

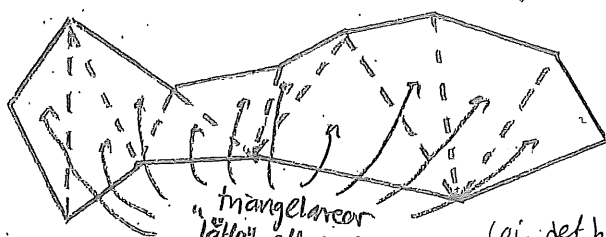
Föreläsning 7

Areaproblemet

Vad är egentligen ett områdes (i xy-planet) area? Man kan "lätt" (med elementära

icke-analysmetoder) räkna ut polygoners areor. (Polygon: Område som begränsas av ett ändligt antal ändligt långa raka linjer.

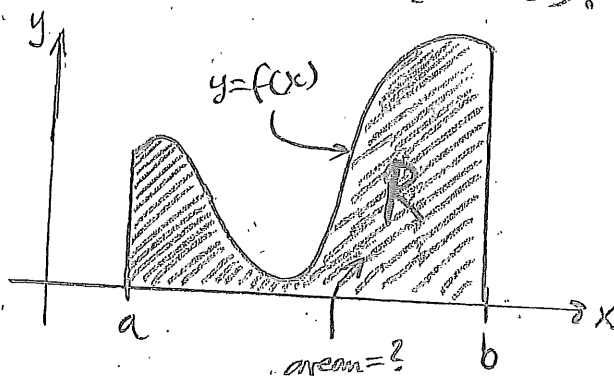
(Ett s.k. slutet polygontåg)



(oj, det blev en fisk...)

I analys vill vi räkna ut mer komplicerade områders areor:

Antag område R ligger mellan grafen till $y=f(x)$ (f icke-negativ och kontinuerlig), x -axeln, $x=a$ och $x=b$ ($a \leq b$).

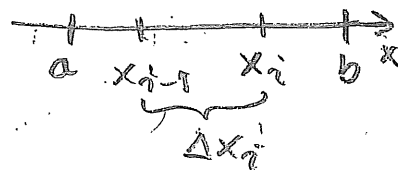


Dela upp $[a,b]$ m.h.a. delningspunkter:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Låt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ②

längd hos $[x_{i-1}, x_i]$



Lägg rektangel avsnitt

$[x_{i-1}, x_i]$ med bas Δx_i och höjd $f(x_i)$

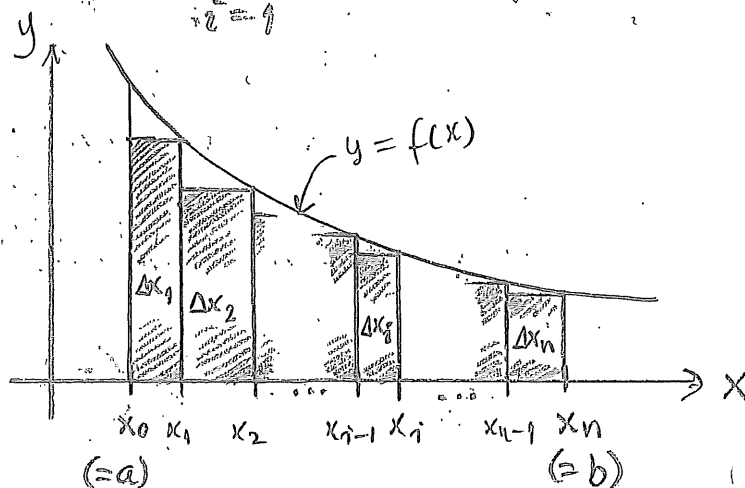
$$\Rightarrow \text{rektangelarea} = f(x_i) \Delta x_i$$

$\Rightarrow$ total rektangelarea:

$$S_n = f(x_1) \Delta x_1 + \dots + f(x_n) \Delta x_n =$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Se figur:



Då $n \rightarrow \infty$ och största $\Delta x_i \rightarrow 0$ så borde felet hos S_n gå mot 0, d.v.s.

$$\text{arean hos } R = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} S_n$$

Exempel: Arean hos området mellan

$$y = x^2, y = 0, x = 0 \text{ och } x = 3.$$

Lösning: Låt $x_0 = 0 = \frac{0}{n}$, $x_1 = \frac{3}{n}$, $x_2 = \frac{6}{n}$, ...

③

$$x_{n-1} = \frac{3(n-1)}{n}, x_n = 3 = \frac{3n}{n}$$

Notera att $\Delta x_i = \frac{3}{n} \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$

dv.s. samma bredd.

Formel:

$$x_i = \frac{3i}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{3i}{n}\right)^2 = \frac{9i^2}{n^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{9i^2}{n^2} \cdot \frac{3}{n} = \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 =$$

$$= \left[\text{Se Föreläsning 2 sid. 2} \right] =$$

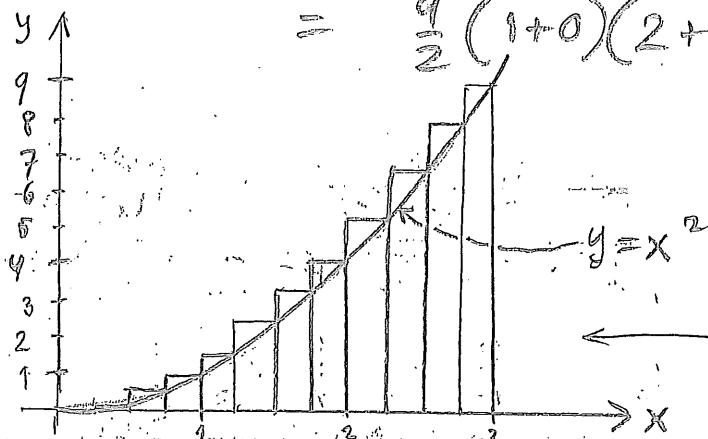
$$= \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \text{arean} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{9}{2} (1+0)(2+0) = \frac{9}{2} \cdot 2 = 9 \quad \square$$



$$n=12$$

$$(\Delta x_i = \frac{3}{12} = \frac{1}{4})$$

Den bestämda integralen Antag f kont. på $[a, b]$. ④

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

$$\text{där } a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

P kallas partition av intervallet $[a, b]$.

P definierar en uppdelning av $[a, b]$ i n delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ med längden

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

Normen av P är största Δx_i :

$$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

f kontinuerlig på $[a, b] \Rightarrow f$ kont. på $[x_{i-1}, x_i]$

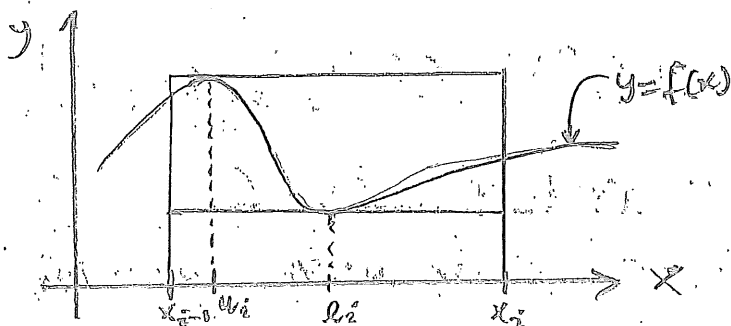
$\Rightarrow f$ antar största och minsta värde på $[x_{i-1}, x_i]$

d.v.s. det finns $\ell_i, u_i \in [x_{i-1}, x_i]$ s.a.

$$f(\ell_i) \leq f(x) \leq f(u_i) \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Antag A_i arean under $y=f(x)$, ovan $y=0$ och mellan $x=x_{i-1}$ och $x=x_i$. Det måste gälla

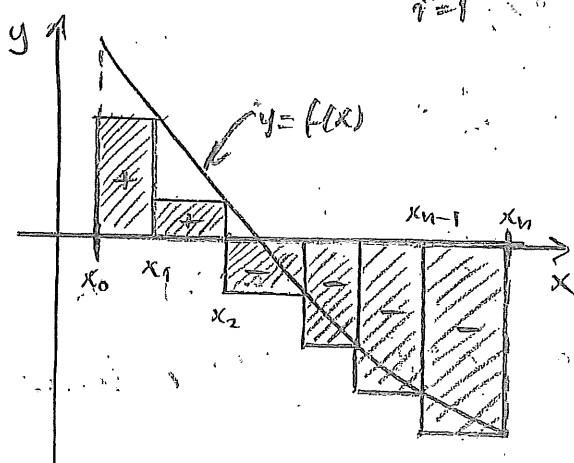
$$f(\ell_i) \Delta x_i \leq A_i \leq f(u_i) \Delta x_i$$



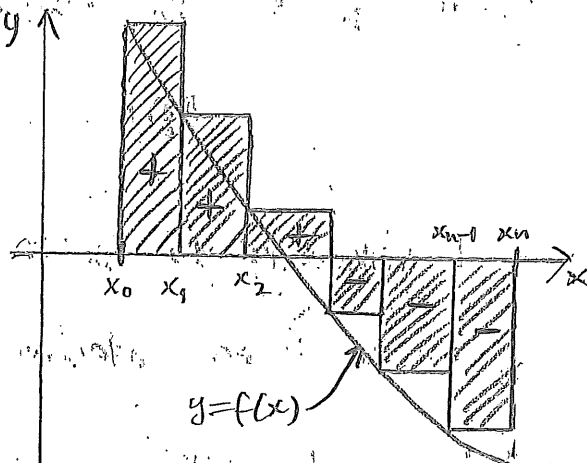
⑤ Definition: Undersumman $L(f, P)$ och översumman $U(f, P)$ till f med avseende på P ges av

$$\begin{aligned} \bullet L(f, P) &= f(l_1)\Delta x_1 + f(l_2)\Delta x_2 + \dots + f(l_n)\Delta x_n = \\ &= \sum_{i=1}^n f(l_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet U(f, P) &= f(u_1)\Delta x_1 + f(u_2)\Delta x_2 + \dots + f(u_n)\Delta x_n = \\ &= \sum_{i=1}^n f(u_i)\Delta x_i \end{aligned}$$



$L(f, P)$



$U(f, P)$

P_2 är förfining av partitionen P_1 om de är partitioner av $[a, b]$ sådana att alla punkter i P_1 också är i P_2 .

$$\xRightarrow{P} L(f, P_1) \leq L(f, P_2) \leq U(f, P_2) \leq U(f, P_1)$$

P är gemensam förfining till P_1 och P_2 om

P består av av unionen av punkterna i P_1 och P_2 .

$$\Rightarrow L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2) \quad (6)$$

$$\Rightarrow L(f, P_1) \leq U(f, P_2) \quad \text{för alla partitioner } P_1, P_2$$

(våre undersumma är mindre än våre översumma)

$$\Rightarrow \inf_{\text{alla } P_1} L(f, P_1) \leq \sup_{\text{alla } P_2} U(f, P_2)$$

(Finns till och med fullständighetssatser!))

Välj I mellan dessa tal

$$\Rightarrow L(f, P) \leq I \leq U(f, P) \quad \forall P$$

Definition av
bestämda integralen

Om I unikt så kallas detta för bestämda integralen till f på $[a, b]$, och vi säger att f är integrerbar på $[a, b]$. Man skriver

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

$\int_a^b f(x) dx$: (i) integraltecknet, ett slags S , (gammaldags?) som i summa

(ii) a, b integrationsgränser
(undre resp. övre)

(iii) f integrand, x integrations-
variabel

(iv) dx differential (till x)
(motiveras Δx)

⑦ Plöcka ut $[x_{i-1}, x_i]$ ett tal $c_i, i=1, 2, \dots, n$.

Låt $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. Då kallas

$$R(f, P, C) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

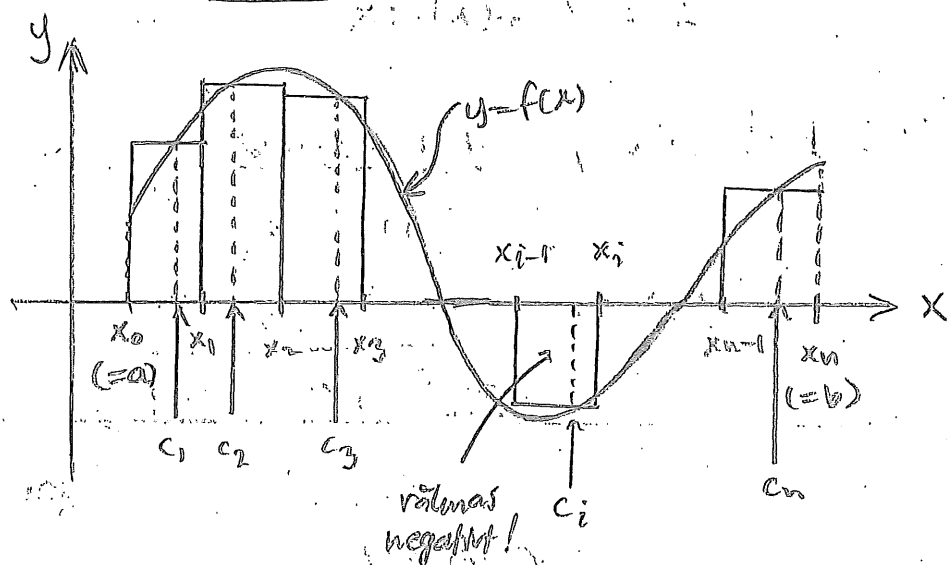
för Riemannsumman till f på $[a, b]$ med avseende på partition P och "enheter" C .

Uppenbarligen gäller

$$L(f, P) \leq R(f, P, C) \leq U(f, P)$$

$$\text{ty } f(l_i) \leq f(c_i) \leq f(u_i) \quad \forall i=1, 2, 3, \dots, n$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \|P\| \rightarrow 0}} R(f, P, C) = \int_a^b f(x) dx \quad (=I)$$



Sats: f kontinuerlig på $[a, b]$
 $\Rightarrow f$ integrerbar på $[a, b]$ ($\int_a^b f(x) dx$)

Egenskaper hos den bestämda integralen

⑧

Man kan låta $a > b$ och $a = b$ i den bestämda integralen ($\Delta x_i < 0$ resp. $\Delta x_i = 0$).

Sats: Antag f, g integrerbara på ett intervall som innehåller a, b, c .

$$(a) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$(b) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

(linjäritet) $(c) \int_a^b (A f(x) + B g(x)) dx = A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx$

$$(d) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

$$(e) a \leq b, f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \\ \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

(triangel-
olikheten) $(f) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

$$(g) f \text{ udda funktion} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$(h) f \text{ jämn funktion} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

Beweis: Följer mer eller mindre direkt ur definitionen av Riemannsumman.

Notera att (f) ges av den generaliserade

⑨

triangelolikheten $\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$ $\square$

(termerna kan
ta ut varann)

(termerna kan inte
ta ut varann)

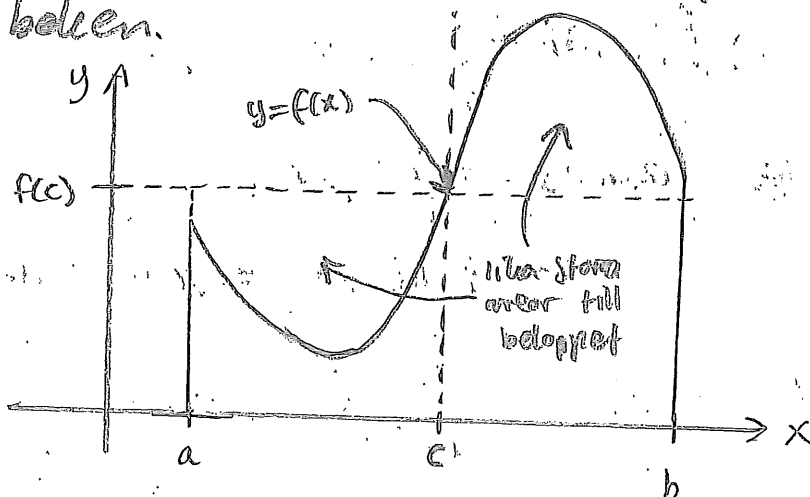
Medelvärdessatsen för integraler:

Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$.

Då finns $c \in [a, b]$ sådant att

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$$

Bent: Man använder Satsen om största och minsta värde kombinerat med Satsen om mellanliggande värden. Detaljerna i boken. $\square$



Medelvärdet hos en funktion:

Om f är integrerbar på $[a, b]$ så är

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

medelvärdet till f på $[a, b]$.

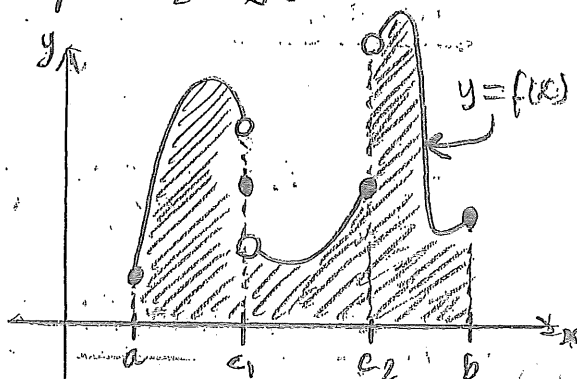
(Notera: Om f kont. så finns $c \in [a, b]$ s.a. $\bar{f} = f(c)$.)

Styckvis kontinuerliga funktioner:

(10)

Hittills: f kontinuerlig på $[a, b]$.

Betrakta f av typen



f är kontinuerlig på $[a, b]$ men området mellan $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$ och $x=b$ har en area.

Arean är summan av areorna ovanför

$[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$ och $[c_2, b]$ där f är kontinuerlig på resp. intervall (efter höjning av diskontinuiteter).

Definition: Låt $c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n$ och antag f definierad på $[c_0, c_n]$ utom möjligen i c_i , $i=0, 1, 2, \dots, n$.

f är styckvis kontinuerlig om det finns funktion F_i kontinuerlig på $[c_{i-1}, c_i]$ s.a.

$$f(x) = F_i'(x) \text{ på } (c_{i-1}, c_i).$$

Vi inför integralen av ett sånt f enligt

$$\int_{c_0}^{c_n} f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} F_i'(x) dx$$



⑪ Analysens huvudsats

Antiderivata: Om F uppfyller $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$
så är F antiderivatan till f .

Integraler kan beräknas m.h.a. antiderivatan!

Analysens huvudsats: Antag f kontinuerlig
på intervall I som innehåller a .

(I.) Låt F definieras på I enligt

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (*)$$

Då är F deriverbar på I och
 $F'(x) = f(x)$ där. Således gäller

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x),$$

d.v.s. integralen är en antiderivata.

(II.) Låt $G(x)$ vara vilken antiderivata till f
som helst på I , d.v.s. $G'(x) = f(x)$ på I .
Då gäller för alla $b \in I$ att

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

(den s.k. insättningsformeln).

Bevis: (I.) $F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \stackrel{(*)}{=} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) =$

$c \in [x, x+h]$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt \right) = \textcircled{12}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = [\text{Medelvärdessatzen för integraler}] =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((x+h) - x) f(c) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = [f \text{ kontinuerlig}] =$$

$$= f\left(\lim_{h \rightarrow 0} c\right) = f(x) \quad \text{ty } c \in [x, x+h] \quad (\text{insätningssatzen})$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad f(x) = G'(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + C \text{ på } I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_a^x f(t) dt = G(x) + C$$

$$0 = \int_a^a f(t) dt = G(a) + C \Leftrightarrow C = -G(a)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b f(t) dt &= G(b) + C = \\ &= G(b) + (-G(a)) = \\ &= G(b) - G(a) \end{aligned}$$



Notera: Insätningstecknet | definieras enligt

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \left(\underbrace{\int f(x) dx}_{\text{vilken anti-derivata till } f \text{ som helst}} \right) \Big|_a^b$$

vilken anti-derivata till f som helst

⑬

Enligt kedjeregeln gäller:

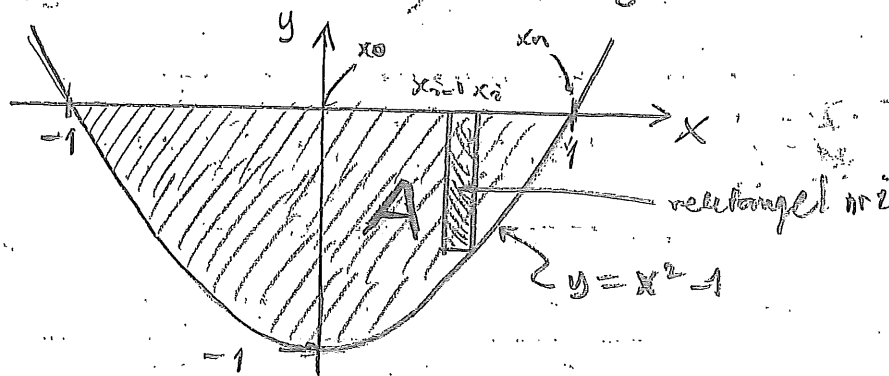
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt &= \frac{d}{dx} (F(g(x)) - F(h(x))) = \\ &= F'(g(x))g'(x) - F'(h(x))h'(x) \\ &= \boxed{f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)} \end{aligned}$$

Exempel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\ln x}^0 e^{3t} dt &= e^{3t} \Big|_{t=0} \frac{d}{dx} 0 - \\ &\quad - e^{3t} \Big|_{t=\ln x} \frac{d}{dx} \ln x = \\ &= e^0 \cdot 0 - e^{3 \ln x} \frac{1}{x} = \\ &= 0 - x^3 \frac{1}{x} = -x^2 \end{aligned}$$

Några jämna uppgifter

5.2:8 Arean av området ovanför $y = x^2 - 1$ och under $y = 0$.



Notera att: arean $A = 2 \cdot$ arean mellan $x=0$ och $x=1$
(p.g.a. symmetri)

Delar upp $[0, 1]$ i n lika breda delintervall:

Intervall $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ där

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\Delta x_i = \frac{1}{n} \quad \text{är rektangelbredden}$$

$$0 - (x_i^2 - 1) = 1 - x_i^2 \quad \text{är rektangelhöjden}$$

$$\Rightarrow A = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{i=1}^n \underbrace{(1 - x_i^2)}_{\text{höjd}} \underbrace{\Delta x_i}_{\text{bredd}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{i=1}^n \left(1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2\right) \frac{1}{n} =$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1\right) - \left(\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2\right) \right) =$$

(15)

$$\begin{aligned}
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right) = \\
 &= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \right) = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}
 \end{aligned}$$

5.3:2 $f(x) = x^2$ på $[0, 4]$, $n=4$,

delintervall med samma bredd,

beräkna under- och översummor

Partition: $P_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ($x_i = i$)

$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & \end{array}$

$$\begin{aligned}
 \bullet L(f, P_4) &= \sum_{i=1}^4 f(\ell_i) \Delta x_i = [\Delta x_i = 1] = \\
 &= \sum_{i=1}^4 \ell_i^2 = [\ell_i \in [x_{i-1}, x_i], \\
 &\quad f \text{ växande på } [0, 4] \\
 &\quad \Rightarrow \ell_i = x_{i-1}] = \\
 &= \sum_{i=1}^4 (i-1)^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = \\
 &= 1 + 4 + 9 = \underline{\underline{14}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet U(f, P_4) &= \sum_{i=1}^4 f(u_i) \Delta x_i = [\Delta x_i = 1] = \\
 &= \sum_{i=1}^4 u_i^2 = [u_i \in [x_{i-1}, x_i], \\
 &\quad f \text{ växande på } [0, 4] \\
 &\quad \Rightarrow u_i = x_i] = \\
 &= \sum_{i=1}^4 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \\
 &= 1 + 4 + 9 + 16 = \underline{\underline{30}}
 \end{aligned}$$

5.3:14 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \ln \left(1 + \frac{2i}{n} \right)$ som

(16)

bestäm integral.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \ln \left(1 + \frac{2i}{n} \right) = [\text{Antag } x_i = \frac{2i}{n}] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln(1+x_i) \cdot \frac{2}{n} = [\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{2i}{n} - \frac{2(i-1)}{n} = \frac{2}{n}] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \underbrace{\ln(1+x_i)}_{\substack{\text{ger integrerbar} \\ \ln(1+x)}} \cdot \Delta x_i =$$

$$= [\text{Gränser: } a = x_0 = \frac{2 \cdot 0}{n} = 0, b = x_n = \frac{2 \cdot n}{n} = 2] =$$

$$= \boxed{\int_0^2 \ln(1+x) dx}$$

5.4:18 Vet att $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$ (*)

Beräkna $\int_2^3 (x^2 - 4) dx$.

$$\int_2^3 (x^2 - 4) dx = [\text{Egenskap (c) sid. 8}] =$$

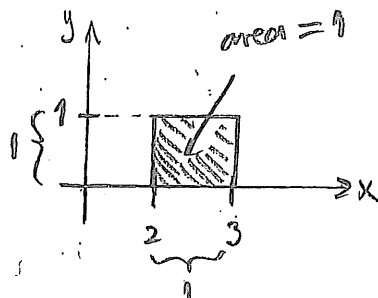
$$= \int_2^3 x^2 dx - 4 \int_2^3 1 dx = [\text{Egenskap (d)}] =$$

$$= \left(\int_2^0 x^2 dx + \int_0^3 x^2 dx \right) - 4 \int_2^3 1 dx = [\text{Eq. (b)}] =$$

$$= \left(- \int_0^2 x^2 dx + \int_0^3 x^2 dx \right) - 4 \int_2^3 1 dx \stackrel{(*)}{=} \quad$$

17

$$\begin{aligned}
 &= \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{3^3}{3} \right) - 4 \int_2^3 1 \, dx = \\
 &= \frac{27-8}{3} - 4 \int_2^3 1 \, dx = \\
 &= 9 - \frac{8}{3} - 4 \cdot 1 = \\
 &= 9 - \frac{8}{3} - 4 = 5 - \frac{8}{3} = \\
 &= \frac{15-8}{3} = \boxed{\frac{7}{3}}
 \end{aligned}$$



5.5:26 Area mellan $y=\sqrt{x}$ och $y=\frac{x}{2}$.

Skärningspunkter: $\sqrt{x} = y = \frac{x}{2}$

$$x = \left(\frac{x}{2} \right)^2$$

$$x = \frac{1}{4}x^2$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$$x=0 \text{ eller } x=4$$

(Kontroll: $\sqrt{0} = 0 = \frac{0}{2}$, $\sqrt{4} = 2 = \frac{4}{2}$, ok)

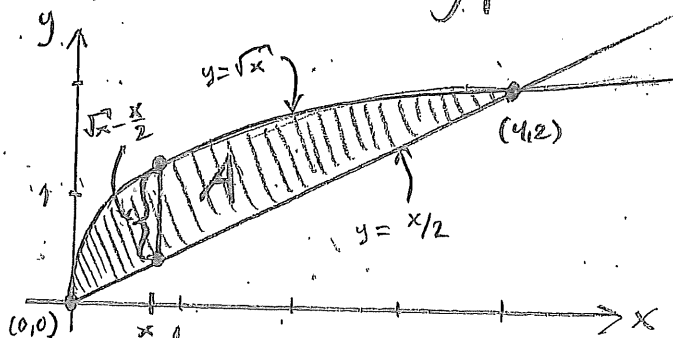
$\Rightarrow (0,0)$ och $(4,2)$ skärningspunkter

Area:

$$A = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^4 x^{1/2} dx - \frac{1}{2} \int_0^4 x dx =$$

$$= \left[\frac{d}{dx} x^{3/2} = \frac{3}{2} x^{1/2}, \frac{d}{dx} x^2 = 2x \right] =$$



$$\begin{aligned}
&= \int_0^4 \underbrace{\frac{2}{3} \frac{d}{dx} x^{3/2}}_{=x^{1/2}} dx - \frac{1}{2} \int_0^4 \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d}{dx} x^2}_{=x} dx = \quad (18) \\
&= \frac{2}{3} \int_0^4 \frac{d}{dx} x^{3/2} dx - \frac{1}{4} \int_0^4 \frac{d}{dx} x^2 dx = \\
&= [\text{Analytisk huvudsats}] = \frac{2}{3} (x^{3/2}) \Big|_0^4 - \frac{1}{4} (x^2) \Big|_0^4 = \\
&= \frac{2}{3} (4^{3/2} - 0^{3/2}) - \frac{1}{4} (4^2 - 0^2) = \\
&= \frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{1}{4} \cdot 16 = \frac{16-12}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.5:44 \quad \frac{d}{d\theta} \int_{\sin \theta}^{\cos \theta} \frac{1}{1-x^2} dx &= \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \Big|_{x=\cos \theta} \frac{d}{d\theta} \cos \theta - \\
&\quad - \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \Big|_{x=\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta = \\
&= \frac{1}{1-\cos^2 \theta} (-\sin \theta) - \frac{1}{1-\sin^2 \theta} \cos \theta = \\
&= -\frac{\sin \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} = \\
&= \boxed{-\left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \right)}
\end{aligned}$$

Se även RÖ 5&6 HT09 där jag löst bl.a.

5.2:6, 5.2:18, 5.3:6, 5.3:12,

5.4:15&16, 5.4:30, 5.4:34, 5.5:28, 5.5:46

Lösningar till dessa återfinns också nedan.

(19)

5.2: 6 Beräkna arean under $y=x^2+1$, över $y=0$, och från $x=0$ till $x=a$ ($a>0$).

Lösning: Dela in $[0, a]$ i n delintervall.

Intervalllängd: $\frac{a-0}{n} = \frac{a}{n}$

$$\Rightarrow x_0 = 0, x_1 = \frac{a}{n}, x_2 = \frac{2a}{n}, \dots, x_n = \frac{na}{n} = a$$

d.v.s. $x_i = \frac{ia}{n}, i=0, 1, 2, \dots, n.$

Detta ger summan

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + 1)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{ia}{n} \right)^2 + 1 \right] \frac{a}{n} =$$

$$= \left(\frac{a}{n} \right)^3 \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n 1 =$$

$$= \left[\text{Formel } \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] =$$

$$= \left(\frac{a}{n} \right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{a}{n} n =$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} a^3 + a$$

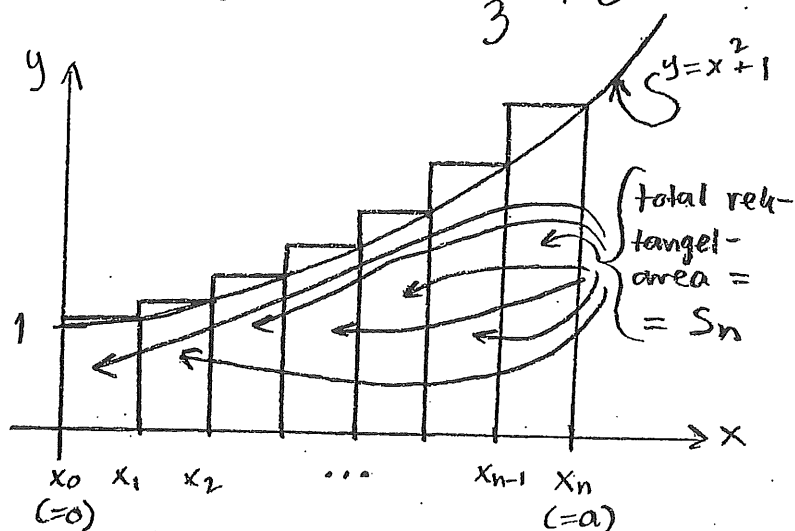
Detta ger arean

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} a^3 + a \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) a^3 + a \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (1+0) \cdot (2+0) \cdot a^3 + a = \frac{a^3}{3} + a \quad (20)$$

Illustration steg n:



5.2: 18 Tolkia $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{2n+3i}{n^2}$ och
beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Lösning: $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{2n+3i}{n^2} = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$

för något f och något intervall $[a, b]$.

Vet att om intervall har samma längd

så måste $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{2n+3i}{n^2} = \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{b-a}{n}$$

Medt. m. n : $\sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{3i}{n}\right) = (b-a) \sum_{i=1}^n f(x_i)$

Det finns flera tolkningsmöjligheter. Enklast
är att välja $a=0$, $b=1 \Rightarrow [a, b] = [0, 1]$ och

$$\sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{3i}{n}\right) = \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

② Vi vet att $x_0 = a = 0$, $x_n = b = 1$, så

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

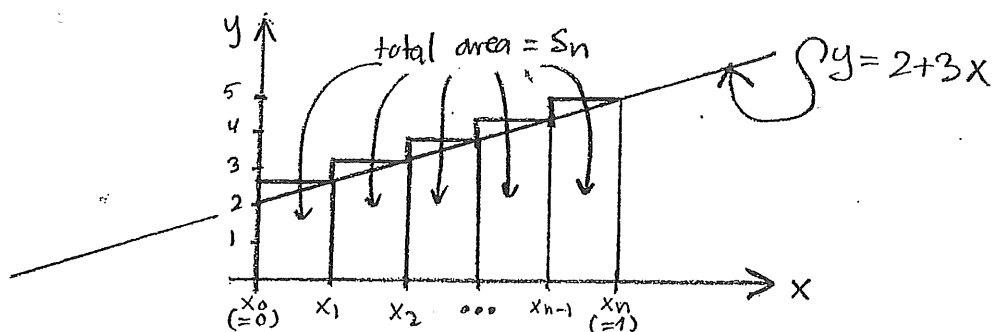
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (2 + 3x_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

d.v.s. $f(x_i) = 2 + 3x_i$

Vi väljer $f(x) = 2 + 3x$, $x \in [0, 1]$.

S_n tolkas då som summan av n lika breda rektanglar som approximerar arean A under $y = 2 + 3x$, över $y = 0$, och mellan $x = 0$ och $x = 1$.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2n + 3i}{n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{3}{n^2} \sum_{i=1}^n i \right) = \\ &= \left[\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} \cdot n + \frac{3}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = 2 + \frac{3}{2}(1+0) = \frac{7}{2} \end{aligned}$$



5.3:6 $f(x) = \cos x$ på $[0, 2\pi]$. Bestäm

(22)

$L(f, P_n)$ & $U(f, P_n)$ om partition i fyra delintervall av samma längd.

Lösning: Partition $P_4 = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix}$

Undersumman använder minsta värdet på varje intervall:

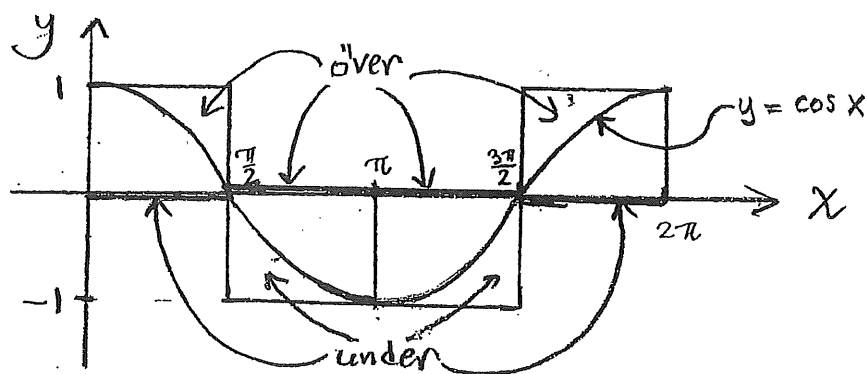
$$L(f, P_4) = \sum_{i=1}^4 f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^4 \cos \xi_i \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\begin{matrix} \text{minst på} \\ [0, \frac{\pi}{2}] \end{matrix} + \begin{matrix} \text{minst på} \\ [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{matrix} + \begin{matrix} \text{minst på} \\ [\pi, \frac{3\pi}{2}] \end{matrix} + \begin{matrix} \text{minst på} \\ [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{matrix} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} (0 + (-1) + (-1) + 0) = -\pi$$

Översumman tar istället största värdet:

$$U(f, P_4) = \frac{\pi}{2} (1 + 0 + 0 + 1) = \pi$$



5.3:12 Uttryck gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i-1}{n}}$

som en bestämd integral.

Lösning: Vi vill tolka $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i-1}{n}}$ som en

Riemannsumma $R(f, P_n, C)$, $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

(23)

d.v.s. $R(f, P_n, C) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i-1}{n}}$

Här gäller $P_n = \{x_0, \dots, x_n\}$, $c_1 \in [x_0, x_1], \dots, c_n \in [x_{n-1}, x_n]$

Antag lika långa intervall över $[a, b]$. Då fås

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \text{ och d\u00e4rmed}$$

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i-1}{n}}$$

mult. m. n : $(b-a) \sum_{i=1}^n f(c_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i-1}{n}} \quad (*)$

H\u00e4r har vi $c_i \in [x_{i-1}, x_i] = \left[(b-a) \frac{i-1}{n} + a, (b-a) \frac{i}{n} + a \right]$

ty $x_i = (b-a) \frac{i}{n} + a$ ($x_0 = a, x_1 = \frac{b-a}{n} + a, \dots, x_n = b$)

V\u00e4lj $a=0, b=1$. D\u00e5 blir $(*)$

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i-1}{n}}, \quad (**)$$

$$c_i \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$$

V\u00e4lj $c_i = \frac{i-1}{n} \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] = [x_{i-1}, x_i]$.

$$(**) \Rightarrow \sum_{i=1}^n f(c_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{c_i}$$

d.v.s. $f(c_i) = \sqrt{c_i}$ fungerar ($f(x) = \sqrt{x}$)

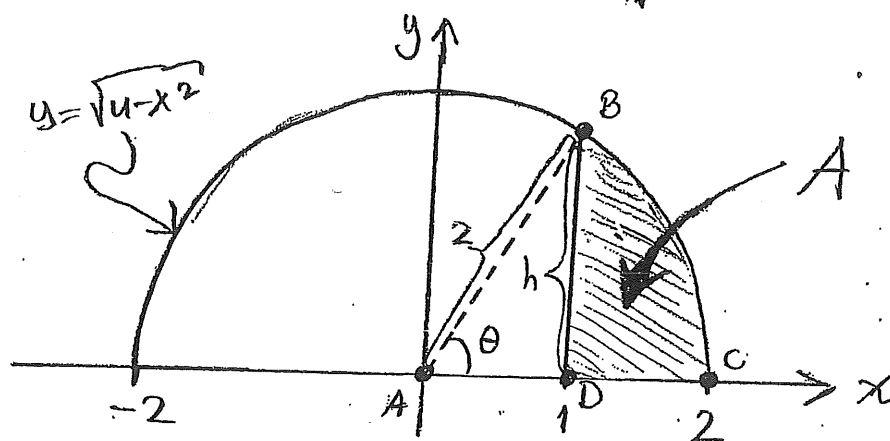
Vi g\u00f6r d\u00e5r f\u00f6ljningen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i-1}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx$$

5.4:16

Beräkna $\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$ och tolka ⁽²⁴⁾
som area.

Lösning: $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. För $y=f(x)$ har
vi alltså $y = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow y^2 = 4-x^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2^2$, d.v.s. f 's graf
är en halvcirkel med radian 2 som
ligger i det övre xy -planet.



Vi söker area $A = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$,
streckat område i figuren.

Vi ser att

$A =$ area cirkelsektor ABC —
— area triangel ABD

Triangelns höjd h ges av Pythagoras:

$$1^2 + h^2 = 2^2 \Leftrightarrow h^2 = 3 \Leftrightarrow h = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{Triangelns area} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

②5 Cirkelsektorns vinkel θ ges av

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow [\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]] \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

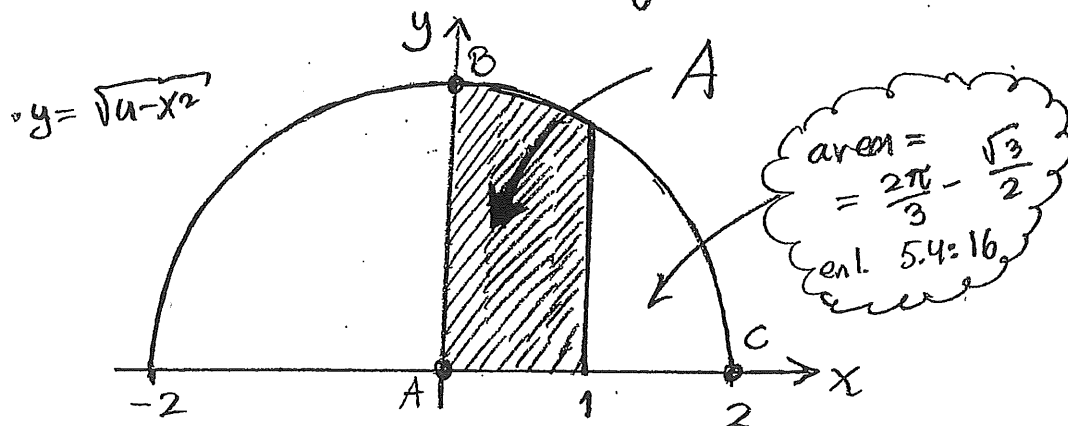
Detta ger

$$\text{Cirkelsektorarea} = \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi} = 4\pi \cdot \frac{\pi/3}{2\pi} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\approx 1.23)$$

5.4:15 Beräkna $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$ och tolka
som area.

Lösning: Vi har samma funktion men
annat integrationsområde jmf. m. 5.4:16:



Vi söker $A = \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = [\text{integrationsregel}]$

$$= \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx - \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

(5.4:16)

$$= \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx - \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ är arean av kvartscirkelskivan
ABC i figuren med area $\frac{1}{4} \pi \cdot 2^2 = \pi$

Alltså måste gälla att arean i figuren är ⁽²⁶⁾

$$A = \pi - \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\approx 1.91)$$

5.4:30 Bestäm medelvärdet av funktionen
 $k(x) = x^2$ över $[0, 3]$.

Lösning: Medelvärdet $\bar{k}$ ges av

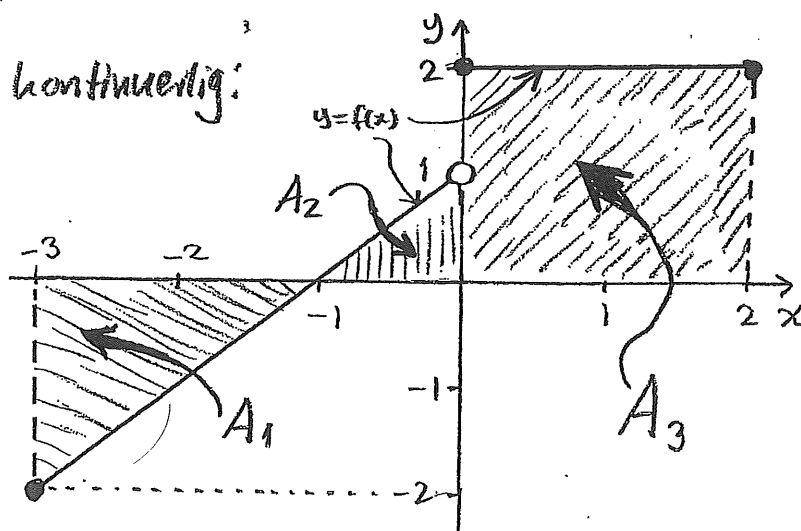
$$\begin{aligned} \bar{k} &= \frac{1}{3-0} \int_0^3 k(x) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 x^2 dx = \left[\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3} \right] = \\ &= \frac{1}{3} \frac{3^3}{3} = \frac{3^3}{3^2} = 3 \end{aligned}$$

Visas på s. 302 i
upplaga 7 (s. 288
i upplaga 6)

5.4:34 Beräkna $\int_{-3}^2 f(x) dx$ för $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$

Lösning: f styckvis kontinuerlig:

Vi räknar
 A_1, A_2, A_3
alla som positiva



Vi ser att $\int_{-3}^2 f(x) dx$ är följande:

$$\int_{-3}^2 f(x) dx = -A_1 + A_2 + A_3 =$$

(27)

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 =$$

$$= -2 + \frac{1}{2} + 4 = \frac{5}{2}$$

5.5:28 Bestäm arean av området R definierat över $y=|x|$ och under $y=12-x^2$.

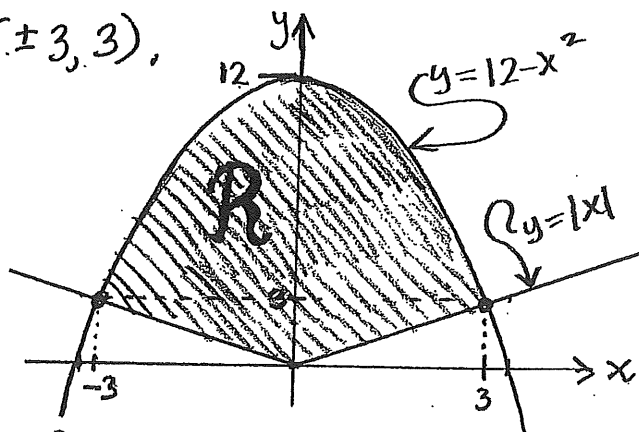
Lösning: Kurvorna $y=|x|$ och $y=12-x^2$ skär varandra där

$$|x| = 12 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 12 - x^2, & x < 0 \\ x = 12 - x^2, & x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 12 = 0, & x < 0 \\ x^2 + x - 12 = 0, & x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} & \text{om } x < 0 \\ x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} & \text{om } x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} & \text{om } x < 0 \\ x = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} & \text{om } x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 & \text{om } x < 0 \\ x = 3 & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$$

d.v.s. skärningspunkter $(\pm 3, 3)$.



Vi ser att:

$$\begin{aligned} \text{area } R &= \int_{-3}^3 (12 - x^2) dx - \int_{-3}^3 |x| dx = [\text{jämna integrander}] = \\ &= 2 \int_0^3 (12 - x^2 - x) dx = 2 \left(12x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^3 = \\ &= 2 \left(12 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 \right) - \left(12 \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \right) = \\ &= 2 \left(36 - 9 - \frac{1}{2} \cdot 9 \right) = 72 - 18 - 9 = 45 \end{aligned}$$

5.5:46 Beräkna $H'(2)$ om $H(x) = 3x \int_4^{x^2} e^{-\sqrt{t}} dt$

Lösning: $H(x) = 3x \cdot \int_4^{x^2} e^{-\sqrt{t}} dt$

$$\Rightarrow H'(x) = 3 \int_4^{x^2} e^{-\sqrt{t}} dt + 3x \frac{d}{dx} \int_4^{x^2} e^{-\sqrt{t}} dt =$$

$$= 3 \int_4^{x^2} e^{-\sqrt{t}} dt + 3x e^{-\sqrt{x^2}} \frac{d}{dx}(x^2) =$$

$$= 3 \int_4^{x^2} e^{-\sqrt{t}} dt + 3x e^{-|x|} \cdot 2x =$$

$$= 3 \int_4^{x^2} e^{-\sqrt{t}} dt + 6x^2 e^{-|x|}$$

$$\Rightarrow H'(2) = 3 \int_4^4 e^{-\sqrt{t}} dt + 6 \cdot 4 e^{-|2|} =$$

$$= 0 + 24e^{-2} = 24/e^2$$