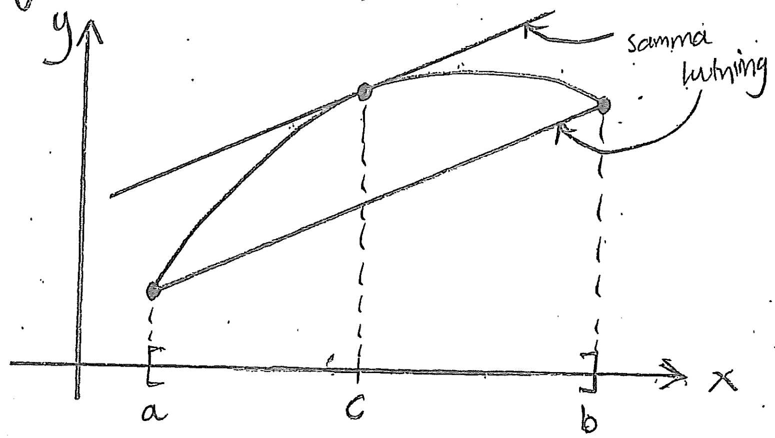
1

Föreläsning 5

Medelvärdessatsen

Kan medelvärdet på derivatan uppnås i någon enskild punkt?



Denna fråga ska vi försöka besvara.
Behöver först formulera och bevisa några satser.

Sats: Om f definierad på (a,b) och har ett största eller minsta värde i $c \in (a,b)$ och om $f'(c)$ finns så gäller $f'(c)=0$.

Bevis: Antar f har största värde i $c \in (a,b)$.

$$\Longrightarrow f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in (a,b)$$

$$f(x) - f(c) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

- Låt $c < x < b$. $(x-c>0)$

$$\Longrightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

$$\Longrightarrow f'(c) = \lim_{x \to c_+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

- Låt $a < x < c$ $(x-c<0)$

②

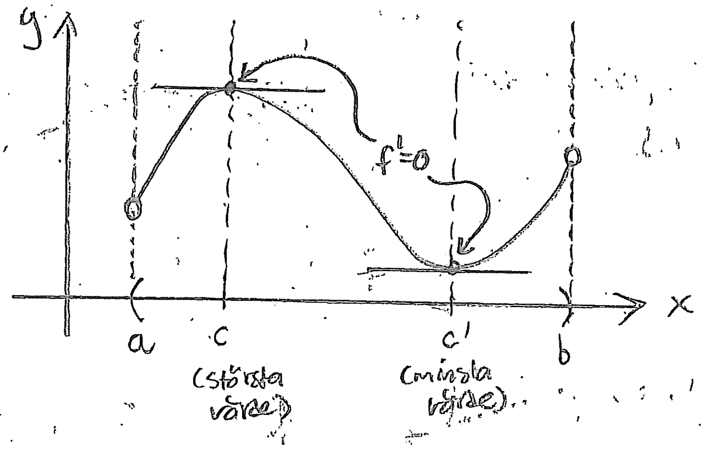
$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(c) = \lim_{x\to c_-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

Totalt får vi alltså $f'(c) = 0$. $\square$

(Motsvarande om f antar minsta värde i c.)

Betydelse av satsen:



Rolles sats: Antag g kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b). Om $g(a) = g(b)$ så finns $c \in (a,b)$ sådant att $g'(c) = 0$.

Bevis:

- $\underset{(=g(b))}{g(x) = g(a)}$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow g'(c) = 0$ för alla $c \in (a,b)$
- $g(x) \neq \underset{(=g(b))}{g(a)}$ för något $x \in (a,b)$.

  Antag $g(x) > g(a)$.

  Satsen om största och minsta värde (ty g kont.)

  $\Rightarrow$ Finns $c \in [a,b]$ s.a. $g(c)$ är största värdet

  $g(c) \geq g(x) > g(a) = g(b) \Rightarrow c$ kan ej

③ vara a eller b.

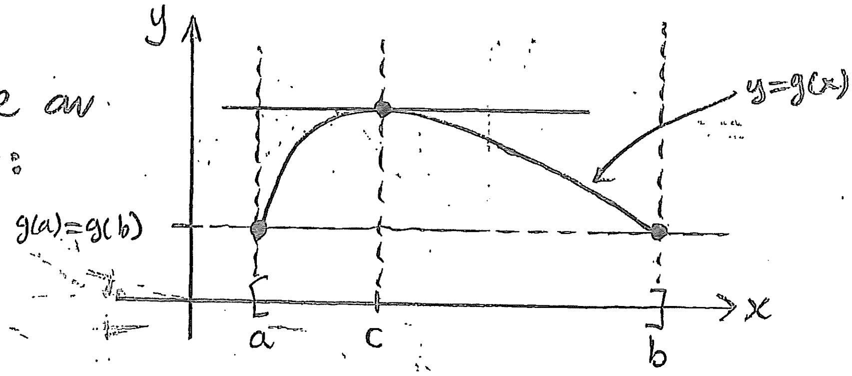
$\Rightarrow$ $c \in (a,b)$

$\Rightarrow$ g är deriverbar i c ($g'(c)$ finns)

$\Rightarrow$ $g'(c) = 0$ enligt förra satsen $\square$

(Motsvarande om $g(x) < g(a)$.)

Betydelse av Rolles sats:

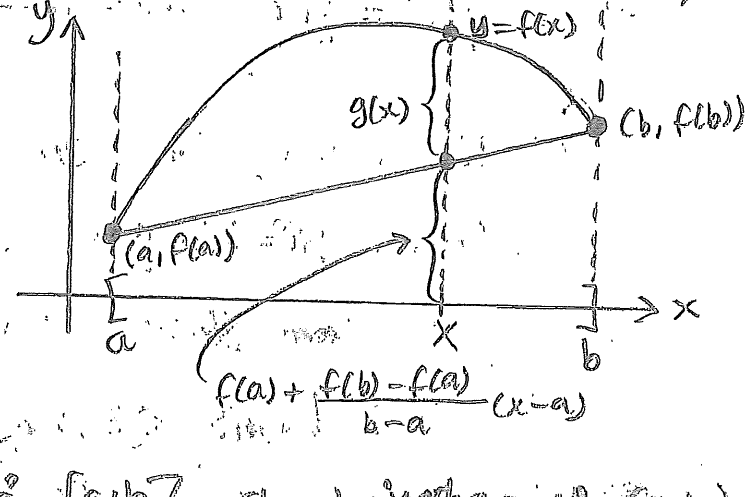


Medelvärdessatsen: Antag f kontinuerlig på $[a,b]$ och att den är deriverbar på (a,b). Då finns $c \in (a,b)$ sådant att

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Bevis: Låt $g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)$,

se figur:



g kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b) eftersom f är det. Dessutom $g(a) = g(b) = 0$.

Vi kan tillämpa Rolles sats på g

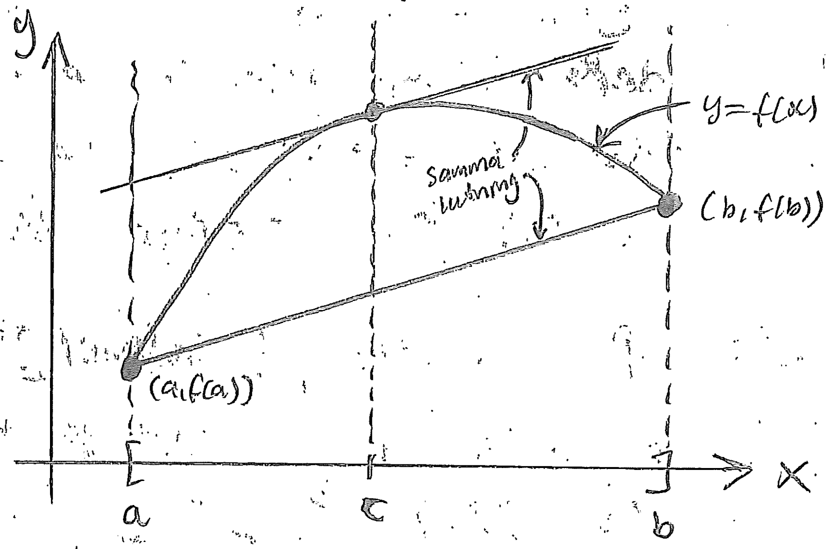
$\Longrightarrow$ Finns $c \in (a,b)$ sådant att $g'(c)=0$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \qquad \square$$

Betydelse av Medelvärdessatsen:



Generaliserade Medelvärdessatsen:

Om f,g kontinuerliga på $[a,b]$ och deriverbara på (a,b) samt om $g'(x) \neq 0$ för alla $x \in (a,b)$ så finns $c \in (a,b)$ s.a.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Bevis: Låt $h(x) = \big(f(b)-f(a)\big)\big(g(x)-g(a)\big) - \big(g(b)-g(a)\big)\big(f(x)-f(a)\big)$

⑤ $h(a) = h(b) = 0$

Enligt Rolles sats finns $c \in (a,b)$
sådant att $h'(c)$

$$\Rightarrow 0 = h'(c) = (f(b)-f(a))g'(x) - (g(b)-g(a))f'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \square$$

<u>Notera:</u> $g(b) \neq g(a)$ krävs i sista steget, men detta ges av $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$.
(Om $g(a) = g(b)$ så skulle Rolle ge $g'(c)$ f.n. $c \in (a,b)$. Motsägelse!)

<u>Sats:</u> f kontinuerlig på intervall I och
$f'(x) = 0$ för alla inre punkter i I
så $f(x) = C$ på I, C = konstant.

<u>Bevis:</u> Låt $x_0 \in I$ och $C = f(x_0)$.
För varje $x \in I$ s.a. $x \neq x_0$ så
ger Medelvärdessatsen att det finns
$c \in (x, x_0)$ eller (x_0, x) ($x < x_0$ resp. $x > x_0$)
sådant att

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

c är en inre punkt till $I \Rightarrow f'(c) = 0$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) = C \qquad \square$$

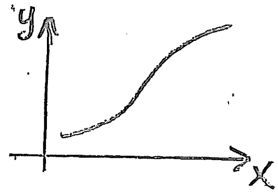
Detta gäller <u>alla</u> $x \in I$.

Avtagande och växande funktioner:

Antag att f definierad på intervall I som innehåller godtyckliga punkter x_1 och x_2.

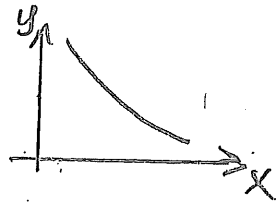
(a) $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$:

f <u>växande</u> på I



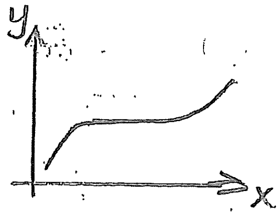
(b) $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$:

f <u>avtagande</u> på I



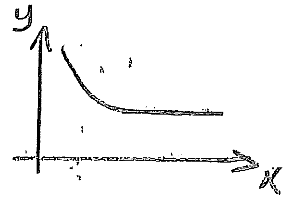
(c) $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$:

f <u>icke-avtagande</u> på I



(d) $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$:

f <u>icke-växande</u> på I



<u>Sats:</u> Låt J öppet intervall och I intervall som innehåller J samt minst en ändpunkt.
Antag f kontinuerlig på I och deriverbar på J.

(a) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow f$ växande på I

(b) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow f$ avtagande på I

(c) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow f$ icke-avtagande på I

(d) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow f$ icke-växande på I

<u>Bevis:</u> Låt $x_1, x_2 \in I$ med $x_2 > x_1$.
Enligt Medelvärdessatsen gäller:

⑦

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$$

för något $c \in (x_1, x_2) \subset J$.

$$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1) = \underbrace{(x_2-x_1)}_{>0} f'(c)$$

d.v.s. $f(x_2)-f(x_1)$ har samma tecken som $f'(c)$. Man inser nu att (a)—(d) gäller.

(T.ex. $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in J \Rightarrow f'(c) \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1) \leq 0 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$,

d.v.s. icke-avtagande.) $\square$

Extremvärdesproblem

Extremvärde: f har ett största värde $f(x_0)$ i x_0 om $f(x) \leq f(x_0)$ för alla x i definitionsmängden.

(Motsvarande för minsta värde.)

Största och minsta värde kallas extremvärden.

Sats: Om f:s definitionsmängd är (en ändlig union av) slutna ändliga intervall och f är kontinuerlig överallt så har f ett största och ett minsta värde.

(Detta är satsen om största och minsta värde fast något generaliserad.)

(8)

Definition: f har <u>lokalt maximum</u> $f(x_0)$ i x_0 om det finns $h>0$ s.a. $f(x) \leq f(x_0)$ för alla x som uppfyller $|x-x_0| < h$

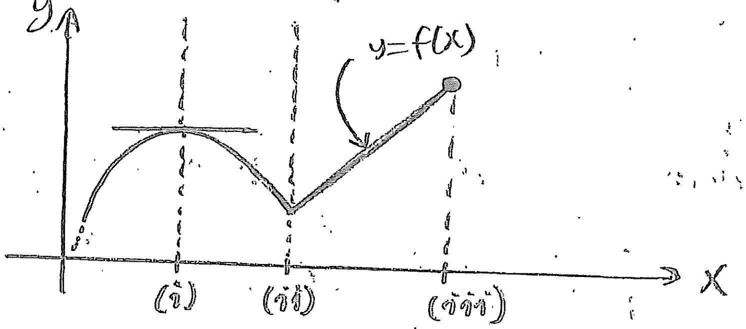
(Motsvarande för <u>lokalt minimum</u>.)

Lokalt maximum och lokalt minimum kallas <u>lokala extremvärden</u>.

Definition: (i) <u>Kritisk punkt</u>: Punkt i definitionsmängden till f där $f'(x)=0$

(ii) <u>Singulär punkt</u>: Punkt i definitionsmängden till f där $f'(x)$ ej def.

(iii) <u>Ändpunkt</u>: Punkt i definitionsmängden till f som inte kan ligga i ett öppet intervall innesluten i definitionsmängden.



Figuren antyder att största och minsta värde finns bland sådana punkter.

<u>Sats:</u> Om f definierad på intervall I har lokalt extremvärde i $x_0 \in I$ så måste x_0 antingen vara kritisk punkt, singulär punkt eller ändpunkt.

⑨ <u>Bevis:</u> Antag f har lokalt maximum i x_0 och x_0 är varken ändpunkt eller singulär punkt. Då finns $h>0$ s.a. f har ett största värde på (x_0-h, x_0+h), och dessutom finns $f'(x_0)$. Då vet vi enligt satsen på sid. 1 att $f'(x_0)=0$. $\square$

(Motsvarande för lokalt minimum.)

När får man lokala extremvärden? Svar:

<u>Sats:</u> (f'-test)

- Antag f kontinuerlig i x_0 som inte är en ändpunkt till definitionsmängden.

  (a) Om (a,b) finns med $x_0 \in (a,b)$ s.a. $f'(x)>0$ på (a,x_0) och $f'(x)<0$ på (x_0,b) så f lok max i x_0

  (b) Som ovan men $f'(x)<0$ på (a,x_0) och $f'(x)>0$ på (x_0,b) så f lok min i x_0.

- Antag a vänstra ändpunkten till definitionsmängden och f högerkontinuerlig i a.

  (c) $f'(x)>0$ på något (a,b) $\Longrightarrow f$ lok min i a

  (d) $f'(x)<0$ på något (a,b) $\Longrightarrow f$ lok max i a

- Antag b någon ändpunkten till definitionsmängden och f vänsterkontinuerlig i b.

  (e) $f'(x) > 0$ på något (a,b)
  $\Rightarrow f$ lok max i b

  (f) $f'(x) < 0$ på något (a,b)
  $\Rightarrow f$ lok min i b

Vad gör man om definitionsmängden inte är (en union av) slutna ändliga intervall?

<u>Sats:</u> f kontinuerlig på (a,b) och
$$\lim_{x\to a+} f(x) = L \text{ och } \lim_{x\to b-} f(x) = M$$

$\Rightarrow$
(i) $f(u) > L$ och $f(u) > M$ f.n. $u \in (a,b) \Rightarrow f$ har största värde på (a,b)

(ii) $f(v) < L$ och $f(v) < M$ f.n. $v \in (a,b) \Rightarrow f$ har minsta värde på (a,b)

(<u>Notera:</u> $a = -\infty$, $b = +\infty$, $L, M = \pm\infty$ möjligt.)

<u>Bevis:</u> Bevisar (i).
Antar finns $u \in (a,b)$ s.a. $f(u) > L$ och $f(u) > M$
$\lim_{x\to a+} f(x) = L \Rightarrow$ Finns $x_1 \in (a,u)$ s.a.

(11)

$f(x) < f(u)$ $\forall x \in (a, x_1)$
(p.g.a. kontinuitet)

$\lim_{x \to b-} f(x) = M \Rightarrow$ Finns $x_2 \in (u, b)$ s.a.

$f(x) < f(u)$ $\forall x \in (x_2, b)$
(p.g.a. kontinuitet)

$\Longrightarrow f(x) < f(u)$ $\forall x \in (a, x_1) \cup (x_2, b)$

d.v.s. — " — $\forall x \notin [x_1, x_2]$

Vi vet att f har största värde $f(c)$, för något $c \in [x_1, x_2]$, på $[x_1, x_2]$.

$u \in [x_1, x_2] \Rightarrow f(c) \geq f(u)$

Men dessutom gäller ju utanför $[x_1, x_2]$ att $f(u) > f(x)$ $\forall x$

$\Longrightarrow f(c) \geq f(x)$ $\forall x \in (a, b)$

d.v.s. f har största värde. $\square$

(Motsvarande för (ii).)

Vi har nu alla verktyg vi behöver för att lösa extremvärdesproblem! Titta själva på avsn. 4.8.

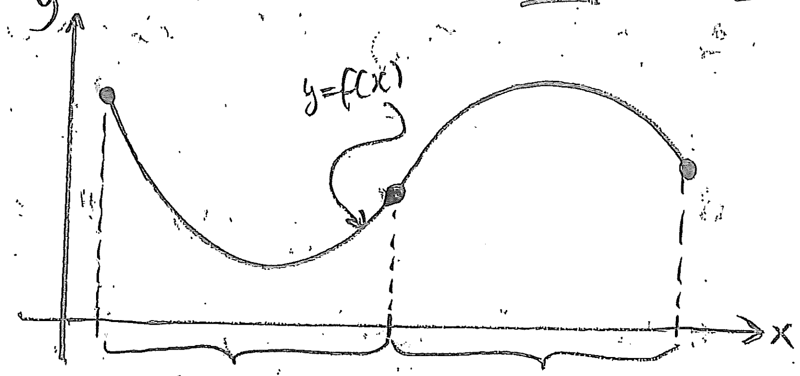
Konvexitet och inflexionspunkter

Vi vet nu vilken information förstaderivatan kan ge. Vad för information ger andraderivatan?

Definition: • f är konvex på öppet intervall I om deriverbar och f' är växande.

• f är konkav på öppet intervall I om deriverbar och f' är avtagande.

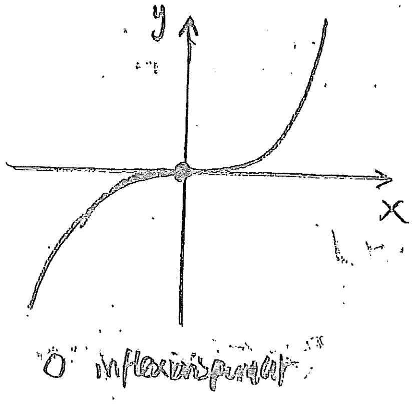
Notera: På engelska • concave up = konvex
• concave down = konkav



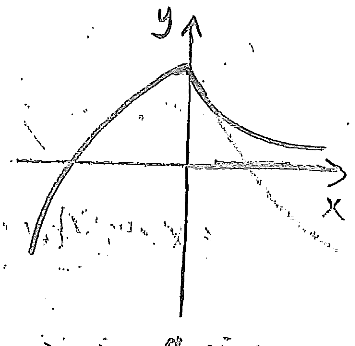
Definition: $(x_0, f(x_0))$ inflexionspunkt till $y=f(x)$ om följande uppfylls:

(a) $y=f(x)$ har tangentlinje i x_0

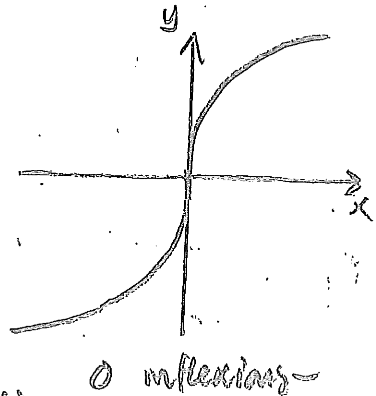
(b) konvexiteten är motsatt på motsatta sider om x_0



0 inflexionspunkt



0 ej inflexionspunkt ((a) ej uppfylld)



0 inflexionspunkt

13

<u>Sats:</u> (a) $f''(x) \geq 0$ på $I \Rightarrow f$ konvex på I

(b) $f''(x) < 0$ på $I \Rightarrow f$ konkav på I

(c) f har inflexionspunkt i x_0 och $f''(x_0)$ finns $\Rightarrow f''(x_0) = 0$

<u>Sats:</u> (f''-test)

(a) $f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) < 0$
$\Rightarrow f$ lokalt maximum i x_0

(b) $f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) > 0$
$\Rightarrow f$ lokalt minimum i x_0

(c) $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$:
Kan inte dra någon slutsats alls
(lok max, lok min eller inflexion)

MVS och olikheter

Medelvärdessatsen (MVS) i Föreläsning 5 kan användas för att visa vissa olikheter.

Exempel: Visa m.h.a. MVS olikheten

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$$

för $x > 0$.

Lösning: Börja med att välja lämpligt f att använda i MVS, vanligen något som innehåller den mest "komplicerade" delen:

$$f(x) = \sqrt{1+x} \qquad (f \text{ kontinuerlig})$$

Fixera $x>0$ och tillämpa MVS på f på intervallet $[0, x]$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$$

för något $c \in (0,x)$.

Detta betyder

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+0}}{x-0} = \frac{1}{2\sqrt{1+c}}$$

eller $$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{1+c}}$$

Men $c \in (0,x) \Rightarrow c > 0 \Rightarrow 1+c > 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{1+c} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+c}} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+c}} < \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} < \frac{1}{2}$$

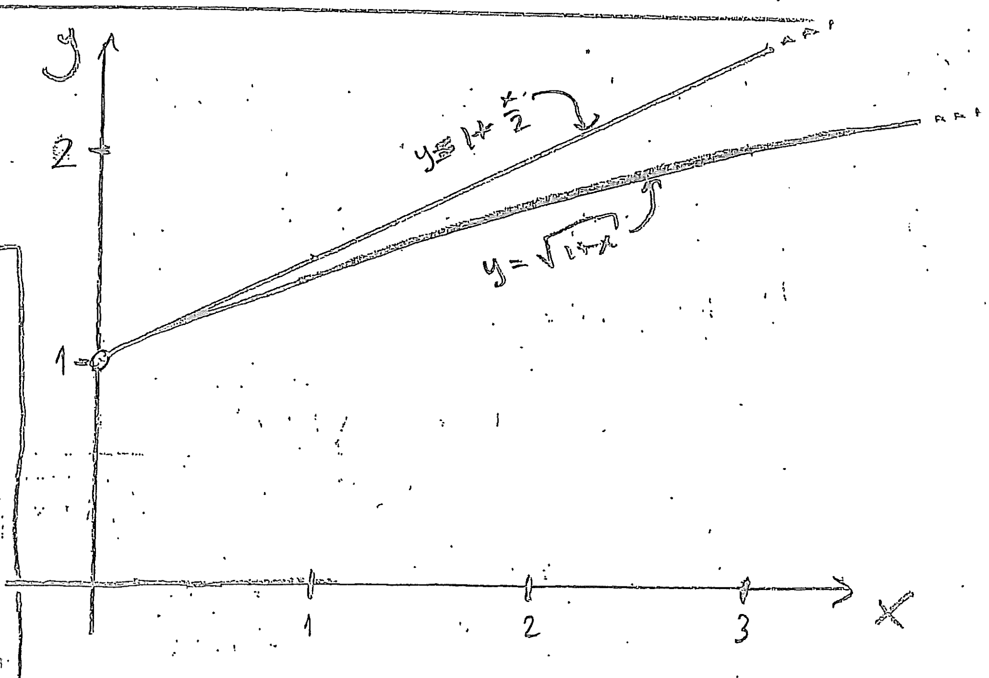
$$\underset{(x>0)}{\Longrightarrow} \sqrt{1+x}-1 < \frac{1}{2}x$$

d.v.s. $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$

vilket gäller $\forall x > 0$. $\square$

Notera: Som sagt, det svåra ligger i att definiera rätt funktion f att använda i MVS.

Grafiskt:



Notera att

$1 + \frac{x}{2} = P_1(x)$

för $f(x) = \sqrt{1+x}$

d.v.s.

$f(x) \approx P_1(x)$

Taylorapproximation

Några jämna uppgifter

2.8:6 $r>1$, $x\in[-1,0)\cup(0,\infty)$
$\Rightarrow (1+x)^r > 1+rx$

Bevis: Låt $f(x)=(1+x)^r-(1+rx)=$
$=(1+x)^r-1-rx$, $r>1$

$\Rightarrow f'(x)=r(1+x)^{r-1}-r$
$=r\left((1+x)^{r-1}-1\right)$ $(r-1>0)$

- $x\in[-1,0) \Rightarrow 1+x<1 \Rightarrow (1+x)^{r-1}<1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (1+x)^{r-1}-1<0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow f'(x)=r\left((1+x)^{r-1}-1\right)<0$
  $\Rightarrow f$ avtagande på $[-1,0)$
  $\Rightarrow f(0)<f(x)\ \forall x\in[-1,0)$
  $\Rightarrow \underbrace{(1+0)^r-1-r\cdot 0}_{=0} < (1+x)^r-1-rx$ för alla $x\in[-1,0)$
  $\Rightarrow (1+x)^r > 1+rx\ \forall x\in[-1,0)$
- $x\in(0,\infty) \Rightarrow 1+x>1 \Rightarrow$ [se ovan] $f'(x)>0$
  $\Rightarrow f$ växande på $(0,\infty)$
  $\Rightarrow f(0)<f(x)\ \forall x\in(0,\infty)$
  $\Rightarrow$ Samma slutsats som ovan! $\square$

⑰

2.8:12

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{(x^2+1)^2}}_{\text{"yttre" derivatan}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{"inre" derivatan}} \quad \Big|\; \left(\underset{\text{yttre}}{\frac{dy}{du}} \underset{\text{inre}}{\frac{du}{dx}}\right)$$

$$= -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \text{ omm } x < 0 \\ \;\;'' \;\; < \text{ — '' — } > '' \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{f \text{ växer på } (-\infty, 0) \text{ och avtar på } (0, \infty).}$$

4.4:14

$$f(x) = |x^2 - x - 2|, \quad x \in [-3, 3]$$

Hitta (lokala) extremvärden.

Faktorisera x^2-x-2:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-2)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

$$\Longrightarrow f(x) = |x-2|\,|x+1|$$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

• Kritiska punkter: $f'(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - x - 2)(2x-1)$

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1/2$$

• Singulära punkter: $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 2$ och $x = -1$

• Ändpunkter: $x = -3$ och $x = 3$

Vi har: $f(\tfrac{1}{2}) = |\tfrac{1}{2} - 2||\tfrac{1}{2} + 1| = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{3}{2} = \tfrac{9}{4}$

$f(2) = |2-2||2+1| = 0$

$f(-1) = |-1-2||-1+1| = 0$

$f(-3) = |-3-2||-3+1| = 5 \cdot 2 = 10$

$f(3) = |3-2||3+1| = 1 \cdot 4 = 4$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Största värde är 10 (i } x=-3\text{), minsta värde är 0 (i } x=2 \text{ och } x=-1\text{).}}$

Lokala extremvärden? ± 3 lok max-punkter.

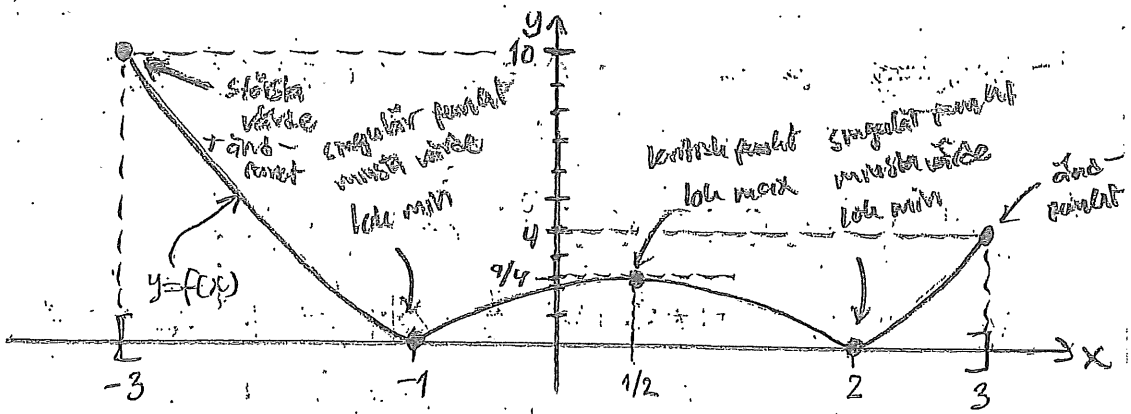
$f'(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - x - 2)(2x-1) =$
$= \operatorname{sgn}((x-2)(x-1))(2x-1)$

		-1		$1/2$		2		x
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$\operatorname{sgn}((x-2)(x-1))$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	$\searrow$	lok min	$\nearrow$	lok max	$\searrow$	lok min	$\nearrow$	

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Lokala minima i } x=-1 \text{ och } x=2\text{, lokalt maximum i } x = 1/2, -3, 3}$

Låt oss skissera grafen (ingår ej i uppgiften, dock):

(19)



4.4:34

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2(-2x)e^{-x^2} = 2x(1-x^2)e^{-x^2} = 2x(1-x)(1+x)e^{-x^2}$$

• Kritiska punkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x(1-x)(1+x)e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ och $x = \pm 1$, $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(\pm 1) = e^{-1} \end{cases}$

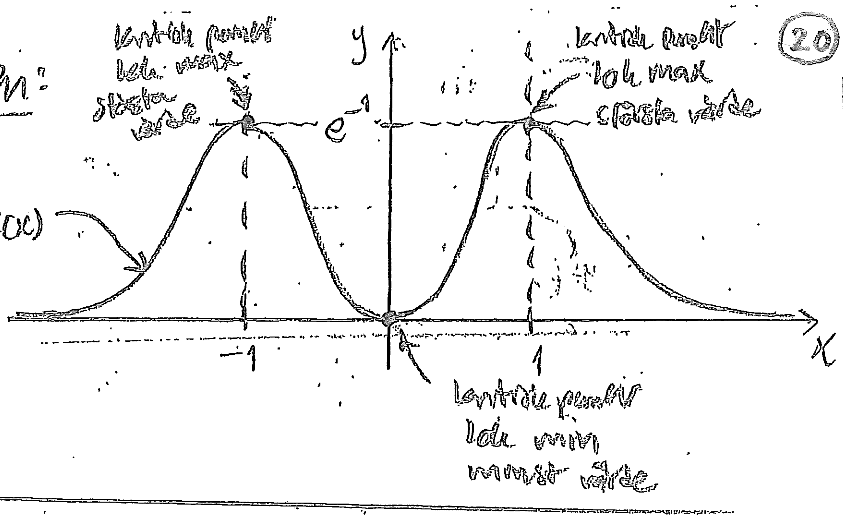
Lokala extrempunkter bland dessa.

		-1		0		1		x
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$1-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	lok max	$\searrow$	lok min	$\nearrow$	lok max	$\searrow$	

$\boxed{\text{Lokala maxima i } x = \pm 1, \text{ lokalt minimum i } x = 0}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Största värde } e^{-1} \text{ antas i } x = \pm 1, \text{ minsta värde } 0 \text{ antas i } x = 0}$

Skissa grafen:



4.5:18 $f(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{x}$

Intervall med konstant konvexitet samt inflexionspunkter.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(x^2)}{x}\right) = [\text{kvotregeln}] =$$

$$= \frac{x\frac{d}{dx}(\ln(x^2)) - \ln(x^2)\frac{d}{dx}(x)}{x^2} =$$

$$= \frac{x\frac{1}{x^2}\cdot 2x - \ln(x^2)\cdot 1}{x^2} = \frac{2-\ln(x^2)}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2-\ln(x^2)}{x^2}\right) = [\text{kvotregeln}] =$$

$$= \frac{x^2\frac{d}{dx}(2-\ln(x^2)) - (2-\ln(x^2))\frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2(-\frac{1}{x^2}\cdot 2x) - (2-\ln(x^2))\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-2x - (2-\ln(x^2))\cdot 2x}{x^4} = \frac{2(\ln(x^2)-3)}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(\ln(x^2)-3)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

(21) $\Leftrightarrow \ln(x^2)=3 \Leftrightarrow x^2=e^3 \Leftrightarrow x=\pm e^{3/2}$

		$-e^{3/2}$		0		$e^{3/2}$	
$\ln(x^2)-3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^3	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	0	$+$	$‡$	$-$	0	$+$
f	$\frown$	infl.	$\smile$	$‡$	$\frown$	infl.	$\smile$

- Konvex: $\boxed{\text{På } (-e^{3/2},0) \text{ och } (e^{3/2},\infty)}$
- Konkav: $\boxed{\text{På } (-\infty,-e^{3/2}) \text{ och } (0,e^{3/2})}$
- Inflexionspunkter: I $x=\pm e^{3/2}$

4.5:34 $\quad f(x)=(x^2-3)e^x$

Klassificera kritiska punkter (m.h.a. f''-testet).

$$f'(x)=2xe^x+(x^2-3)e^x = (x^2+2x-3)e^x$$

$$f''(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x-3)e^x = (x^2+4x-1)e^x$$

Kritiska punkter: $f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x-3)e^x=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{1^2+3}=-1\pm2=\begin{cases}1\\-3\end{cases}$$

$$\Rightarrow f''(1)=(1^2+4\cdot1-1)e^1=4e>0$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{x=1 \text{ är lokalt minimum.}}$

$$f''(-3) = \left((-3)^2 + 4\cdot(-3) - 1\right)e^{-3} =$$
$$= (9-12-1)e^{-3} = -4e^{-3} < 0$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{x=-3 \text{ är lokalt maximum.}}$

Se även RÖ 384 HT09 där jag löst bl.a.

2.8:4, 2.8:14, 2.8:20, 4.8:18,
4.8:28, 4.8:40, 4.8:48

Lösningar till dessa återfinns nedan.

2.8:4 Visa $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, $x > 0$. (Och $x<0$?)

Inför $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$, $x > 0$.

$$\Longrightarrow f'(x) = x - \sin x$$

Exempel 2 i boken: $\sin x < x$, $x>0$

$$\Longrightarrow f'(x) > 0, \quad x > 0 \quad (*)$$

Medelvärdessatsen ger att $\exists c \in (0,x)$ s.a.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c) \overset{(*)}{>} 0$$

d.v.s. $\dfrac{\left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right) - 1}{x} > 0$; mult.

med $x>0$: $\cos x + \frac{x^2}{2} - 1 > 0$ (om $x>0$)

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x>0)$$

(23) Både $\cos x$ och $1-\frac{x^2}{2}$ jämna funktioner innebär att olikheten är sann även då $x<0$.

2.8:14 Var är $f(x) = x - 2\sin x$ växande/avtagande?

$f'(x) = 1 - 2\cos x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

Alternerande intervall $\left(-\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi, \frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi\right) = I_n$

och $\left(\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi, \frac{5\pi}{3} + n\cdot 2\pi\right) = J_n$

d.v.s. $f'(x)$ har olika tecken på I_n och J_n.

$0 \in I_0$: $f'(0) = 1 - 2\cos 0 = -1 < 0$

$\Rightarrow f'(x) < 0$ på I_n, $f'(x) > 0$ på J_n

$$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ avtagande på } \left[-\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi, \frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi\right] \\ f \text{ växande på } \left[\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi, \frac{5\pi}{3} + n\cdot 2\pi\right] \end{cases}$$

2.8:20

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

a) Visa $f'(0) = 1$.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h + 2h^2 \sin\frac{1}{h} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(1 + 2h \sin\frac{1}{h}\right) = 1 + 0 = 1$$

ty $\lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$ genom instängningssatsen:

$$\underbrace{-|h|}_{\to 0} \le h \sin \frac{1}{h} \le \underbrace{|h|}_{\to 0}$$

b) Visa att om 0 ligger i intervall I så finns $x \in I$ s.a. $f'(x) < 0$ ($\Rightarrow f$ är ej växande på I).

$$x \neq 0: \quad f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} + 2x^2 \cos \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}$$

Om $\cos \frac{1}{x} = 1$ så är $\sin \frac{1}{x} = 0$ och

$$f'(x) = 1 + 4x \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -1 < 0$$

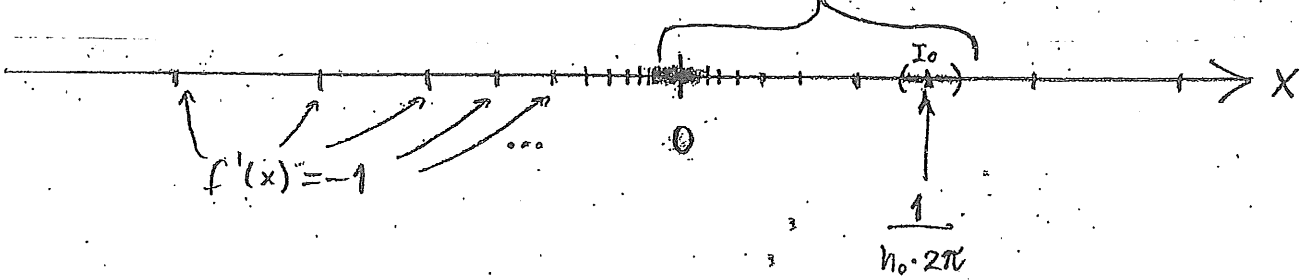
$$\cos \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{n \cdot 2\pi},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Om $|n_0|$ är tillräckligt stort så ligger $\frac{1}{n_0 \cdot 2\pi}$ i I.

Eftersom f är kontinuerlig så är $f'(x) < 0$ på ett intervall $I_0 \subset I$ kring $\frac{1}{n_0 \cdot 2\pi}$.

Alltså kan inte f vara växande på I oavsett val av I.

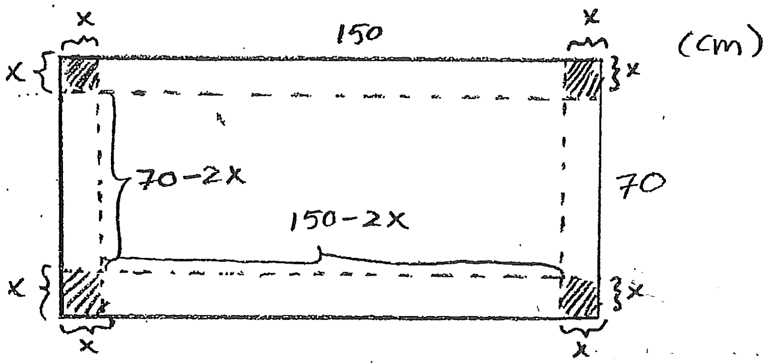


(25)

4.8:18 Bygga låda utan överdel ur ett rektangulärt papperk på 70 cm × 150 cm genom att klippa bort lika stora kvadratiska hörn. Bestäm största möjliga volym.

Lösning:

X är sidlängden hos avklippta hörnen.



Volymen som funktion av x blir då

$V(x) = (150-2x)(70-2x)x \quad cm^3$

Definitionsmängd: $D_V = [0, 35]$ ty ingen sida får ha negativ längd.

V:s maximum finns i ändpunkter eller i stationär punkt eftersom singulär punkter saknas.

$$\begin{cases} V(0) = 150 \cdot 70 \cdot 0 = 0 \\ V(35) = 80 \cdot 0 \cdot 35 = 0 \end{cases} \quad \text{(ändpunkter)}$$

Stationära punkter:

$V'(x) = (-2)(70-2x)x + (150-2x)(-2)x +$

$+ (150-2x)(70-2x) \cdot 1 =$

$$= -2(70x - 2x^2) - 2(150x - 2x^2) +$$
$$+ 10500 - 440x + 4x^2 =$$

$$= -140x + 4x^2 - 300x + 4x^2 +$$
$$+ 10500 - 440x + 4x^2 =$$

$$= 12x^2 - 880x + 10500$$

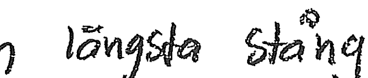
$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{220}{3}x + 875 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{110}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{110}{3}\right)^2 - 875} = \left[875 = \frac{7875}{9}\right] =$$
$$= \frac{110}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{12100 - 7875} =$$
$$= \frac{110}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{4225} = \frac{110}{3} \pm \frac{1}{3}65 = \begin{cases} 175/3 \\ 15 \end{cases}$$

d.v.s. stationär punkt $x = 15$ ty $\frac{175}{3} \notin [0, 35]$.
Värdet i stationära punkten:

$$V(15) = (150-30)(70-30) \cdot 15 =$$
$$= 120 \cdot 40 \cdot 15 = 72000 \text{ cm}^3$$

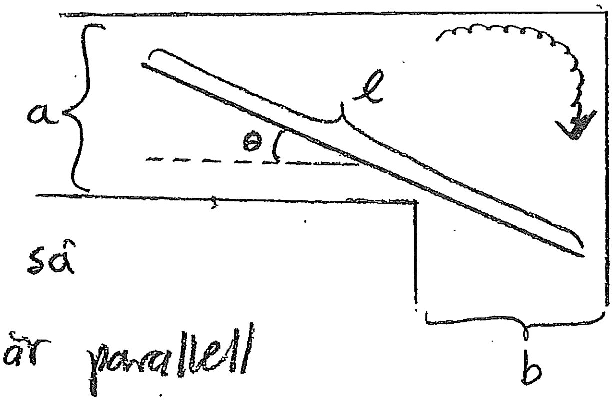
Lådan har maximalt volymen $72\,000 \text{ cm}^3$ (d.v.s. 72 liter).



4.8:28 Bestäm längden på den längsta stång som kan bäras runt ett hörn från en korridor med bredd a m till en annan med bredd b m. (Antag stång utan bredd.)

27

Lösning: Situation:

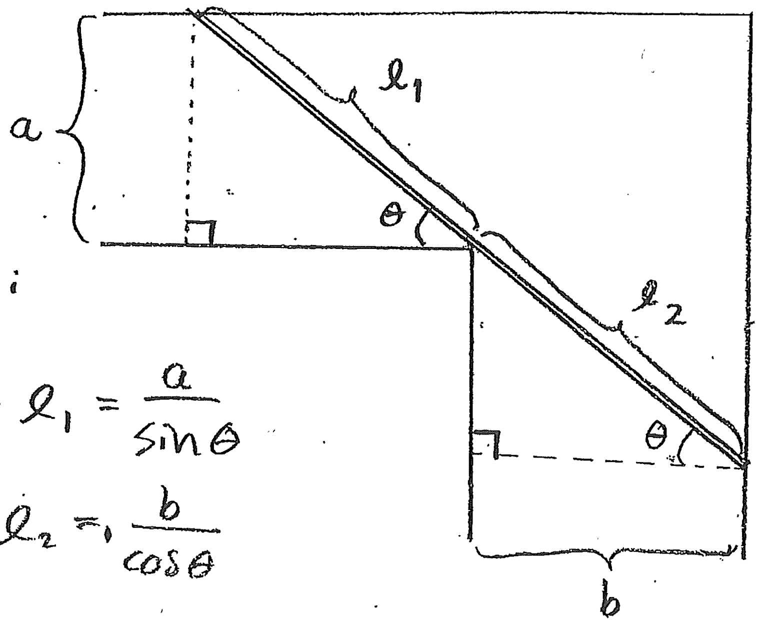


Vi tolkar uppgiften så att stången först är parallell med första korridoren, vrids 90°, och sedan parallell med andra korridoren.

Vi låter θ beteckna vinkeln mot första korridorens "riktning".

För varje θ kan man maximalt ha en stånglängd $\ell(\theta)$ enligt figuren:

$$\ell(\theta) = \ell_1 + \ell_2$$



Ur geometrin fås:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\ell_1} = \sin\theta \Leftrightarrow \ell_1 = \dfrac{a}{\sin\theta} \\ \dfrac{b}{\ell_2} = \cos\theta \Leftrightarrow \ell_2 = \dfrac{b}{\cos\theta} \end{cases}$$

Detta ger $\ell(\theta) = \dfrac{a}{\sin\theta} + \dfrac{b}{\cos\theta}$

Notera att $\theta = (0, \frac{\pi}{2})$

$$\lim_{\theta \to 0+} \ell(\theta) = \infty \quad \text{ty} \quad \sin\theta \longrightarrow 0+ \text{ då } \theta \to 0+$$

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} \ell(\theta) = \infty \quad \text{ty} \quad \cos\theta \longrightarrow 0+ \text{ då } \theta \to \frac{\pi}{2}+$$

Detta innebär att minsta stånglängden som passas in (d.v.s. största vi kan bära runt hörnet) ges av den stationära punkten:

$$\ell'(\theta) = -\frac{a}{\sin^2\theta}\cos\theta - \frac{b}{\cos^2\theta}(-\sin\theta) =$$

$$= -\frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{b\sin\theta}{\cos^2\theta} = [\text{förläng}] =$$

$$= \frac{b\sin^3\theta - a\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$\ell'(\theta) = 0 \Leftrightarrow b\sin^3\theta - a\cos^3\theta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan^3\theta = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \tan\theta = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/3} \quad (*)$$

Behöver ej räkna ut θ, endast $\sin\theta$ & $\cos\theta$.

$$\frac{1}{\cos^2\theta} \overset{\text{Trig-ettan}}{=} \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta + 1 \overset{(*)}{=} \left(\frac{a}{b}\right)^{2/3} + 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{2/3} + 1} = \frac{b^{2/3}}{a^{2/3} + b^{2/3}}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{b^{2/3}}{a^{2/3} + b^{2/3}} =$$

$$= \frac{a^{2/3}}{a^{2/3} + b^{2/3}}$$

.....

Detta ger minimumvärdet (d.v.s. maximal längd som kan bäras runt hörnet)

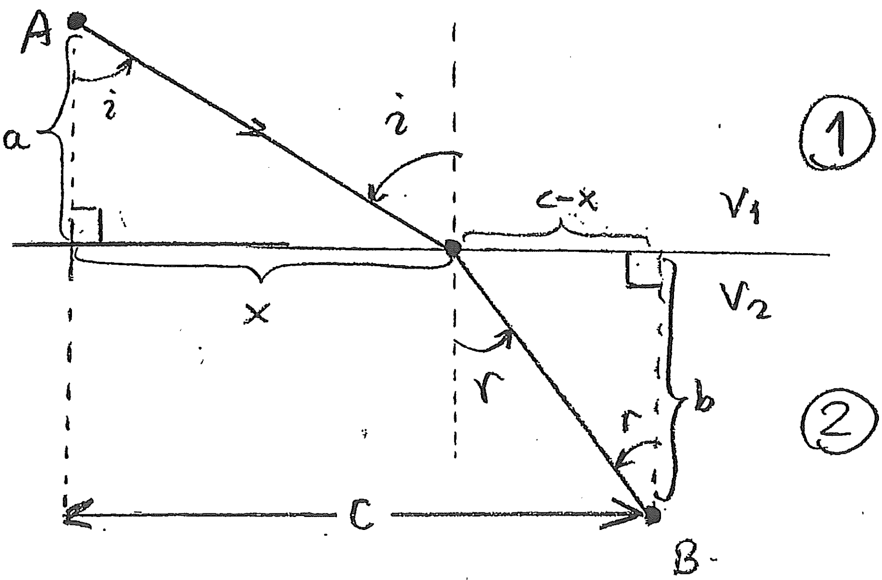
(29) $$\ell(\theta) = \frac{a}{\sin\theta} + \frac{b}{\cos\theta} = a\frac{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{a^{1/3}} + b\frac{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{b^{1/3}} =$$
$$= (a^{2/3}+b^{2/3})\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}} =$$
$$= (a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2} \text{ m}$$

Den längsta stång man kan bära runt hörnet är alltså $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$ m lång.

4.8:40 Ljusfart v_1 resp. v_2 i två olika medier åtskilda av plan yta. Visa att om ljuset går från A till B i de olika medierna så bryts det enligt Snells lag, d.v.s. $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$, där i = infallsvinkeln, r = refraktionsvinkeln. Använt principen att ljuset tar den väg som tar kortast tid.

Lösning:

Inför avstånd enligt figur.



x varierar mellan $-\infty$ och ∞, vi söker x som ger kortast tid.

Totala tiden är:

$$T(x) = \frac{\text{sträcka i } 1}{v_1} + \frac{\text{sträcka i } 2}{v_2} = [\text{Pythagoras}] =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} T(x) = \lim_{x\to\infty} T(x) = \infty$$

$\Rightarrow$ Minimum finns i stationär punkt ty inga singulära punkter finns

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

Notera att $\sin i = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $\sin r = \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$

(se vinklar i & r vid A resp. B)

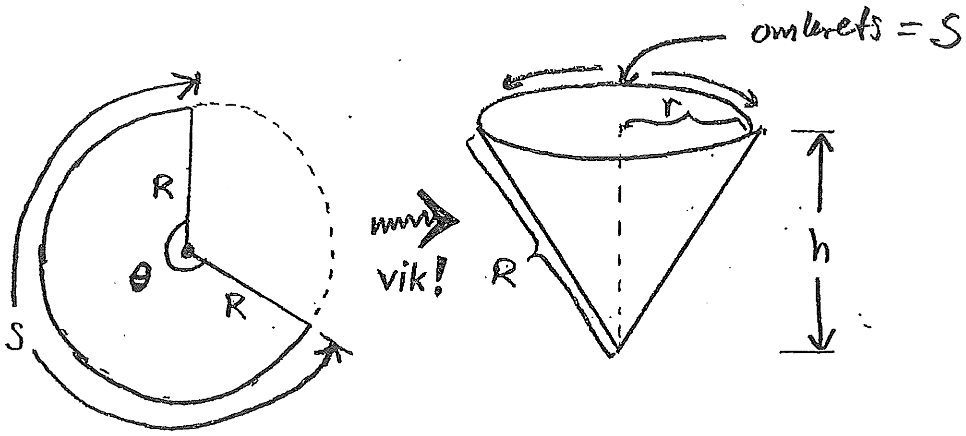
$\Longrightarrow$ Minimum för $\frac{1}{v_1}\sin i = \frac{1}{v_2}\sin r \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{(Snells lag)}$$

<u>4.8:48</u> Sektor skärs ut ur cirkelskiva radie R. Resten böjs till en kon. Bestäm största möjliga volymen.

(31)

Lösning:



R är cirkelskivans radie. Vi skär ut en sektor så att vinkel θ kvar. Då fås S enligt:

$$S = 2\pi R \frac{\theta}{2\pi} = R\theta$$

Detta måste vara omkretsen på toppen till konen, d.v.s.

$$S = 2\pi r$$
$$R\theta = 2\pi r$$
$$r = \frac{R}{2\pi}\theta$$

Pythagoras: $R^2 = h^2 + r^2$

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2\pi}\theta\right)^2} =$$
$$= \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

Konens volym: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h =$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2\pi}\theta\right)^2 \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} =$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$$

Låt $C = \frac{R^3}{24\pi^2}$. Då är volymen

$$V(\theta) = C\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Maximum fås i ändpunkter till $[0, 2\pi]$ eller i stationär punkt i $(0, 2\pi)$.

$$V(0) = V(2\pi) = 0$$

Stationär punkt:

$$V'(\theta) = C \cdot 2\theta\sqrt{4\pi^2-\theta^2} + C\theta^2\frac{-\theta}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}} =$$

$$= C\frac{2\theta(4\pi^2-\theta^2)-\theta^3}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}} =$$

$$= C\frac{8\pi^2\theta-3\theta^3}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}} = C\frac{\theta(8\pi^2-3\theta^2)}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}$$

$$V'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ eller } 8\pi^2 = 3\theta^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0 \text{ eller } \theta = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}\pi$$

Men varken 0 eller $-\sqrt{\frac{8}{3}}\pi$ ligger i $(0, 2\pi)$

$$\Rightarrow \theta = \sqrt{\frac{8}{3}}\pi \text{ är stationära punkten}$$

$\Rightarrow$ Maximal volym:

$$V\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\pi\right) = C \cdot \frac{8}{3}\pi^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 - \frac{8}{3}\pi^2} =$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2}\frac{8}{3}\pi^2\sqrt{\frac{12\pi^2-8\pi^2}{3}} =$$

$$= \frac{R^3}{9}\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$$