

①

Föreläsning 6

Grafsläsning

Inför s.k. asymptoter:

Definition:

- Vertikal asymptot i $x=a$ om

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty \quad \text{eller}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$$

- Horisontell asymptot $y=L$ om

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \text{eller}$$

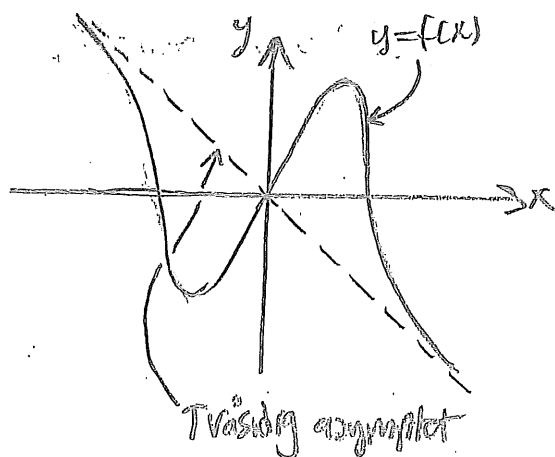
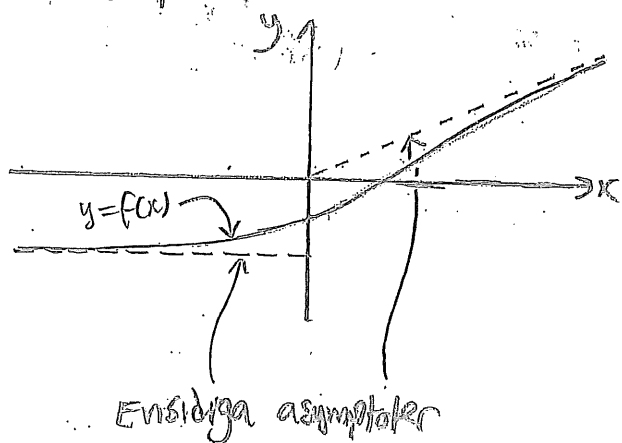
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

- Sned asymptot $y=ax+b$ ($a \neq 0$) om

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0 \quad \text{eller}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

Asymptoterna är en- eller tvåsidiga.



Hur hitta sneda asymptoter? Enkelt om rationellt:

Exempel: Rationell funktion

②

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+x-2}$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x^3 \overline{) x^2+x-2} \\ \underline{-x(x^2+x-2)} \\ -x^2+2 \\ \underline{-(-1)(x^2+x-2)} \\ x-2 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1) + \frac{x-2}{x^2+x-2}$$

$\rightarrow 0$ då $x \rightarrow \pm\infty$

$\Rightarrow$ Sned asymptot $\boxed{y = x-1}$

(Dessutom finns det vertikala asymptoter

$$\text{där } x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

d.v.s. vertikala asymptoter $\boxed{x=-2, x=1}$.)

Formell grafslutning: Följ receptet:

- ① Beräkna $f'(x)$ och $f''(x)$ (tabulera om möjligt)
- ② Undersök $f(x)$:
 - (a) Vertikala asymptoter (Nämnaren noll)
 - (b₁) Horisontella asymptoter (lim $f(x)$ $x \rightarrow \pm\infty$)
 - (b₂) Sneda asymptoter (lim $(f(x) - (ax+b))$ $x \rightarrow \pm\infty$)

③

(c) Symmetrier (f. udda/jämn)(d) Koordinataxelskärningspunkter③. Undersök $f'(x)$:(a) Kritiska punkter ($f'(x)=0$)(b) Punkter där $f'(x)$ ej definierad

(singulära punkter, ändpunkter, vertikala asymptoter (se 2.(a)))

(c) Intervall där $f'(x)$ positiv eller negativ

(d.v.s. tecknet, "+" eller "-" i tabell, för f skriver man "↗" (växande) resp. "↘" (avtagande))

④. Undersök $f''(x)$:(a) Punkter där $f''(x)=0$ (b) Punkter där $f''(x)$ ej definierad

(singulära punkter, ändpunkter, vertikala asymptoter (se 2.(a)) etc.)

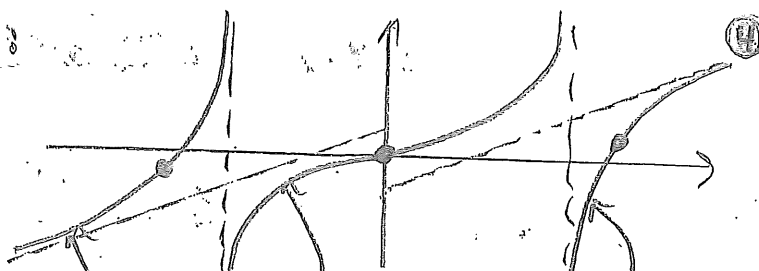
(c) Intervall där $f''(x)$ positiv eller negativ

(d.v.s. tecknet, "+" eller "-" i tabell, för f skriver man "∪" (konvex) resp. "∩" (konkav))

(d) InflexionspunkterNotera: Skriv ned koordinater för kritiska punkter, singulära punkter och inflexionspunkter.

Se också till att fä med minst en punkts koordinat i varje "komponent" av grafen

Komponent:



tre olika komponenter
(inifrånse delar)
en punkt representerad
1 komponent

Naktra:

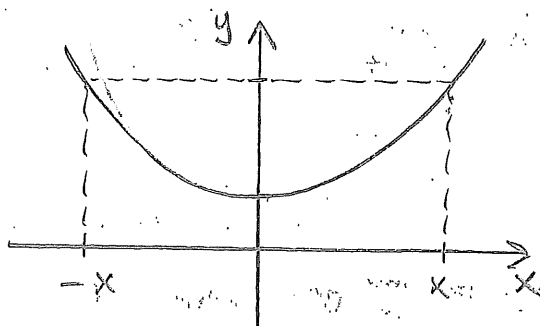
(f 2.(c))

• Jämn funktion:

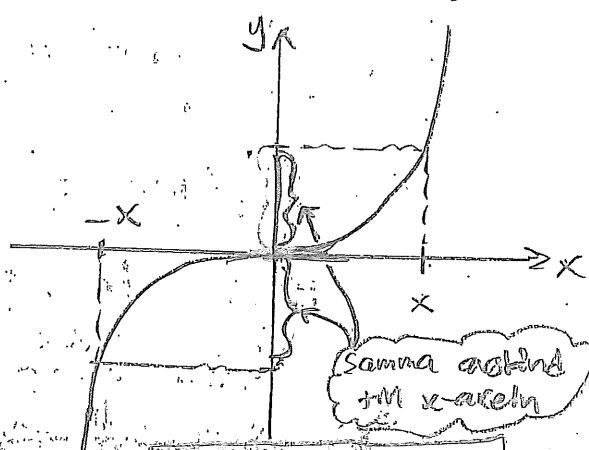
$$f(-x) = f(x)$$

• Udda funktion:

$$f(-x) = -f(x)$$



Jämn funktion



Samma avstånd
till x-axeln

Udda funktion

Exempel:

Slutbeta $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$

Lösning:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} f'(x) &= \frac{(x^2-4) \cdot \frac{d}{dx}(x^2-1) - (x^2-1) \cdot \frac{d}{dx}(x^2-4)}{(x^2-4)^2} \\ &= \frac{(x^2-4) \cdot 2x - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-4)^2} \\ &= \frac{2x^3-8x-2x^3+2x}{(x^2-4)^2} \\ &= \frac{-6x^2-6x}{(x^2-4)^2} \end{aligned}$$

⑤

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -6 \frac{(x^2-4)^2 \frac{d}{dx}(x) - x \frac{d}{dx}((x^2-4)^2)}{((x^2-4)^2)^2} = \\
 &= -6 \frac{(x^2-4)^2 - x \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \\
 &= -6 \frac{(x^2-4) - 4x^2}{(x^2-4)^3} = \\
 &= -6 \frac{-3x^2-4}{(x^2-4)^3} = 6 \frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3}
 \end{aligned}$$

(2) (a) Vertikala asymptoter där $x^2-4=0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x+2)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \frac{3}{0+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \frac{3}{0+} = +\infty$$

P.S.S. $\lim_{x \rightarrow 2\pm} f(x) = \mp \infty$ (konstant tecken)

$\Rightarrow x=\pm 2$ vert. asympt.

(b) Horisontella asymptoter:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-1/x^2}{1-4/x^2} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

$\Rightarrow y=1$ horis. asympt. (dubbelsida)

(b₂) Sneda asymptoter: Utesluts av att det finns en tvåsidig horisontell asymptot!

(c) Symmetrier: $f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2-4} =$

$$= \frac{x^2-1}{x^2-4} = f(x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ jämn funktion

(d) Skärning med y-axeln:

⑥

$$f(0) = \frac{0^2 - 1}{0^2 - 4} = \frac{-1}{-4} = 1/4$$

d.v.s. $(0, 1/4)$

Skärning med x-axeln:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

d.v.s. $(\pm 1, 0)$

③ (a) Kritiska punkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -6 \frac{x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 1/4)$$

(se 2.(a))

(b) f' ej definierad i $x = \pm 2$ (Jmf. 2.(a))

(c) $f'' > 0 \Leftrightarrow x < 0, f'' < 0 \Leftrightarrow x > 0$
($x \neq -2$) ($x \neq 2$)

④ (a) $f''' = 0 \Leftrightarrow 6 \frac{3x^2 + 4}{(x^2 - 4)^3} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4 = 0,$

Salvare lösning, ing sådana punkter finns

(b) f'' ej definierad i $x = \pm 2$ (Jmf. 2.(a) & 3.(b).)

$$(c) f'' > 0 \Leftrightarrow 6 \frac{3x^2 + 4}{(x^2 - 4)^3} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < -2 \text{ eller } x > 2$$

$$\Rightarrow f'' < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$$

(d) Saknas.

⑦ Dessutom: Tre komponenter, minst en punkt i varje ska beräknas. Har redan för $(-2, 2)$. Två övriga:

För $(-\infty, -2)$: $f(-3) = \frac{9-1}{9-4} = 8/5$

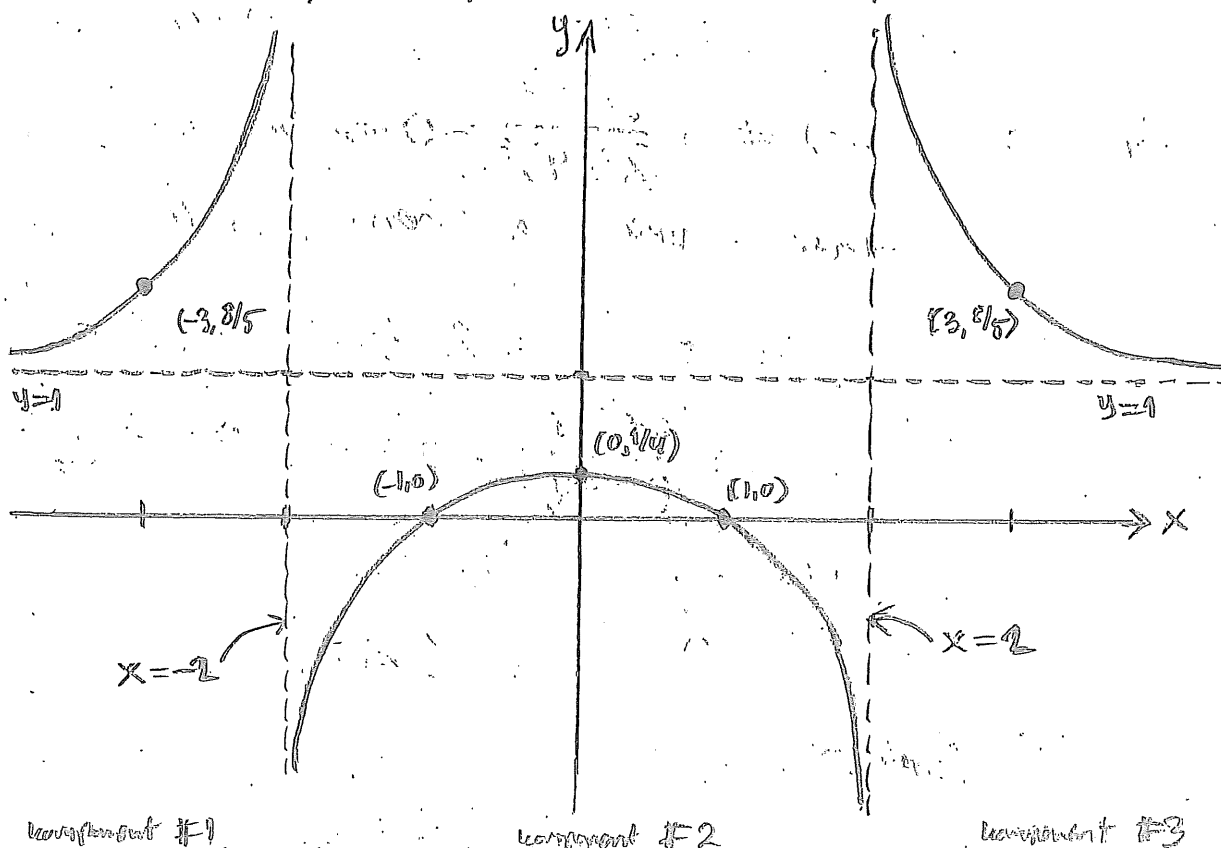
För $(2, \infty)$: $f(3) = [\text{symm.}] = f(-3) = 8/5$

d.v.s. $(\pm 3, 8/5)$

Sätt upp tabell:

	-2	0	2	
f'	++++ $\frac{2}{3}$	++++0	---- $\frac{2}{3}$	$\rightarrow x$
f''	++++ $\frac{2}{3}$	-----	---- $\frac{2}{3}$	
f		 lok max		 vert. asympt.

Vi har tillräckligt med information för att skissa:

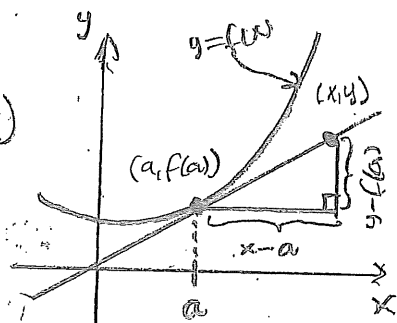


Taylor's sats

Tangentlinjen till $f(x)$ i $x=a$ har som den finns) ekvationen

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

ty $f'(a) = \frac{y - f(a)}{x - a}$



Detta är ett polynom $P_1(x)$ av grad 1:

$$P_1(x) = y = (f(a) - f'(a)a) + f'(a)x$$

P_1 fungerar som approximation därför att

$$P_1(a) = f(a) \text{ och } P_1'(a) = f'(a)$$

Man borde få ännu bättre approximation om man lyckas få till

$$P_n(a) = f(a), P_n'(a) = f'(a), \dots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \quad (*)$$

för $n > 1$ där P_n är n -te-gradspolynom.

Det gäller att
$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \quad (**)$$

uppfyller (*) ovan, ty

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \Rightarrow P_n(a) = \frac{f^{(0)}(a)}{0!} = f(a)$$

$$P_n'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} i (x-a)^{i-1} = \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(a)}{(i-1)!} (x-a)^{i-1}$$

9

$$\Rightarrow P_n'(a) = \frac{f^{(1)}(a)}{(1-1)!} = f'(a)$$

$$P_n''(x) = \sum_{i=2}^n \frac{f^{(i)}(a)}{(i-1)!} (i-1)(x-a)^{i-2} =$$

$$= \sum_{i=2}^n \frac{f^{(i)}(a)}{(i-2)!} (x-a)^{i-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_n''(a) = \frac{f^{(2)}(a)}{(2-2)!} = f''(a)$$

$$P_n'''(x) = \sum_{i=3}^n \frac{f^{(i)}(a)}{(i-2)!} (i-2)(x-a)^{i-3} =$$

$$= \sum_{i=3}^n \frac{f^{(i)}(a)}{(i-3)!} (x-a)^{i-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_n'''(a) = \frac{f^{(3)}(a)}{(3-3)!} = f'''(a)$$

$\vdots$

$$P_n^{(n)}(x) = \sum_{i=n}^n \frac{f^{(i)}(a)}{(i-(n-1))!} (i-(n-1))(x-a)^{i-n} =$$

$$= \sum_{i=n}^n \frac{f^{(i)}(a)}{(i-n)!} (x-a)^{i-n} = \frac{f^{(n)}(a)}{0!} = f^{(n)}(a)$$

$$\Rightarrow P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$



P_n kallas n:te ordningens Taylorpolynom

av f kring a . (Kring 0: Maclaurinpolynom)
(används i formelsamlingen)

Hur stort blir felet i approximationen

$$f(x) \approx P_n(x) ?$$

Taylor's formel ger svaret:

Taylor's sats: Om $f^{(n+1)}(t)$ finns för alla (19)

t i ett intervall som innehåller a och x och $P_n(x)$ är n:te ordningens Taylor-polynom av f längs a så ges felet

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

i approximationen $f(x) \approx P_n(x)$ av

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (*)$$

för något $s \in \underbrace{(a, x)}_{\text{om } x > a}$ eller $\underbrace{(x, a)}_{\text{om } x < a}$.

Notera: $f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$

kallas Taylor's formel med Lagrange-restterm, där resttermen alltså är (*).

Beweis av Taylor's sats: Induktionsbevis.

• Startsteg: Låt $n=0$. Då innebär satsen

$$E_0(x) = f(x) - P_0(x)$$

$$f'(s)(x-a) = f(x) - f(a), \quad s \in \begin{cases} (a, x), & x > a \\ (x, a), & x < a \end{cases}$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(s), \quad s \in \begin{cases} (a, x), & x > a \\ (x, a), & x < a \end{cases}$$

vilket är Medelvärdessatsen tillämpad

på intervaller $[a, x]$ eller $[x, a]$.
 $x > a$
 $x < a$

⑪

Startsteget verifierat.

• Induktionssteg: Antag satsen sann

för $n=p$, d.v.s. felet ges av

$$E_p(x) = \frac{f^{(p+1)}(s)}{(p+1)!} (x-a)^{p+1}$$

där $s \in (a, x)$ eller (x, a) .
 $(x > a)$ $(x < a)$

Antag fr. o. m. nu att $x > a$.

Tillämpa Generaliserade medelvärdessatsen
 på funktionerna $E_{p+1}(t)$ och $(t-a)^{p+2}$
 på intervallet $[a, x]$:

$$\begin{aligned} \frac{E_{p+1}(x)}{(x-a)^{p+2}} &= \frac{E_{p+1}(x) - 0}{(x-a)^{p+2} - 0} \overset{\boxed{E_{p+1}(a)=0}}{=} \frac{E_{p+1}(x) - E_{p+1}(a)}{(x-a)^{p+2} - (a-a)^{p+2}} = \\ &\stackrel{\text{GMS}}{=} \frac{E'_{p+1}(u)}{(p+2)(u-a)^{p+1}} \quad (**) \end{aligned}$$

för något $u \in (a, x)$.

$$\begin{aligned} \text{Men: } E'_{p+1}(u) &= \frac{d}{dt} E_{p+1}(t) \Big|_{t=u} = \\ &= \frac{d}{dt} (f(t) - P_{p+1}(t)) \Big|_{t=u} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(f(t) - \sum_{i=0}^{p+1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (t-a)^i \right) \Big|_{t=u} = \\ &= f'(u) - \sum_{i=1}^{p+1} \frac{f^{(i)}(a)}{(i-1)!} (u-a)^{i-1} = \\ &= f'(u) - \sum_{j=0}^p \frac{f^{(j+1)}(a)}{j!} (u-a)^j = \end{aligned}$$

$$= f'(u) - \sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}(u)}{j!} (u-a)^j \quad (12)$$

$$= \tilde{E}_p(u)$$

där $\tilde{E}_p$ är felet för f' .

Enligt induktionsantagandet (som gäller för alla funktioner som uppfyller Taylors sats' antaganden)

$$\begin{aligned} \text{Så har vi: } \tilde{E}_p(u) &= \frac{f^{(p+1)}(s)}{(p+1)!} (u-a)^{p+1} \\ &= \frac{f^{(p+2)}(s)}{(p+1)!} (u-a)^{p+1} \end{aligned}$$

för något $s \in (a, u)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{E_{p+1}(x)}{(x-a)^{p+2}} &= \frac{\frac{f^{(p+2)}(s)}{(p+1)!} (u-a)^{p+1}}{(p+2)(u-a)^{p+1}} = \\ &= \frac{f^{(p+2)}(s)}{(p+2)!}, \quad s \in (a, u) \subset (a, x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_{p+1}(x) = \frac{f^{((p+1)+1)}(s)}{((p+1)+1)!} (x-a)^{((p+1)+1)}$$

d.v.s. Taylors formel även för $n=p+1$.

Induktionsargumentet ger att det är sant $\forall n \geq 0$ □

Stora ord:

Vid beräkning av gränsvärden som är obestända
uttryck, d.v.s. av typen $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, så är begreppet
stora ord användbart/praktiskt.

13

Definition: Om $|f(x)| \leq K |u(x)|$ för någon konstant $K > 0$ i ett öppet intervall som innehåller $x=a$ så skriver man

$$f(x) = O(u(x)) \text{ då } x \rightarrow a$$

("f är stora ordo då x går mot a")

Egenskaper: (i) $f(x) = O(u(x)), x \rightarrow a$

$$\Rightarrow C f(x) = O(u(x)), x \rightarrow a$$

(Konstanter påverkar ej stora ordo.)

$$(ii) f(x) = O(u(x)) \text{ och } g(x) = O(u(x)), x \rightarrow a$$

$$\Rightarrow (f \pm g)(x) = O(u(x)), x \rightarrow a$$

(Summer påverkar ej stora ordo.)

$$(iii) f(x) = O((x-a)^k u(x)), x \rightarrow a$$

$$\Rightarrow f(x)/(x-a)^k = O(u(x)), x \rightarrow a$$

Om $u(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow a$ så säger

$$f(x) = O(u(x)) \text{ att } f(x) \text{ också } \rightarrow 0, x \rightarrow a.$$

(Man kan säga att "f uppför sig som u då $x \rightarrow a$ ".

(Egentligen uppför sig f ännu bättre än u.

eftersom $u \rightarrow 0 \Rightarrow f \rightarrow 0$, men $f \rightarrow 0 \not\Rightarrow u \rightarrow 0$.)

Sats: Om $f(x) = Q_n(x) + O((x-a)^{n+1}), x \rightarrow a$,

där Q_n polynom av grad $\leq n$ så gäller

$Q_n = P_n$, d.v.s. Q_n är Taylorpolynomet till f i $x=a$.

Satsen säger att endast Taylorpolynomet (19)
måttas med att approximeras funktionen
så att resttermen blir $O((x-a)^{n+1})$.

Notera: Satsen garanterar att man kan sätta
ihop redan kända Taylorpolynom för
att bilda nya, så länge man håller
reda på ordningen hos resttermerna.

15

Några jämna uppgifter

4.6:6 f med följande egenskaper:

- (i) $f(-1)=0, f(0)=2, f(1)=1, f(2)=0, f(3)=1$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) + 1 - x) = 0$
- (iii) • $f'(x) > 0$ på $(-\infty, -1), (-1, 0)$ och $(2, \infty)$
• $f'(x) < 0$ på $(0, 2)$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \infty$
- (v) • $f''(x) > 0$ på $(-\infty, -1)$ och $(1, 3)$
• $f''(x) < 0$ på $(-1, 1)$ och $(3, \infty)$

Tabell:
(iii)–(v)

	-1	0	1	2	3	
f'	++++ ∞	++?	--?	-?	+++++	
f''	++++?	----	-?	+++++	?----	
f						

- Kritiska punkter: $x=0$ och $x=2$
- Singulära punkter: $x=-1$
- Lokalt maximum: $x=0$
- Lokalt minimum: $x=2$
- Inflexionspunkter: $x=1$ och $x=3$

$$(ii): \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (x-1)) = 0$$

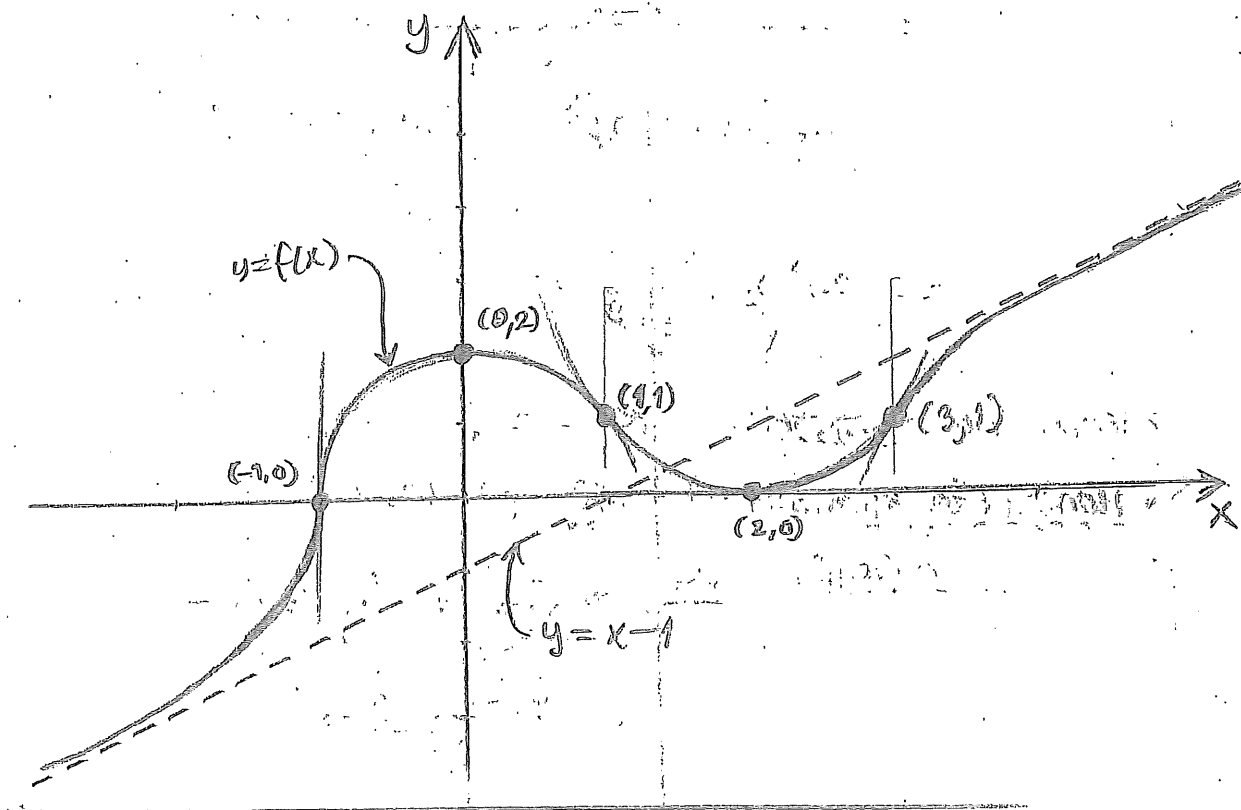
(16)

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (x-1)) = 0$$

$\Rightarrow$ Dubbelsidig sned asymptot $y = x - 1$

(i) Ger oss punkter på grafen att "ledsaga" oss.

Skissering av grafen:



4.4:16

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}, \text{ skissera!}$$

Vi följer receptet:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2-1) \frac{d}{dx}(x^3) - x^3 \frac{d}{dx}(x^2-1)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{(x^2-1) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(3x^2-3-2x^2)}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

⑦

$$= \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) &= \frac{(x^2-1)^2 \cdot \frac{d}{dx}(x^2(x^2-3)) - x^2(x^2-3) \cdot \frac{d}{dx}(x^2-1)^2}{(x^2-1)^4} = \\ &= \frac{(x^2-1)^2 \cdot (2x(x^2-3) + x^2 \cdot 2x) - x^2(x^2-3) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \\ &= \frac{(x^2-1) \cdot 2x \cdot ((x^2-1)(x^2-3+x^2) - 2x^2(x^2-3))}{(x^2-1)^4} = \\ &= \frac{2x((x^2-1)(2x^2-3) - 2x^4+6x^2)}{(x^2-1)^3} = \\ &= \frac{2x(2x^4-3x^2-2x^2+3-2x^4+6x^2)}{(x^2-1)^3} = \\ &= \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

• Vertikala asymptoter: $x = \pm 1$

• Horisontella asymptoter: Nej, ty $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$

• Sneda asymptoter:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^3-x+x}{x^2-1} = \\ &= \frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1} = \\ &= x + \frac{x}{x^2-1} \end{aligned}$$

$\xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} 0$

$\Rightarrow y = x$ sned asymptot (dubbelsnig)

• Symmetri: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x)$

d.v.s. f är odda funktion

• Koordinatvärdessminkor: y-axeln: $f(0) = 0$
 $\Rightarrow (0,0)$

x-achsen: $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow$ (18)

$\Leftrightarrow x=0 \Rightarrow (0,0)$

$\Rightarrow$ (Sicht axlar bara i angö. $(0,0)$.)

• Kritiska punkter: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-3=0$ eller $x=0 \Leftrightarrow x=0, \pm\sqrt{3}$

$f(\pm\sqrt{3}) = f(\pm 3^{1/2}) = \frac{(\pm 3^{1/2})^3}{(\pm 3^{1/2})^2-1} =$
 $= \frac{\pm 3^{3/2}}{3-1} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow (\pm\sqrt{3}, \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}), (0,0)$

• f' ej definierad: $x=\pm 1$

• f' is tecken: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-3 > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{3}$ eller $x > \sqrt{3}$

$\Rightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ (dock ej ± 1)

• $f''=0$: $f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0$

• f'' ej definierad: $x=\pm 1$

• f'' is tecken: $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ och } x^2-1 > 0 \\ \text{eller} \\ x < 0 \text{ och } x^2-1 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x > 1$ eller $x \in (-1, 0)$

$\Rightarrow f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$ eller $x \in (0, 1)$

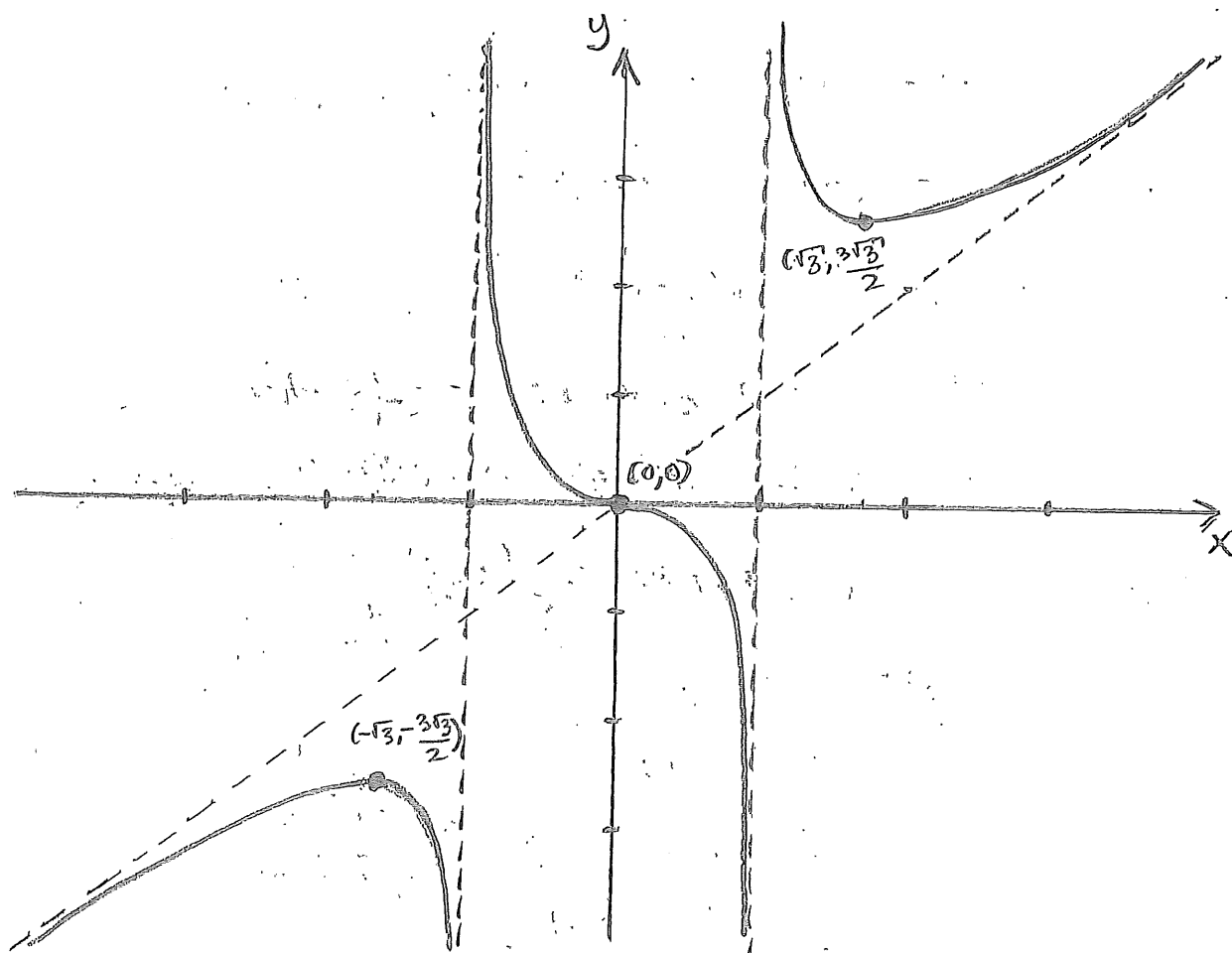
• Inflexionspunkt: $x=0$, så $(0,0)$

19

Tabell:

	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	x
f'	++++	0	---	0	---	
f''	---	---	0	---	---	
f		lok max	sympunkt	lok min		

Vi kan nu skissa f 's graf:



4.10:12

$f(x) = \arctan x$ linng $x=1$

Approximera arctan 0.97 m.h.a. P_2

Uppskatta felet.

$f(x) = \arctan x \Rightarrow f(1) = \arctan 1 = \pi/4$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = -\frac{(1+x^2)^2 \cdot \frac{d}{dx}(2x) - 2x \cdot \frac{d}{dx}((1+x^2)^2)}{(1+x^2)^4} =$$

$$= -\frac{2(1+x^2)^2 - 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} =$$

$$= -\frac{2(1+x^2) - 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} = 2 \frac{3x^2 - 1}{(1+x^2)^3}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2$$

$$\Rightarrow f(0.97) \approx P_2(0.97) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(0.97-1) - \frac{1}{4}(0.97-1)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 0.03 - \frac{1}{4} \cdot 0.03^2 = \underline{\underline{0.770173163...}}$$

Felet: $E_2(x) = \frac{1}{3!}f'''(c)(x-1)^3, c \in (x, 1), x < 1$

$$\Rightarrow E_2(0.97) = \frac{1}{6}f'''(c)(0.97-1)^3 =$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot 2 \frac{3c^2 - 1}{(1+c^2)^3} \cdot 0.03^3 =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3c^2 - 1}{(1+c^2)^3} \cdot 27 \cdot 10^{-6} =$$

$$= -9 \frac{3c^2 - 1}{(1+c^2)^3} \cdot 10^{-6}, \quad 0.97 < c < 1$$

Låt $g(c) = \frac{3c^2 - 1}{(1+c^2)^3}, c \in [0.97, 1]$.

Hitta värdemängden för g , dvs. största & minsta värde.

21

$$\begin{aligned}
 g'(c) &= \frac{(1+c^2)^3 \frac{d}{dc}(3c^2-1) - (3c^2-1) \frac{d}{dc}((1+c^2)^3)}{(1+c^2)^6} \\
 &= \frac{(1+c^2)^3 \cdot 6c - (3c^2-1) \cdot 3(1+c^2)^2 \cdot 2c}{(1+c^2)^6} \\
 &= \frac{(1+c^2) \cdot 6c - 6c(3c^2-1)}{(1+c^2)^4} \\
 &= \frac{6c + 6c^3 - 18c^3 + 6c}{(1+c^2)^4} = \frac{12c - 12c^3}{(1+c^2)^4} \\
 &= 6c \frac{2-3c^2}{(1+c^2)^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g'(c) = 0 &\Leftrightarrow 6c \frac{2-3c^2}{(1+c^2)^4} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow c=0 \text{ eller } 2-3c^2=0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow c=0 \text{ eller } c = \pm \sqrt{2/3} \notin (0.97, 1)
 \end{aligned}$$

Största & minsta i ändpunkter:

$$\begin{cases}
 g(0.97) = \frac{3 \cdot 0.97^2 - 1}{(1+0.97^2)^3} = 0.2492904... \\
 g(1) = \frac{3-1}{(1+1)^3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow E_2(0.97) &\in (-9 \cdot 0.25 \cdot 10^{-6}, -9 \cdot 0.2492904... \cdot 10^{-6}) \\
 &= (-2.25 \cdot 10^{-6}, -2.243614... \cdot 10^{-6})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \text{mekan } 0.97 &= f(0.97) = P_2(0.97) + E_2(0.97) \in \\
 &\in (0.770173163... - 0.00000225, \\
 &\quad 0.770173163... - 0.000002243...) = \\
 &= \underline{\underline{(0.770170913..., 0.770170919...)}}
 \end{aligned}$$

4.10:28

$$f(x) = x^3 \text{ kring } x=1$$

②

Hitta P_n , $n \geq 0$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f(1) = 1^3 = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(1) = 6 \cdot 1 = 6$$

$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(1) = 6$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall n \geq 4 \Rightarrow f^{(n)}(1) = 0 \quad \forall n \geq 4$$

$$\Rightarrow P_0(x) = f(1) = \underline{1}$$

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) = \\ &= \underline{1 + 3(x-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!} f''(1)(x-1)^2 = \\ &= 1 + 3(x-1) + \frac{1}{2} 6(x-1)^2 = \\ &= \underline{1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \dots = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{1}{3!} f'''(1)(x-1)^3 = \\ &= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{1}{6} 6(x-1)^3 = \\ &= \underline{1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3} \end{aligned}$$

$$P_n(x) = P_3(x) = \underline{1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3}$$

for alla $n \geq 4$

(23)

9.7:24 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{x^2 - \ln(1+x^2)}$

Använd $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$ } se t.ex.
 Table 5
 $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$ } s. 277

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{x^2 - \ln(1+x^2)} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1+x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3))-1-x)^2}{x^2 - (x^2 - \frac{1}{2}(x^2)^2 + O((x^2)^3))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{2}x^2 + O(x^3))^2}{\frac{1}{2}x^4 + O(x^6)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{2}x^2)^2 + 2\frac{1}{2}x^2 O(x^3) + (O(x^3))^2}{\frac{1}{2}x^4 + O(x^6)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}x^4 + O(x^5)}{\frac{1}{2}x^4 + O(x^6)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{4}x^4 + O(x^5))/x^4}{(\frac{1}{2}x^4 + O(x^6))/x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4} + O(x)}{\frac{1}{2} + O(x^2)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Se även RÖ12 där jag löst bl.a.

9.7:26

(OBS: "... " ska egentligen vara lämpliga
 O-uttryck!)

Lösning till denna återfinns också nedan.

9.7:26 Bestäm $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x}{x(\cos(\sin x) - 1)}$

(24)

Lösning: Vi använder Maclaurinserieutvecklingar:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x}{x(\cos(\sin x) - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + \frac{\sin^5 x}{5!} - \dots - x}{x(1 - \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^4 x}{4!} - \dots - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + \frac{\sin^5 x}{5!} - \dots - x}{x(-\frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^4 x}{4!} - \dots)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + \dots) - \frac{1}{3!}(x - \frac{x^3}{3!} + \dots)^3 + \frac{1}{5!}(x - \frac{x^3}{3!} + \dots)^5 - x}{x[-\frac{1}{2!}(x - \frac{x^3}{3!} + \dots)^2 + \frac{1}{4!}(x - \frac{x^3}{3!} + \dots)^4 - \dots]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{1}{3!}x^3 + \dots) - \frac{1}{3!}(x^3 + \dots) + \frac{1}{5!}(x^5 + \dots)}{x[-\frac{1}{2!}(x^2 + \dots) + \frac{1}{4!}(x^4 + \dots)]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!})x^3 + \dots}{-\frac{1}{2!}x^3 + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(\frac{1}{6} + \frac{1}{6})x^3 + \dots}{-\frac{1}{2}x^3 + \dots} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + \dots}{-\frac{1}{2}x^3 + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} + \dots}{-\frac{1}{2} + \dots} = \frac{-1/3}{-1/2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(Notera: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} + \dots}{-\frac{1}{2} + \dots}$ betyder egentligen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots}{-\frac{1}{2} + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots}, \text{ d.v.s. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} + o(x)}{-\frac{1}{2} + o(x)},$$

för några konstanter $a_1, a_2, a_3, \dots$ och $b_1, b_2, b_3, \dots$.)