

Deriveringsregler Givetvis så använder vi inte derivatans definition vid uträkning av derivator. Man använder diverse regler. Låt oss lista de grundläggande:

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

(Produkt-regeln)

- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(Speciellt: $(cf)'(x) = cf'(x)$, $g(x) = c$)

- Generalisering: $(f_1 f_2 \dots f_n)' = f_1' f_2 \dots f_n + f_1 f_2' \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f_n'$

(Kvot-regeln)

- $(f/g)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, $g(x) \neq 0$

(Speciellt: $(1/f)'(x) = -f'(x)/(f(x))^2$, $f(x) \neq 0$)

|| Låt oss berita $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, med produktregeln och induktion:

7

• Startsteg: $\frac{d}{dx} x^1 = \frac{d}{dx} x = 1 = x^0 = 1x^{1-1}$,

d.v.s. formeln sann för $n=1$.

• Induktionssteg: Antag formeln sann för $n=p$,

d.v.s. $\frac{d}{dx} x^p = p x^{p-1}$. Då gäller:

$$\frac{d}{dx} x^{p+1} = \frac{d}{dx} (x^p x) = [\text{produktregeln}] =$$

$$= \left(\frac{d}{dx} x^p \right) x + x^p \left(\frac{d}{dx} x \right) = [\text{anlagande}] =$$

$$= (p x^{p-1}) x + x^p \cdot 1 =$$

$$= p x^p + x^p = (p+1) x^{(p+1)-1}$$

d.v.s. formeln sann för $n=p+1$.

Induktionsaxiomet säger nu att formeln sann för alla $n \in \mathbb{N}$. □

Kedjeregeln Tar hand om sammansatta funktioner, d.v.s. av typen

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

där $\circ$ utläses "boll".

Sats: Om $f(u)$ deriverbar i $u=g(x)$ och $g(x)$ (kedjeregeln) deriverbar i x så är sammansättningen $(f \circ g)(x)$ deriverbar i x och

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

För $y = f(u)$ och $u = g(x)$ så blir ⑧
det med Leibnitznotation:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Exempel: Derivera $y = (2x^2 - 3x + 1)^{3/2}$

Lösning: Sätt $y = f(u) = u^{3/2}$ och
 $u = g(x) = 2x^2 - 3x + 1$

Enligt kedjeregeln:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \left(\frac{3}{2} u^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{u=g(x)} (4x-3) = \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{g(x)} (4x-3) = \\ &= \left(6x - \frac{9}{2} \right) \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \quad \square \end{aligned}$$

Beweis av satsen: Antag f deriverbar i $u=g(x)$
och g deriverbar i x .

Låt $E(u)$ definieras enligt

$$E(k) = \begin{cases} 0 & , k=0 \\ \frac{f(u+k) - f(u)}{k} - f'(u), & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow 0} E(k) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(u+k) - f(u)}{k} - f'(u) = \\ &= f'(u) - f'(u) = 0, \end{aligned}$$

d.v.s. E är kontinuerlig i $k=0$ ty $E(0)=0$.

⑨ Låt $u = g(x)$ och $k = g(x+h) - g(x)$
 $\Rightarrow u+k = g(x) + (g(x+h) - g(x)) = g(x+h)$

Eftersom $f(u+k) - f(u) = (f'(u) + E(u))k$
 (gäller även för $k=0$) så fås därför

$$f(g(x+h)) - f(g(x)) = (f'(g(x)) + E(k)) \cdot (g(x+h) - g(x))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dx} f(g(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f'(g(x)) + E(k))(g(x+h) - g(x))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (f'(g(x)) + E(k)) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \end{aligned}$$

$$= (f'(g(x)) + \lim_{h \rightarrow 0} E(k)) g'(x) =$$

$$= [E \text{ kontinuerlig i } k=0] =$$

$$= (f'(g(x)) + E(\lim_{h \rightarrow 0} k)) g'(x)$$

Det återstår att visa att $\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$ ty

$$E(0) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} k = \lim_{h \rightarrow 0} (g(x+h) - g(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} h =$$

$$= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} h \right) =$$

$$= g'(x) \cdot 0 = 0, \text{ det gäldar.}$$



Notea: I sista delen av beviset visade ⁽¹⁰⁾
vi faktiskt att en deriverbar funktion även
är kontinuerlig.

Högre ordningens derivator

Om derivatan $y' = f'(x)$ till funktion
 $y = f(x)$ är deriverbar i x så kan vi
derivera derivatan. Resultatet kallas andra
derivatan till f och skrivs $y'' = f''(x)$.

Allmänt kan man erhålla n:te-derivatan

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x). \quad \text{Beteckningar:}$$

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = D_x^n y = D_x^n f(x)$$

(Man använder prim till och med y''' , sen $y^{(4)}$, $y^{(5)}$,
 $y^{(6)}$...)

Användning av derivator Derivator beskriver många
fenomen. Låt oss titta på ett exempel
där derivatan kan användas.

Notea först att om $f'(x_0) = 0$ så säger
man att f är stationär i x_0 och att
 x_0 är en kritisk punkt.

Exempel: Temperatur T ($^{\circ}\text{C}$) efter t (timmar):
 $T = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 10, \quad t \in [0, 5]$

⑪

Hur snabbt faller/stiger temperaturen
 efter 1 timme? efter 3 timmar?
 Vid vilka tidpunkter är temperaturen
 stationär?

Lösning: Temperaturförändring ($^{\circ}\text{C}/\text{timme}$):

$$\frac{dT}{dt} = t^2 - 6t + 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Ändring } t=1: \left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=1} = 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = \\ = 3^{\circ}\text{C}/\text{timme} \text{ (stiger)} \\ \text{Ändring } t=3: \left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=3} = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = \\ = -1^{\circ}\text{C}/\text{timme} \text{ (faller)} \end{cases}$$

Stationär: $\frac{dT}{dt} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} = 3 \pm 1 = \begin{cases} 4 \text{ timmar} \\ 2 \text{ timmar} \end{cases}$$

d.v.s. temperaturen stationär efter

2 timmar och 4 timmar



Några jämna övningsuppgifter

2.1:22 Kurva $y = 1/x$ linje $y = 4x - 3$

Kurvan har i punkten $(a, 1/a)$ lutningen

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{(a+h) - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{a - (a+h)}{(a+h)a}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{(a+h)a h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(a+h)a} = -\frac{1}{a^2}$$

Detta är tangentens lutning i $x=a$.

Normalen till tangenten har lutningen $-\frac{1}{m}$.

På andra sidan vet vi att normalen är $y = 4x - 3$

Så $4 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\frac{1}{a^2}} = a^2$

$$\Rightarrow a = \pm 2 \Rightarrow 1/a = \pm 1/2$$

Punkterna är $(\pm 2, \pm 1/2)$ (kopplade tecken)

2.2:18 $f(x) = \frac{3}{4} \sqrt{2-x}$

a) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{4} \sqrt{2-(x+h)} - \frac{3}{4} \sqrt{2-x}}{h} =$$

$$= \frac{3}{4} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2-x-h} - \sqrt{2-x})(\sqrt{2-x-h} + \sqrt{2-x})}{h(\sqrt{2-x-h} + \sqrt{2-x})} =$$

$$= \frac{3}{4} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2-x-h) - (2-x)}{h(\sqrt{2-x-h} + \sqrt{2-x})} =$$

13

$$= -\frac{3}{4} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2-x-n} + \sqrt{2-x}} =$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-x} + \sqrt{2-x}} = \boxed{-\frac{3}{8\sqrt{2-x}}}$$

b) Med differentier:

$$dy = f'(x) dx = -\frac{3}{8\sqrt{2-x}} dx$$

d.v.s. $\boxed{dy = -\frac{3dx}{8\sqrt{2-x}}}$

2.3:54 $(f_1 f_2 \dots f_n)' = f_1' f_2 \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f_n'$
Visa med induktion ($n \in \mathbb{N}$)

Lösning: • Startsteg: $f_1' = f_1'$ (trivialt)
 $\Rightarrow$ Stämmer för $n=1$

• Induktionssteg: Antag sant för $n=p$:

$$(f_1 f_2 \dots f_p)' = f_1' f_2 \dots f_p + \dots + f_1 f_2 \dots f_p' \quad (*)$$

Då får vi för $n=p+1$:

$$(f_1 f_2 \dots f_p f_{p+1})' = ((f_1 f_2 \dots f_p) f_{p+1})' =$$

$$= (f_1 f_2 \dots f_p)' f_{p+1} +$$

$$+ (f_1 f_2 \dots f_p) f_{p+1}' \quad (**)$$

$$\stackrel{(*)}{=} (f_1' f_2 \dots f_p + \dots + f_1 f_2 \dots f_p') f_{p+1} +$$

$$+ f_1 f_2 \dots f_p f_{p+1}' =$$

$$= f_1' f_2 \dots f_p f_{p+1} + \dots +$$

$$+ f_1 f_2 \dots f_p' f_{p+1} +$$

$$+ f_1 f_2 \dots f_p f_{p+1}'$$

d.v.s. vi har verifierat att det stämmer
för $n=p+1$, induktionssteget klart.

Induktionsaxiomet ger att formeln stämmer
för alla $n \in \mathbb{N}$. □

2.4:30 Vi ska beräkna $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1} \right) \Big|_{x=-2}$.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1} \right) \Big|_{x=-2} = [\text{använd först kvotregeln}] =$$

$$= \frac{(x^2+1) \frac{d}{dx} \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1} \frac{d}{dx} (x^2+1)}{(x^2+1)^2} \Big|_{x=-2}$$

$$= \frac{(x^2+1) \frac{d}{dx} \sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(x^2+1) \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \frac{d}{dx} (x^2-1) - \sqrt{x^2-1} \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \Big|_{x=-2}$$

$$= \frac{(x^2+1) \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} 2x - 2x\sqrt{x^2-1}}{(x^2+1)^2} \Big|_{x=-2}$$

$$= \frac{\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}} - 2x\sqrt{x^2-1}}{(x^2+1)^2} \Big|_{x=-2}$$

$$= \frac{\frac{(-2)(4+1)}{\sqrt{4-1}} - 2(-2)\sqrt{4-1}}{(4+1)^2} =$$

$$= \frac{-10/\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{5^2} = \frac{4 \cdot 3 - 10}{25\sqrt{3}} =$$

$$= \boxed{\frac{2}{25\sqrt{3}}}$$

⑤ 2.6: 16 $f(x) = \sqrt{x}$, bestämma $f^{(n)}(x)$.

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad (n=0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \quad (n=1)$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} \quad (n=2)$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{5}{2}} \quad (n=3)$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) x^{-\frac{7}{2}} \quad (n=4)$$

⋮

Förmodan: $f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-\frac{2n-3}{2}\right) x^{-\frac{2n-1}{2}} =$

$$= (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n} x^{\frac{1}{2}-n}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n} x^{\frac{1}{2}-n}, n \geq 2$$

(Notera: $m!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (m-2)m$, m udda,
 en: s.k. Semifakultet.)

Induktionsbevis: • Startsteg: $n=2$ redan klart,
 se ovan.

• Induktionssteg: Antag formeln
 sann för $n=p$. Då får:

$$f^{(p+1)}(x) = \frac{d}{dx} \left(f^{(p)}(x) \right) = [\text{sann } n=p] =$$

$$= \frac{d}{dx} \left((-1)^{p-1} \frac{(2p-3)!!}{2^p} x^{\frac{1}{2}-p} \right) =$$

$$= (-1)^{p-1} \frac{(2p-3)!!}{2^p} \left(\frac{1}{2} - p \right) x^{\frac{1}{2}-p-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{p+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p-3)}{2^p} \left(-\frac{2p-1}{2}\right) x^{\frac{1}{2} - (p+1)} \quad (16) \\
&= (-1)^{p+1} (-1) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p-3)(2p-1)}{2^{p+1}} x^{\frac{1}{2} - (p+1)} = \\
&= (-1)^{(p+1)-1} \frac{(2p-1)!!}{2^{p+1}} x^{\frac{1}{2} - (p+1)} = \\
&= (-1)^{(p+1)-1} \frac{(2(p+1)-3)!!}{2^{p+1}} x^{\frac{1}{2} - (p+1)}
\end{aligned}$$

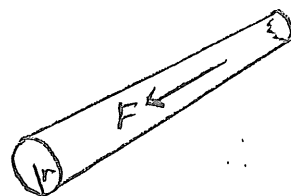
d.v.s. formeln sann för $n=p+1$.

Enligt induktionsaxiomet sann $\forall n \geq 2$. □

2.7:32 (Poiseuilles lag)

Flöde av vätska genom ett rör :

$$F = k r^4 \quad (\text{liter/min})$$



där r är rörets radie och k konstant.

(k beror på tryckskillnaden, rörets längd och vätskans viskositet.)

Vilken procentuell ökning i r ger +10 % hos F ?

$$\frac{dF}{dr} = 4kr^3 \Rightarrow \Delta F \approx \frac{dF}{dr} \Delta r = 4kr^3 \Delta r,$$

ΔF och Δr är ökning hos F och r . Vi vill ha

$$\frac{\Delta F}{F} = +10\% \Leftrightarrow \frac{4kr^3 \Delta r}{F} \approx 0.1 \Leftrightarrow \frac{4kr^3 \Delta r}{kr^4} \approx 0.1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \frac{\Delta r}{r} \approx 0.1 \Leftrightarrow \frac{\Delta r}{r} \approx \frac{0.1}{4} = 0.025 = +2.5\%$$

d.v.s. radien ska approximativt öka 2.5 %

⑦ Se även RÖ.3 HTO9 där jag löst bla.

2.2:24, 2.2:32 och 2.2:46

Lösningar till dessa återfinns också nedan.

2.2:24 $f(t) = \frac{t^2-3}{t^2+3}$, beräkna $f'(t)$ ur definitionen.

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{(t+h)^2-3}{(t+h)^2+3} - \frac{t^2-3}{t^2+3} \right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{((t+h)^2-3)(t^2+3) - (t^2-3)((t+h)^2+3)}{((t+h)^2+3)(t^2+3)} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{(t^2+2th+h^2-3)(t^2+3) - (t^2-3)(t^2+2th+h^2+3)}{((t+h)^2+3)(t^2+3)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{((t^4+3t^2+2t^3h+6th+ \underbrace{t^2h^2+3h^2-3t^2-9}) - (t^4+2t^3h+t^2h^2+3t^2-3t^2-6th-3h^2-9))}{((t+h)^2+3)(t^2+3)} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{(12th+6h^2)}{((t+h)^2+3)(t^2+3)} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(2t+h)}{((t+h)^2+3)(t^2+3)} = \frac{6(2t+0)}{((t+0)^2+3)(t^2+3)} =$$

$$= \frac{12t}{(t^2+3)(t^2+3)} = \frac{12t}{(t^2+3)^2}$$

2.2:32 Tangentlinje till $y = \frac{t}{t^2-2}$ i $t=-2$ med ⑬
derivatans definition...

Vi noterar att $y|_{t=-2} = \frac{-2}{(-2)^2-2} = \frac{-2}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1$

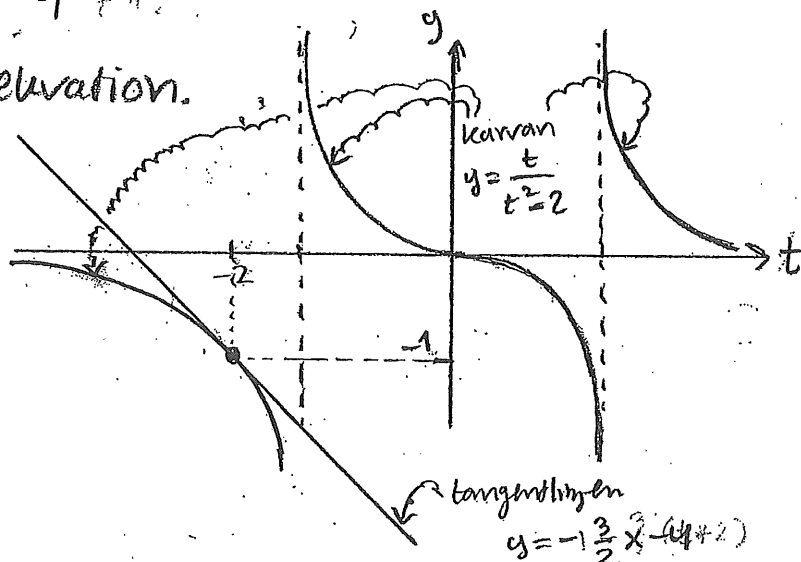
Lutningen hos kurvan i $t=-2$ blir då:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}\bigg|_{t=-2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y|_{t=-2+h} - y|_{t=-2}}{h} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{-2+h}{(-2+h)^2-2} - (-1) \right) = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{-2+h + (-2+h)^2 - 2}{(-2+h)^2-2} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{-2+h+4-4h+h^2-2}{(-2+h)^2-2} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{-3h+h^2}{(-2+h)^2-2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3+h}{(-2+h)^2-2} = \\&= \frac{-3+0}{(-2+0)^2-2} = \frac{-3}{4-2} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Tangentlinjen går genom $(-2, -1)$ och har lutning $-\frac{3}{2}$.

Alltså: $y = -1 + (-\frac{3}{2})(t - (-2)) = -1 - \frac{3}{2}(t+2)$
 $= -\frac{3}{2}t - 4$

är tangentlinjens ekvation.



19

2.2:46 Kurva $y=x^2$ och rät linje $x+4y=18$
Skär varandra i rät vinkel.

Skärningspunkter: Sätt in $y=x^2$ i $x+4y=18$
 $\Rightarrow x+4x^2=18$

$$x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{9}{2} = 0$$

$$x = -\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{9}{2}} = -\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{9 \cdot 32}{64}} =$$

$$= -\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{289}{64}} = -\frac{1}{8} \pm \frac{17}{8} = \begin{cases} 16/8 = 2 \\ -18/8 = -9/4 \end{cases}$$

d.v.s. $x = -9/4$, $x = 2$ är skärningspunkterna.

Lotning hos $y=x^2$: $k_1 = \frac{dy}{dx} = 2x$

Lotning hos $x+4y=18 \Rightarrow y = \frac{9}{2} - \frac{1}{4}x$: $k_2 = -\frac{1}{4}$

Kurvan och linjen skär i rät vinkel då
 $k_1 k_2 = -1$,

Punkten $x = -\frac{9}{4}$: $k_1|_{x=-\frac{9}{4}} = 2(-\frac{9}{4}) = -\frac{9}{2}$

$$\text{Produkt: } (k_1 k_2)|_{x=-\frac{9}{4}} = (-\frac{9}{2})(-\frac{1}{4}) = -\frac{9}{8} \neq -1$$

Punkten $x = 2$: $k_1|_{x=2} = 2 \cdot 2 = 4$

$$\text{Produkt: } (k_1 k_2)|_{x=2} = 4 \cdot (-\frac{1}{4}) = -1$$

(20)

Kurvan och linjen skär alltså varandra i
rät vinkel i punkten $(2, 4)$.

