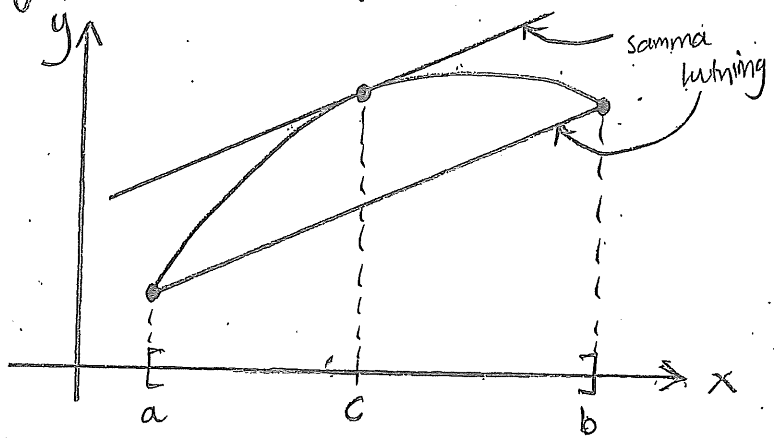
①

Föreläsning 5

Medelvärdessatsen

Kan medelvärdet på derivatan uppnås i någon enskild punkt?



Denna fråga ska vi försöka besvara. Behöver först formulera och bevisa några satser.

Sats: Om f definierad på (a,b) och har ett största eller minsta värde i $c \in (a,b)$ och om $f'(c)$ finns så gäller $f'(c)=0$.

Bevis: Antar f har största värde i $c \in (a,b)$.

$$\Longrightarrow f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in (a,b)$$

$$f(x) - f(c) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

- Låt $c < x < b$. $\quad (x-c>0)$

$$\Longrightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

$$\Longrightarrow f'(c) = \lim_{x \to c_+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

- Låt $a < x < c$ $\quad (x-c<0)$

②

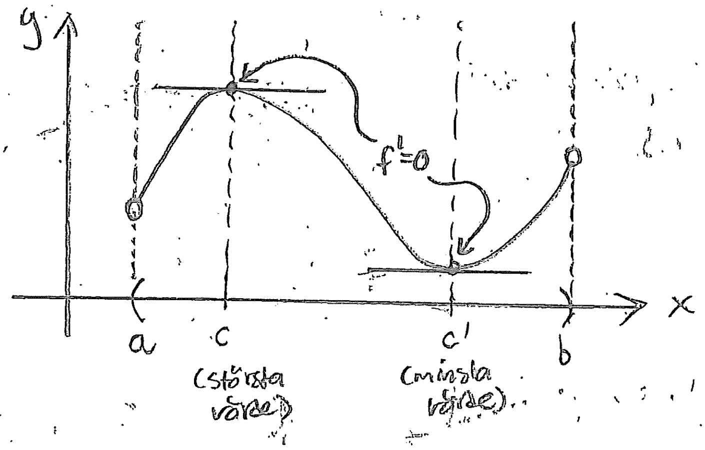
$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(c) = \lim_{x \to c_-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

Totalt får vi alltså $f'(c) = 0$. $\square$

(Motsvarande om f antar minsta värde i c.)

Betydelse av satsen:



<u>Rolles sats:</u> Antag g kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b).
Om $g(a) = g(b)$ så finns $c \in (a,b)$ sådant att $g'(c) = 0$.

<u>Bevis:</u>
- $g(x) = \underset{(=g(b))}{g(a)}$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow g'(c) = 0$ för <u>alla</u> $c \in (a,b)$
- $g(x) \neq \underset{(=g(b))}{g(a)}$ för något $x \in (a,b)$.

  Antag $g(x) > g(a)$.

  Satsen om största och minsta värde (ty g kont.)

  $\Rightarrow$ Finns $c \in [a,b]$ s.a. $g(c)$ är största värdet

  $g(c) \geq g(x) > g(a) = g(b) \Rightarrow c$ kan ej

③ vara a eller b.

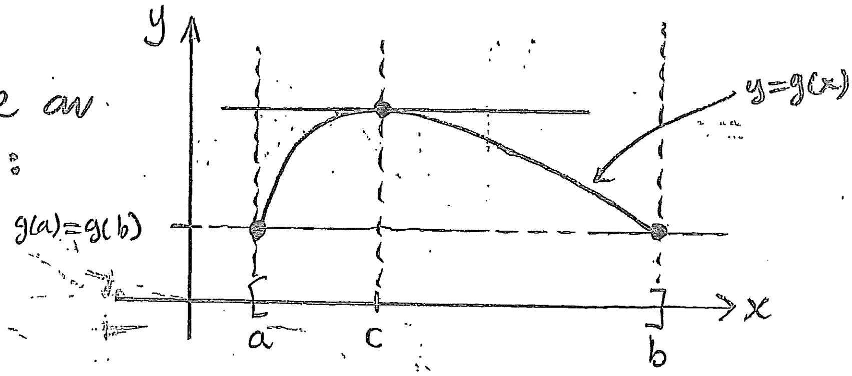
$\Rightarrow \; c \in (a,b)$

$\Rightarrow \; g$ är deriverbar i c ($g'(c)$ finns)

$\Rightarrow \; g'(c) = 0$ enligt förra satsen $\square$

(Motsvarande om $g(x) < g(a)$.)

Betydelse av Rolles sats:

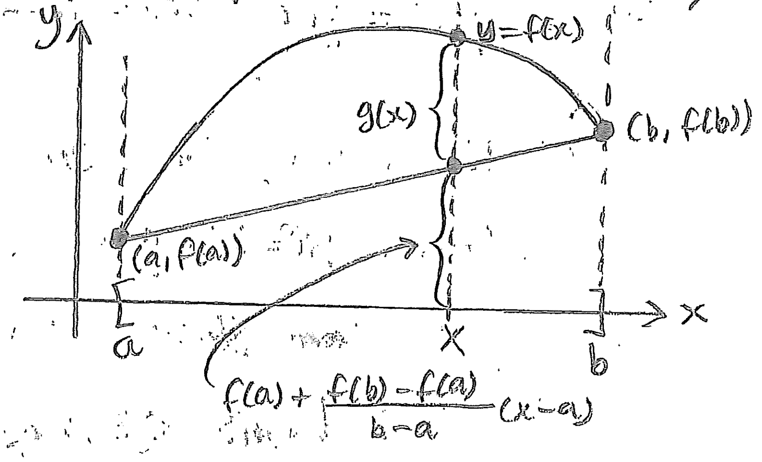


Medelvärdessatsen: Antag f kontinuerlig på $[a,b]$ och att den är deriverbar på (a,b). Då finns $c \in (a,b)$ sådant att

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Bevis: Låt $g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)$,

se figur:



g kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b) eftersom f är det. Dessutom $g(a) = g(b) = 0$.

(4)

Vi kan tillämpa Rolles sats på g

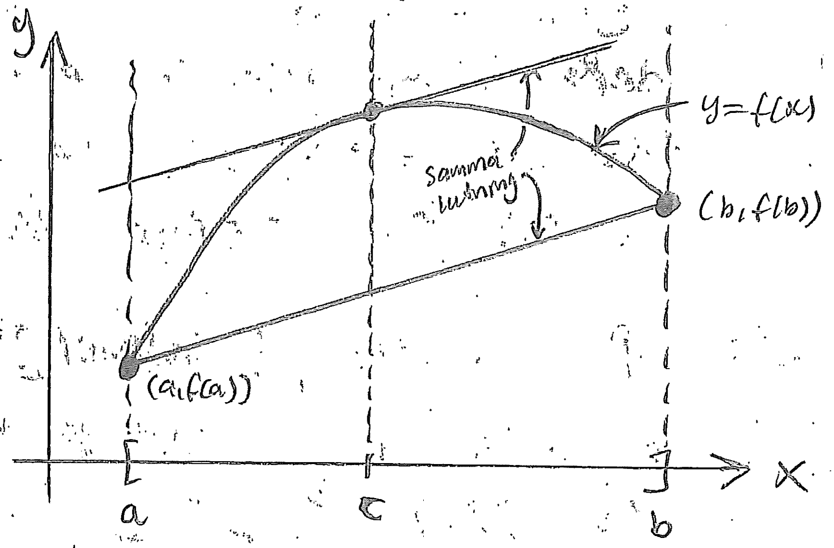
$\Longrightarrow$ Finns $c \in (a,b)$ sådant att $g'(c)=0$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow 0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad \square$$

Betydelse av Medelvärdessatsen:



Generaliserade Medelvärdessatsen:

Om f, g kontinuerliga på $[a,b]$ och deriverbara på (a,b) samt om $g'(x) \neq 0$ för alla $x \in (a,b)$ så finns $c \in (a,b)$ s.a.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Bevis: Låt $h(x) = (f(b)-f(a))(g(x)-g(a)) - (g(b)-g(a))(f(x)-f(a))$

⑤ $h(a) = h(b) = 0$

Enligt Rolles sats finns $c \in (a,b)$ sådant att $h'(c)$

$$\Rightarrow 0 = h'(c) = (f(b)-f(a))g'(x) - (g(b)-g(a))f'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \square$$

Notera: $g(b) \neq g(a)$ krävs i sista steget, men detta ges av $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$.
(Om $g(a) = g(b)$ så skulle Rolle ge $g'(c)$ f.n. $c \in (a,b)$. Motsägelse!)

Sats: f kontinuerlig på intervall I och $f'(x) = 0$ för alla inre punkter i I så $f(x) = C$ på I, C = konstant.

Bevis: Låt $x_0 \in I$ och $C = f(x_0)$.
För varje $x \in I$ s.a. $x \neq x_0$ så ger Medelvärdessatsen att det finns $c \in (x, x_0)$ eller (x_0, x) ($x < x_0$ resp. $x > x_0$) sådant att

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)$$

c är en inre punkt till $I \Rightarrow f'(c) = 0$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) = C$$

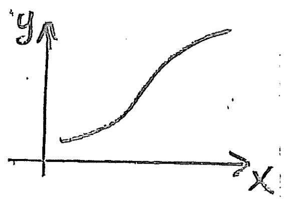
Detta gäller alla $x \in I$. $\square$

Avtagande och växande funktioner:

Antag att f definierad på intervall I som innehåller godtyckliga punkter x_1 och x_2.

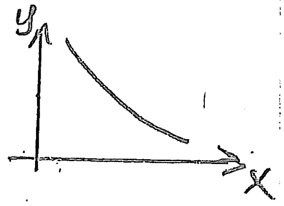
(a) $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$:

f <u>växande</u> på I



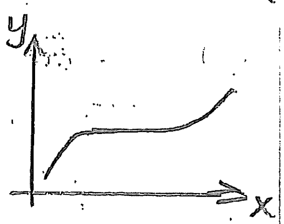
(b) $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$:

f <u>avtagande</u> på I



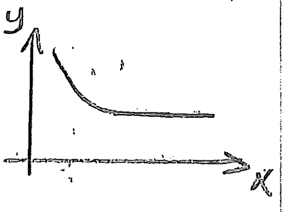
(c) $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$:

f <u>icke-avtagande</u> på I



(d) $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$:

f <u>icke-växande</u> på I



Sats: Låt J öppet intervall och I intervall som innehåller J samt minst en ändpunkt.
Antag f kontinuerlig på I och deriverbar på J.

(a) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow f$ växande på I

(b) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow f$ avtagande på I

(c) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow f$ icke-avtagande på I

(d) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow f$ icke-växande på I

Bevis: Låt $x_1, x_2 \in I$ med $x_2 > x_1$.
Enligt Medelvärdessatsen gäller:

⑦

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$$

för något $c \in (x_1, x_2) \subset J$.

$$\Longrightarrow f(x_2)-f(x_1) = \underbrace{(x_2-x_1)}_{>0} f'(c)$$

d.v.s. $f(x_2)-f(x_1)$ har samma tecken som $f'(c)$. Man inser nu att (a)—(d) gäller.

(T.ex. $f'(x) \le 0 \ \forall x \in J \Rightarrow f'(c) \le 0 \Rightarrow$

$\Longrightarrow f(x_2)-f(x_1) \le 0 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1)$,

d.v.s. icke-avtagande.) $\square$

Extremvärdesproblem

Extremvärde: f har ett största värde $f(x_0)$ i x_0 om $f(x) \le f(x_0)$ för alla x i definitionsmängden.

(Motsvarande för minsta värde.)

största och minsta värde kallas extremvärden.

Sats: Om f:s definitionsmängd är (en ändlig union av) slutna ändliga intervall och f är kontinuerlig överallt så har f ett största och ett minsta värde.

(Detta är Satsen om största och minsta värde fast något generaliserad.)

Definition: f har <u>lokalt maximum</u> $f(x_0)$ i x_0 om det finns $h>0$ s.a. $f(x) \le f(x_0)$ för alla x som uppfyller $|x-x_0| < h$

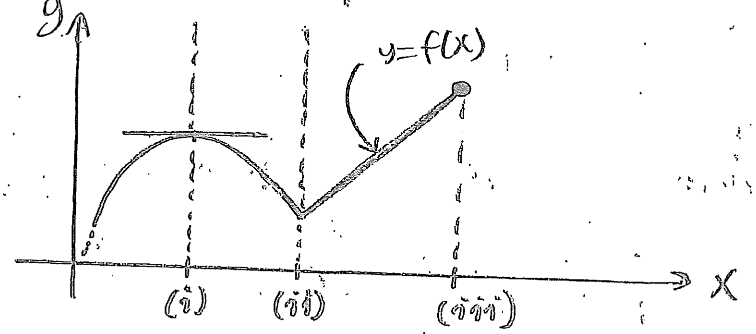
(Motsvarande för <u>lokalt minimum</u>.)

Lokalt maximum och lokalt minimum kallas <u>lokala extremvärden</u>.

Definition: (i) <u>Kritisk punkt:</u> Punkt i definitionsmängden till f där $f'(x)=0$

(ii) <u>Singulär punkt:</u> Punkt i definitionsmängden till f där $f'(x)$ ej def.

(iii) <u>Ändpunkt:</u> Punkt i definitionsmängden till f som inte kan ligga i ett öppet intervall innesluten i definitionsmängden.



Figuren antyder att största och minsta värde finns bland sådana punkter.

<u>Sats:</u> Om f definierad på intervall I har lokalt extremvärde i $x_0 \in I$ så måste x_0 antingen vara kritisk punkt, singulär punkt eller ändpunkt.

⑨ Bevis: Antag f har lokalt maximum i x_0 och x_0 är varken ändpunkt eller singulär punkt. Då finns $h>0$ s.a. f har ett största värde på (x_0-h, x_0+h), och dessutom finns $f'(x_0)$. Då vet vi enligt satsen på sid. 1 att $f'(x_0)=0$. $\square$

(Motsvarande för lokalt minimum.)

När får man lokala extremvärden? Svar:

Sats: (f'-test)

- Antag f kontinuerlig i x_0 som inte är en ändpunkt till definitionsmängden.

  (a) Om (a,b) finns med $x_0 \in (a,b)$ s.a. $f'(x)>0$ på (a,x_0) och $f'(x)<0$ på (x_0,b) så f lok max i x_0

  (b) Som ovan men $f'(x)<0$ på (a,x_0) och $f'(x)>0$ på (x_0,b) så f lok min i x_0.

- Antag a vänstra ändpunkten till definitionsmängden och f högerkontinuerlig i a.

  (c) $f'(x)>0$ på något (a,b) $\Longrightarrow$ f lok min i a

  (d) $f'(x)<0$ på något (a,b) $\Longrightarrow$ f lok max i a

- Antag b högra ändpunkten till definitionsmängden och f vänsterkontinuerlig i b.

  (e) $f'(x) > 0$ på något (a,b)
  $\Rightarrow f$ lok max i b

  (f) $f'(x) < 0$ på något (a,b)
  $\Rightarrow f$ lok min i b

Vad gör man om definitionsmängden inte är (en union av) slutna ändliga intervall?

Sats: f kontinuerlig på (a,b) och
$$\lim_{x \to a_+} f(x) = L \text{ och } \lim_{x \to b_-} f(x) = M$$

$\Rightarrow$
(i) $f(u) > L$ och $f(u) > M$ f.n. $u \in (a,b) \Rightarrow f$ har största värde på (a,b)

(ii) $f(v) < L$ och $f(v) < M$ f.n. $v \in (a,b) \Rightarrow f$ har minsta värde på (a,b)

(Notera: $a = -\infty$, $b = +\infty$, $L, M = \pm\infty$ möjligt.)

Bevis: Bevisar (i).
Antar finns $u \in (a,b)$ s.a. $f(u) > L$ och $f(u) > M$.
$\lim_{x \to a_+} f(x) = L \Rightarrow$ Finns $x_1 \in (a,u)$ s.a.

$f(x) < f(u) \quad \forall x \in (a, x_1)$
(p.g.a. kontinuitet)

$\lim_{x \to b-} f(x) = M \Rightarrow$ Finns $x_2 \in (u, b)$ s.a.

$f(x) < f(u) \quad \forall x \in (x_2, b)$
(p.g.a. kontinuitet)

$\Longrightarrow f(x) < f(u) \quad \forall x \in (a, x_1) \cup (x_2, b)$

d.v.s. —— " —— $\forall x \notin [x_1, x_2]$

Vi vet att f har största värde $f(c)$, för något $c \in [x_1, x_2]$, på $[x_1, x_2]$.

$u \in [x_1, x_2] \Rightarrow f(c) \geq f(u)$

Men dessutom gäller ju utanför $[x_1, x_2]$ att $f(u) > f(x) \quad \forall x$

$\Longrightarrow f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in (a, b)$

d.v.s. f har största värde. $\square$

(Motsvarande för (ii).)

Vi har nu alla verktyg vi behöver för att lösa extremvärdesproblem!

Konvexitet och inflexionspunkter

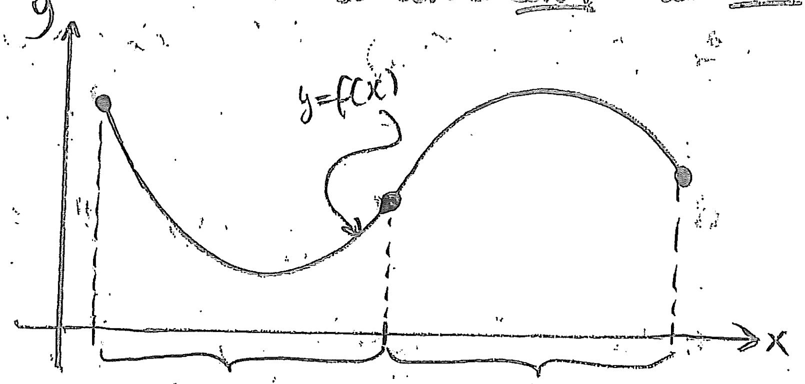
Vi vet nu vilken information förstaderivatan kan ge. Vad för information ger andraderivatan?

(12)

Definition: • f är konvex på öppet intervall I om deriverbar och f' är växande.

• f är konkav på öppet intervall I om deriverbar och f' är avtagande.

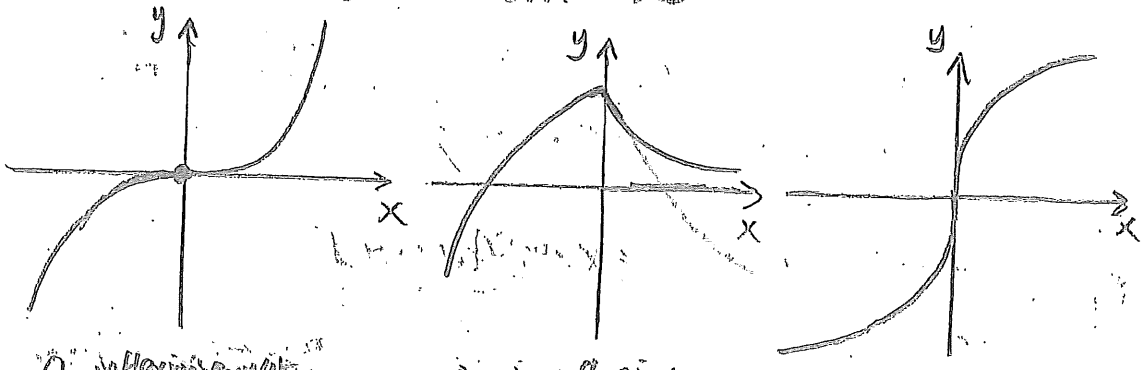
Notera: På engelska • concave up = konvex
• concave down = konkav



Definition: $(x_0, f(x_0))$ inflexionspunkt till $y=f(x)$ om följande uppfylls:

(a) $y=f(x)$ har tangentlinje i x_0

(b) konvexiteten är motsatt på motsatta sider om x_0



"0" inflexionspunkt

0 ej inflexionspunkt ((a) ej uppfylld)

0 inflexionspunkt

(13)

Sats: (a) $f''(x) \geq 0$ på $I \Rightarrow f$ konvex på I

(b) $f''(x) < 0$ på $I \Rightarrow f$ konkav på I

(c) f har inflexionspunkt i x_0 och $f''(x_0)$ finns $\Rightarrow f''(x_0) = 0$

Sats: (a) $f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) < 0$
(f''-test) $\Rightarrow f$ lokalt maximum i x_0

(b) $f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) > 0$
$\Rightarrow f$ lokalt minimum i x_0

(c) $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$:
kan inte dra någon slutsats alls
(lok max, lok min eller inflexion)

MVS och olikheter

Medelvärdessatsen (MVS) i Föreläsning 5 kan användas för att visa vissa olikheter.

Exempel: Visa m.h.a. MVS olikheten

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$$

för $x > 0$.

Lösning: Börja med att välja lämpligt f att använda i MVS, vanligen något som innehåller den mest "komplicerade" delen:

$$f(x) = \sqrt{1+x} \qquad (f \text{ kontinuerlig})$$

Fixera $x>0$ och tillämpa MVS på f på intervallet $[0, x]$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$$

för något $c \in (0, x)$.

Detta betyder

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+0}}{x-0} = \frac{1}{2\sqrt{1+c}}$$

eller $\quad \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{1+c}}$

15

Men $c \in (0,x) \Rightarrow c > 0 \Rightarrow 1+c > 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{1+c} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+c}} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+c}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} < \frac{1}{2}$$

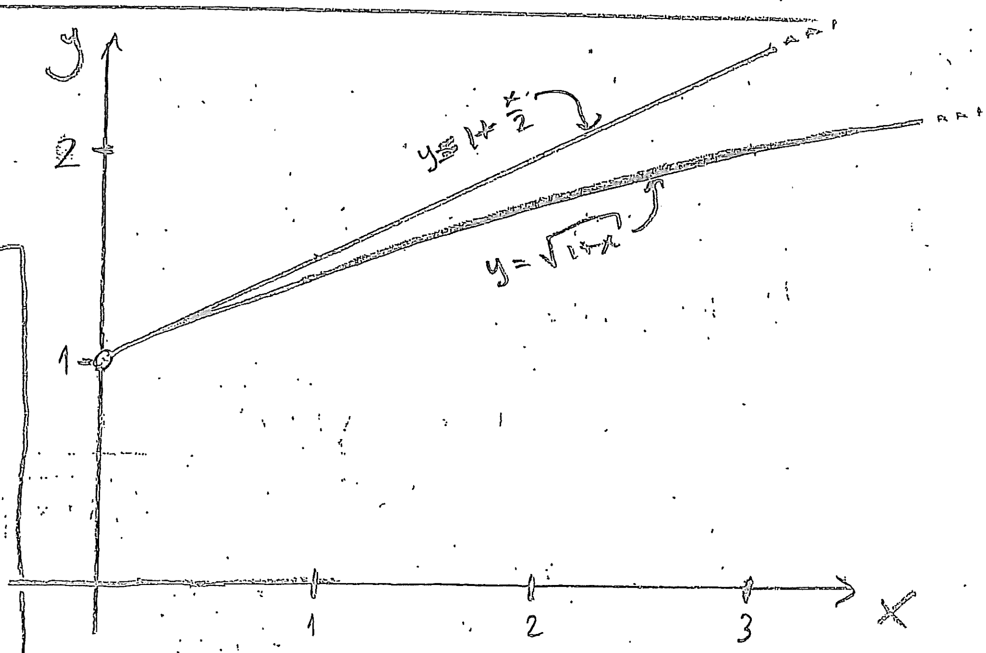
$$\underset{(x>0)}{\Longrightarrow} \sqrt{1+x}-1 < \frac{1}{2}x$$

d.v.s. $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$

vilket gäller $\forall x > 0$. $\square$

Notera: Som sagt, det svåra ligger i att definiera rätt funktion f att använda i MVS.

Grafiskt:



Notera att
$1 + \frac{x}{2} = P_1(x)$
för $f(x) = \sqrt{1+x}$
d.v.s.
$f(x) \approx P_1(x)$
Taylorapproximation

Några jämna uppgifter

2.8.6 $r>1$, $x \in [-1,0) \cup (0,\infty)$

$\Rightarrow (1+x)^r > 1+rx$

Bevis: Låt $f(x) = (1+x)^r - (1+rx) =$

$= (1+x)^r - 1 - rx \quad , \; r>1$

$\Rightarrow f'(x) = r(1+x)^{r-1} - r$

$= r((1+x)^{r-1} - 1) \qquad (r-1>0)$

- $x \in [-1,0) \Rightarrow 1+x < 1 \Rightarrow (1+x)^{r-1} < 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow (1+x)^{r-1} - 1 < 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow f'(x) = r((1+x)^{r-1} - 1) < 0$

  $\Rightarrow f$ avtagande på $[-1,0)$

  $\Rightarrow f(0) < f(x) \quad \forall x \in [-1,0)$

  $\Rightarrow \underbrace{(1+0)^r - 1 - r\cdot 0}_{=0} < (1+x)^r - 1 - rx$

  för alla $x \in [-1,0)$

  $\Rightarrow (1+x)^r > 1 + rx \quad \forall x \in [-1,0)$

- $x \in (0,\infty) \Rightarrow 1+x > 1 \Rightarrow$ [se ovan] $f'(x) > 0$

  $\Rightarrow f$ växande på $(0,\infty)$

  $\Rightarrow f(0) < f(x) \quad \forall x \in (0,\infty)$

  $\Rightarrow$ Samma slutsats som ovan! $\square$

⑰ **2.8:12** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{(x^2+1)^2}}_{\text{"yttre" derivatan}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{"inre" derivatan}} \qquad \Big(\underset{\text{yttre}}{\frac{dy}{du}} \; \underset{\text{inre}}{\frac{du}{dx}} \Big)$$

$$= -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \text{ omm } x < 0 \\ \text{"} \quad < \text{ — " — } > \text{"} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ växer på } (-\infty, 0) \text{ och avtar på } (0, \infty).}$

4.4:14 $f(x) = |x^2 - x - 2|, \; x \in [-3, 3]$

Hitta (lokala) extremvärden.

Faktorisera $x^2 - x - 2$:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - (-2)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

$$\Rightarrow f(x) = |x-2|\,|x+1|$$

$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

• Kritiska punkter: $f'(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - x - 2)(2x - 1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$$

- Singulära punkter: $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x=2$ och $x=-1$
- Ändpunkter: $x=-3$ och $x=3$

Vi har: $f(\frac{1}{2}) = \left|\frac{1}{2}-2\right|\left|\frac{1}{2}+1\right| = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$

$f(2) = |2-2||2+1| = 0$

$f(-1) = |-1-2||-1+1| = 0$

$f(-3) = |-3-2||-3+1| = 5\cdot 2 = 10$

$f(3) = |3-2||3+1| = 1\cdot 4 = 4$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Största värde är } 10 \text{ (i } x=-3\text{), minsta värde är } 0 \text{ (i } x=2 \text{ och } x=-1\text{).}}$

Lokala extremvärden? ± 3 lok max-punkter.

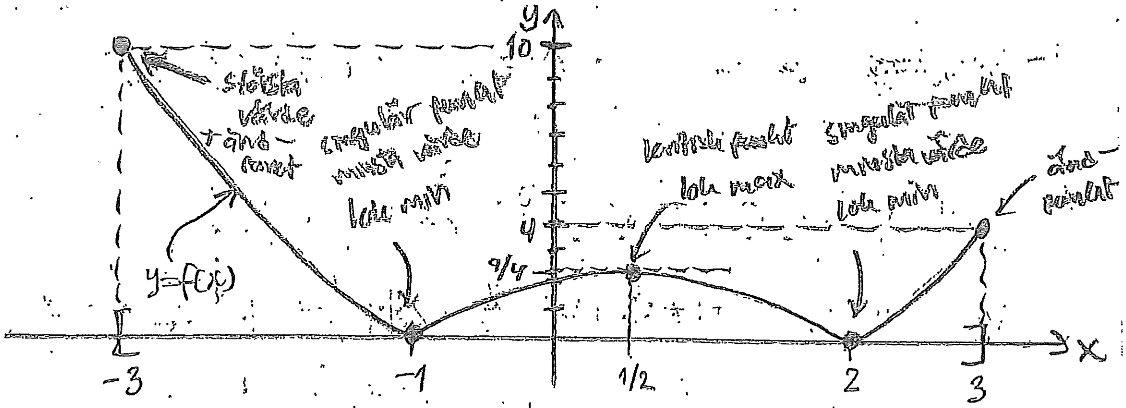
$f'(x) = \operatorname{sgn}(x^2-x-2)(2x-1) =$
$= \operatorname{sgn}((x-2)(x-1))(2x-1)$

		-1		$1/2$		2		x
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$\operatorname{sgn}((x-2)(x-1))$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	$\searrow$	lok min	$\nearrow$	lok max	$\searrow$	lok min	$\nearrow$	

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Lokala minima i } x=-1 \text{ och } x=2, \text{ lokalt maximum i } x=1/2, -3, 3}$

Låt oss skissera grafen (ingår ej i uppgiften, dock):

(19)



4.4:34

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2(-2x)e^{-x^2} =$$

$$= 2x(1-x^2)e^{-x^2} =$$

$$= 2x(1-x)(1+x)e^{-x^2}$$

• Kritiska punkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x(1-x)(1+x)e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ och $x = \pm 1$, $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(\pm 1) = e^{-1} \end{cases}$

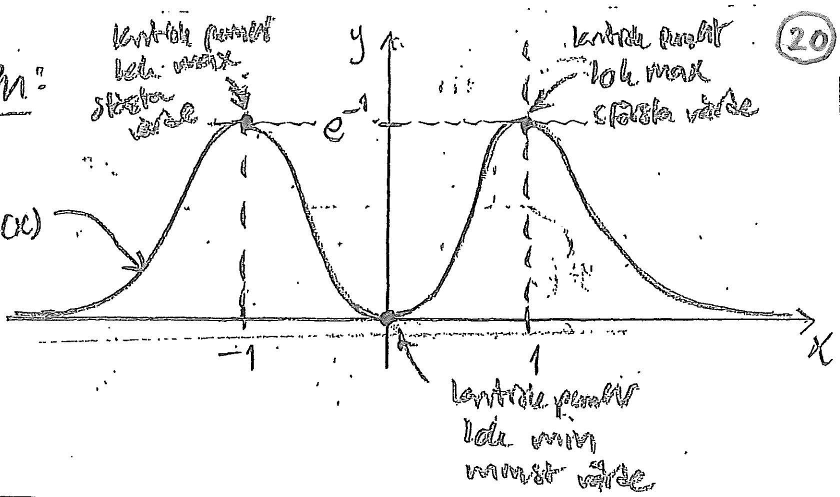
Lokala extrempunkter bland dessa.

	−1		0		1		x
x	− − −	−	− 0 +	+	+ +	+	+ +
$1-x$	+ + +	+	+ + +	+	+ 0	−	− −
$1+x$	− − −	0	+ + +	+	+ +	+	+ +
$f'(x)$	+ + +	0	− − −	0	+ +	0	− − −
$f(x)$	↗	lok max	↘	lok min	↗	lok max	↘

$\boxed{\text{Lokala maxima i } x = \pm 1, \text{ lokalt minimum i } x = 0}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Största värde } e^{-1} \text{ antas i } x = \pm 1, \text{ minsta värde } 0 \text{ antas i } x = 0}$

• Skissera grafen:



4.5:18 $\quad f(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{x}$

Intervall med konstant konvexitet samt inflexionspunkter.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(x^2)}{x}\right) = [\text{ kvotregeln }] =$$

$$= \frac{x\frac{d}{dx}(\ln(x^2)) - \ln(x^2)\frac{d}{dx}(x)}{x^2} =$$

$$= \frac{x\,\frac{1}{x^2}\cdot 2x - \ln(x^2)\cdot 1}{x^2} = \frac{2-\ln(x^2)}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2-\ln(x^2)}{x^2}\right) = [\text{kvotregeln}] =$$

$$= \frac{x^2\frac{d}{dx}(2-\ln(x^2)) - (2-\ln(x^2))\frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2\left(-\frac{1}{x^2}\cdot 2x\right) - (2-\ln(x^2))\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-2x - (2-\ln(x^2))\cdot 2x}{x^4} = \frac{2(\ln(x^2)-3)}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(\ln(x^2)-3)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2)-3=0 \Leftrightarrow$$

21

$\Leftrightarrow \ln(x^2) = 3 \Leftrightarrow x^2 = e^3 \Leftrightarrow x = \pm e^{3/2}$

		$-e^{3/2}$		0		$e^{3/2}$		x
$\ln(x^2)-3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
x^3	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
f''	$-$	0	$+$	$\wr$	$-$	0	$+$	
f	$\frown$	infl.	$\smile$	$\wr$	$\frown$	infl.	$\smile$	

- Konvex: $\boxed{\text{På } (-e^{3/2}, 0) \text{ och } (e^{3/2}, \infty)}$
- Konkav: $\boxed{\text{På } (-\infty, -e^{3/2}) \text{ och } (0, e^{3/2})}$
- Inflexionspunkter: I $x = \pm e^{3/2}$

4.5:34 $f(x) = (x^2-3)e^x$

Klassificera kritiska punkter (m.h.a. f''-testet).

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2-3)e^x = (x^2+2x-3)e^x$$

$$f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x-3)e^x = (x^2+4x-1)e^x$$

Kritiska punkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x-3)e^x = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{1^2+3} = -1 \pm 2 = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f''(1) = (1^2+4\cdot 1-1)e^1 = 4e > 0$$

$\Rightarrow \boxed{x=1 \text{ är lokalt minimum.}}$

$$f''(-3) = \left((-3)^2 + 4\cdot(-3) - 1\right)e^{-3} =$$
$$= (9-12-1)e^{-3} = -4e^{-3} < 0$$
$\Rightarrow \boxed{x=-3 \text{ är lokalt maximum.}}$

Se även RÖ 3 HT09 där jag löst bl.a.
2.8:4, 2.8:14 och 2.8:20

Lösningar till dessa återfinns nedan.

2.8:4 Visa $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, $x > 0$. (Och $x<0$?)

Inför $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$, $x > 0$.

$\Rightarrow f'(x) = x - \sin x$

Exempel 2 i boken: $\sin x < x$, $x>0$

$\Rightarrow f'(x) > 0$, $x > 0$ $(*)$

Medelvärdessatsen ger att $\exists c \in (0,x)$ s.a.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c) \overset{(*)}{>} 0$$

d.v.s. $\dfrac{(\cos x + \frac{x^2}{2}) - 1}{x} > 0$, mult.

med $x>0$: $\cos x + \frac{x^2}{2} - 1 > 0$

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x>0)$$

(23) Både $\cos x$ och $1-\frac{x^2}{2}$ jämna funktioner innebär att olikheten är samma även då $x<0$.

2.8:14 Var är $f(x) = x - 2\sin x$ växande/avtagande?

$f'(x) = 1 - 2\cos x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

Alternerande intervall $\left(-\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi, \frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi\right) = I_n$

och $\left(\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi, \frac{5\pi}{3}+n\cdot 2\pi\right) = J_n$

d.v.s. $f'(x)$ har olika tecken på I_n och J_n.

$0 \in I_0$: $f'(0) = 1 - 2\cos 0 = -1 < 0$

$\Rightarrow f'(x) < 0$ på I_n, $f'(x) > 0$ på J_n

$$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ avtagande på } \left[-\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi, \frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi\right] \\ f \text{ växande på } \left[\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi, \frac{5\pi}{3}+n\cdot 2\pi\right] \end{cases}$$

2.8:20

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2\sin\frac{1}{x} &, x \neq 0 \\ 0 &, x = 0 \end{cases}$$

a) Visa $f'(0) = 1$.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h + 2h^2\sin\frac{1}{h} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(1 + 2h\sin\frac{1}{h}\right) = 1 + 0 = 1$$

Ty $\lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$ genom instängningssatsen:

$$\underbrace{-|h|}_{\to 0} \le h \sin \frac{1}{h} \le \underbrace{|h|}_{\to 0}$$

b) Visa att om 0 ligger i intervall I så finns $x \in I$ s.a. $f'(x) < 0$ ($\Rightarrow f$ är ej växande på I).

$x \neq 0$: $f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} + 2x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

$$= 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}$$

Om $\cos \frac{1}{x} = 1$ så är $\sin \frac{1}{x} = 0$ och

$$f'(x) = 1 + 4x \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -1 < 0$$

$\cos \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{n \cdot 2\pi}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Om $|n_0|$ är tillräckligt stort så ligger $\frac{1}{n_0 \cdot 2\pi}$ i I.

Eftersom f är kontinuerlig så är $f'(x) < 0$ på ett intervall $I_0 \subset I$ kring $\frac{1}{n_0 \cdot 2\pi}$.

Alltså kan inte f vara växande på I oavsett val av I.