1

Föreläsning 9

Generaliserade integraler

- Hittills: Bestämda integraler av kontinuerliga funktioner över slutna ändliga intervall
- Nu: Vi kommer titta på två nya möjligheter:
  (i) Integrera över oändligt intervall.
  (ii) Funktionen är obegränsad i minst en av ändpunkterna.
- (i) kallas Generaliserade integraler av Typ I
- (ii) " " " " II

Definition: (Generaliserad integral av Typ I)

Om f kontinuerlig på $[a, \infty)$ så är den generaliserade integralen av f över $[a, \infty)$ följande gränsvärde av bestämd integral:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

Om gränsvärdet finns (d.v.s. ändligt) så konvergerar integralen, i annat fall så divergerar den. Om gränsvärdet är ∞ ($-\infty$) så har vi divergens mot ∞ (resp. $-\infty$)

(motsvarande för generaliserade integraler på $(-\infty, b]$.)

Notera: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$, $c \in \mathbb{R}$

(Dubbel-sidigt) (vanligen sätts $c = 0$.)

Exempel: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^R =$

$= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = \lim_{R\to\infty}(1 - 1/R) =$

$= 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$ (konvergerar) $\square$

Definition: (Generaliserad integral av Typ II)

Om f kontinuerlig på $(a,b]$ och möjligen obegränsad nära a så är den generaliserade integralen
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a_+} \int_c^b f(x)\,dx$$

Den generaliserade integralen konvergerar (d.v.s. ändligt gränsvärde), divergerar, divergerar mot ∞ eller divergerar mot $-\infty$.

(Motsvarande för generaliserade integraler där f kont. på $[a,b)$ och möjligen obegränsad nära b, då låter man $c \to b_-$.)

Exempel: Beräkna $\int_0^1 \ln x\,dx$ (eller visa divergens)

Lösning: $\int_0^1 \ln x\,dx = [\ln x \to -\infty$ då $x \to 0_+] =$

$= \lim_{c\to 0_+} \int_c^1 \underbrace{\ln x}_{\downarrow}\, \underbrace{dx}_{\uparrow} =$

③

$$= \left[\begin{cases} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \end{cases}, \begin{cases} dv = dx \\ v = x \end{cases} \right] =$$

$$= \lim_{c\to 0+} \left((\ln x \cdot x)\Big|_c^1 - \int_c^1 x \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= \lim_{c\to 0+} \left((\underbrace{\ln 1}_{=0} \cdot 1 - \ln c \cdot c) - \int_c^1 1\, dx \right) =$$

$$= \lim_{c\to 0+} \left(c\ln c - (1-c) \right) =$$

$$= \lim_{c\to 0+} c\ln c - 1 = [\text{Standardgränsvärde}] =$$

$$= 0 - 1 = \underline{\underline{-1}} \quad (\text{konvergerar}) \quad \square$$

<u>Sats:</u> (p-integraler) Om $0 < a < \infty$ så

(a) $\int_a^\infty x^{-p} dx \begin{cases} \text{konv. mot } \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1 \\ \text{div. mot } \infty, & p \leq 1 \end{cases}$

(b) $\int_0^a x^{-p} dx \begin{cases} \text{konv. mot } \frac{a^{1-p}}{1-p}, & p < 1 \\ \text{div. mot } \infty, & p \geq 1 \end{cases}$

<u>Jämförelsesatsen:</u> Låt $-\infty \leq a < b \leq \infty$ och antag f, g kontinuerliga på $[a,b]$ samt $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Då gäller:

- Om $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergerar så konvergerar $\int_a^b f(x)\,dx$ och $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
- Om $\int_a^b f(x)$ divergerar så divergerar $\int_a^b g(x)\,dx$

<u>Exempel:</u> Konvergerar $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$?

<u>Lösning:</u> "Generaliserad" integral av både Typ I & II. Dela upp i två integraler av varsin typ:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}}_{\substack{=I_1 \\ (\text{typ II})}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}}_{\substack{=I_2 \\ (\text{typ I})}}$$

- $x \in (0,1] \Rightarrow x^3 > 0 \Rightarrow x+x^3 > x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{x+x^3} > \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \lim_{c \to 0_+} \int_c^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{c \to 0_+} \left(2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_c^1 = 2$$

- $x \in [1,\infty) \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x+x^3 > x^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{x+x^3} > \sqrt{x^3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} < \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \lim_{R \to \infty} \int_1^R x^{-\frac{3}{2}} dx =$$

$$= \lim_{R \to \infty} \left(-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^R = \lim_{R \to \infty} \left(-2R^{-\frac{1}{2}} + 2\right)$$

$$= 0 + 2 = 2$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = 2 + 2 = 4 < \infty$$

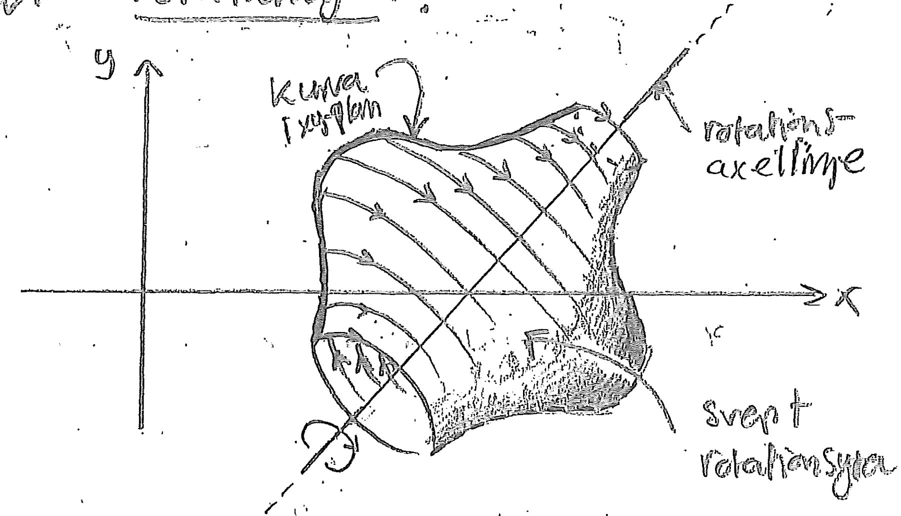
d.v.s. integralen <u>konvergerar</u>. $\square$

<u>Notera:</u> Man brukar ofta jämföra med just p-integraler.

5

Arean hos rotationsytor

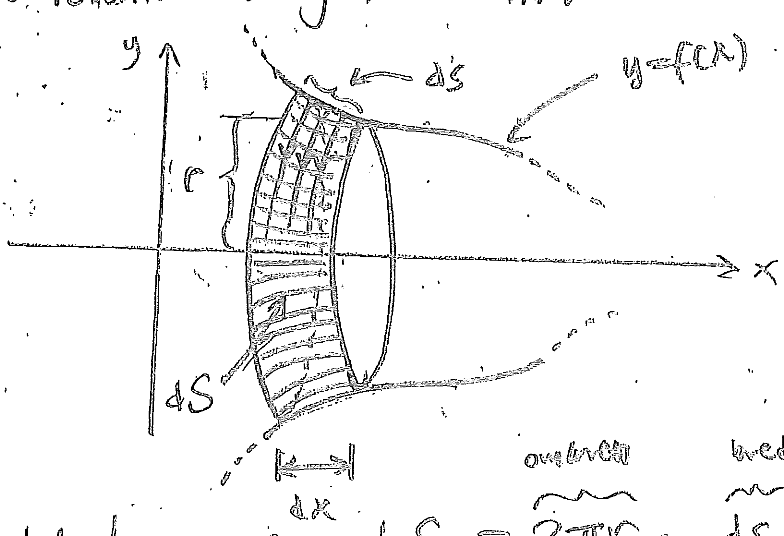
Låt en plan kurva roteras kring en axellinje i kurvans plan, då sveper man ut en rotationsyta.



Rotationskroppen ligger i ett 3D rum.

I översiktskursen lärde ni er uträkning av volym av rotationskroppen samt båglängd hos kurvar. Beräkning av rotationsytans area är en slags syntes av dessa båda tekniker.

Betrakta rotation kring x-axeln:



$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)dx^2} =$$
$$\boxed{ds = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

Ytelementet har area $dS = \overbrace{2\pi r}^{\text{omkrets}} \cdot \overbrace{ds}^{\text{bredd}} =$

$$= 2\pi |f(x)| \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

Summera alla dessa infinitesimala ytareor

$$\Rightarrow \boxed{S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx} \quad \circlearrowright x$$

blir den totala ytarean av en kurva $y=f(x)$ mellan $x=a$ och $x=b$ som roteras kring x-axeln. (f ska vara kont.)

Y' Arean hos rotationsyta som bildas när $y=f(x)$ mellan $x=a$ och $x=b$ roteras kring y-axeln ($r=|x|$ i detta fall):

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx} \quad \circlearrowright y$$

(Motsvarande formler om $x=g(y)$ mellan $y=c$ och $y=d$ roteras kring y-axeln ($r=g(y)$) resp. x-axeln ($r=|y|$).)

<u>Exempel:</u> Vilken ytarea har sfären med radien a?

<u>Lösning:</u> Sfären är en halvcirkel med radie a som roteras.

Halvcirkelns ekvation: $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in[-a,a]$

(Cirkelns ekvation: $x^2+y^2=a^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$)

7

Rotera denna kurva kring x-axeln.
Behöver y':

$$y' = \frac{d}{dx}\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x) =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\Rightarrow S = 2\pi\int_{-a}^{a} |y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{\frac{(a^2-x^2)+x^2}{a^2-x^2}}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{-a}^{a} a\,dx = 2\pi(ax)\Big|_{-a}^{a} =$$

$$= 2\pi(a^2-(-a^2)) = \underline{\underline{4\pi a^2}} \quad \square$$

Masscentrum

Fysiska kroppar har en total massa m beror på tätheten δ i varje punkt och på utsträckningen i rummet. Om $\delta(P)$ är tätheten i punkten P och dV är ett volymselement kring P så fås i allmänhet

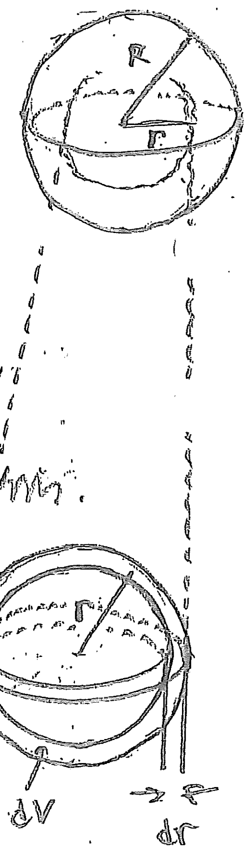
$$m = \int dm = \int \delta(P)\,dV$$

där dm är volymselementets massa.
($\delta = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$ per definition);

Geometrin hos problemet ger dV.

<u>Exempel:</u> Klotformad planet med radie R har täthet $\delta = \frac{\delta_0}{1+r^2}$ ($\delta(0)=\delta_0$)

där r avståndet till centrum.
Vad är planetmassan?



<u>Lösning:</u> $m = \int dm = \int \delta\, dV = \int \frac{\delta_0}{1+r^2}\, dV$

Vad är dV? Bestäms av geometrin.

<u>Här:</u> $\underbrace{dV}_{\text{volym av ett skal}} = \underbrace{4\pi r^2}_{\text{sfärarea}} \cdot \underbrace{dr}_{\text{sfärtjocklek}}$

$$\Rightarrow m = \int_0^R \frac{\delta_0}{1+r^2} 4\pi r^2\, dr =$$

$$= 4\pi\delta_0 \int_0^R \frac{r^2}{1+r^2}\, dr =$$

$$= 4\pi\delta_0 \int_0^R \frac{1+r^2-1}{1+r^2}\, dr =$$

$$= 4\pi\delta_0 \int_0^R \left(1 - \frac{1}{1+r^2}\right) dr =$$

$$= 4\pi\delta_0 \left(r - \arctan r\right)\Big|_0^R =$$

$$= 4\pi\delta_0 \left((R - \arctan R) - (0-0)\right) =$$

$$= \underline{\underline{4\pi\delta_0 (R - \arctan R)}}$$

□

(9) Placera punktmassor $m_1, m_2, \ldots, m_n$ i punkterna $x_1, x_2, \ldots, x_n$ utefter reella tallinjen.

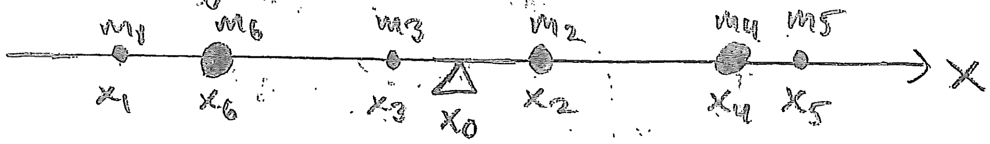
Momentet $M_{x=x_0}$ för en punktmassa m i punkten x kring x_0 är

$$M_{x=x_0} = m(x-x_0)$$

Då fås det totala momentet $M_{x=x_0}$ för n punktmassor enligt

$$M_{x=x_0} = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_0) m_j$$

Momentet mäter tendensen i tallinjesarmen att rotera kring $x=x_0$.



Masscentrum är den punkt $\bar{x}$ där tendensen att rotera är noll, d.v.s. $M_{x=\bar{x}} = 0$:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x}) m_j = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j - \bar{x} \sum_{j=1}^{n} m_j$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j m_j}{\sum_{j=1}^{n} m_j} = \frac{M_{x=0}}{m}$$

m total massa, $M_{x=0}$ totalt moment kring origo.

För kontinuerlig massfördelning mellan a och b:

$$M_{x=0} = \int x \, dm = \int_a^b x\, \delta(x)\,dx$$

$$m = \int dm = \int_a^b \delta(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ Masscentrum $\boxed{\bar{x} = \dfrac{M_{x=0}}{m} = \dfrac{\int_a^b x\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}}$

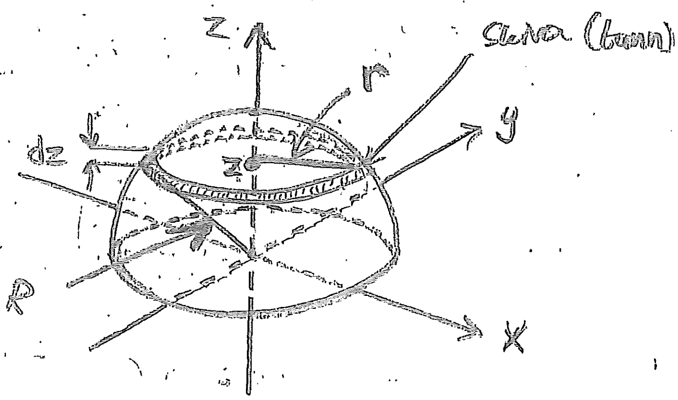
I 2D: Masscentrum: $(\bar{x}, \bar{y})$ där $\bar{x} = \dfrac{M_{x=0}}{m}$, $\bar{y} = \dfrac{M_{y=0}}{m}$

I 3D: Masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ där $\bar{x}, \bar{y}$ som ovan

och $\bar{z} = \dfrac{M_{z=0}}{m}$

Exempel: Hitta masscentrum för ett halvklot (en s.k. hemisfär, gr. ἡμισφαίριον) med radien R om tätheten på höjden z från basplanet är $\delta_0 z$.

Lösning: Skissa:



$$R^2 = r^2 + z^2$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{R^2 - z^2}$$

Kroppen är symmetrisk kring z-axeln så vi kan direkt säga $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Återstår $\bar{z}$, behöver m och $M_{z=0}$.

$$m = \int dm = \int \delta(z)\,dV = \text{[se figuren]}$$
$$= \int_0^R \underbrace{(\delta_0 z)}_{\delta(z)} \cdot \underbrace{\pi r^2}_{\text{skivans area}} \underbrace{dz}_{\text{skivans tjocklek}} =$$

$$= \int_0^R \delta_0 z \cdot \pi (R^2 - z^2)\,dz =$$

$$= \pi\delta_0 \int_0^R z(R^2 - z^2)\,dz =$$

$$= \pi\delta_0 \int_0^R (R^2 z - z^3)\,dz =$$

$$= \pi\delta_0 \left(\tfrac{1}{2}R^2 z^2 - \tfrac{1}{4} z^4\right)\Big|_0^R =$$

$$= \pi\delta_0 \left(\tfrac{1}{2}R^2 \cdot R^2 - \tfrac{1}{4}R^4\right) = \frac{\pi}{4}\delta_0 R^4$$

$$M_{z=0} = \int z\,dm = [\text{dm enligt ovan}] =$$

$$= \int_0^R z \cdot \left(\delta_0 z \cdot \pi (R^2 - z^2)\right) dz =$$

$$= \pi\delta_0 \int_0^R (R^2 z^2 - z^4)\,dz =$$

$$= \pi\delta_0 \left(\tfrac{1}{3}R^2 z^3 - \tfrac{1}{5} z^5\right)\Big|_0^R =$$

$$= \pi\delta_0 \left(\tfrac{1}{3}R^2 R^3 - \tfrac{1}{5}R^5\right) =$$

$$= \frac{5-3}{15}\pi\delta_0 R^5 = \frac{2\pi}{15}\delta_0 R^5$$

$$\Rightarrow \bar{z} = \frac{M_{z=0}}{m} = \frac{\frac{2\pi}{15}\delta_0 R^5}{\frac{\pi}{4}\delta_0 R^4} = \frac{2/15}{1/4} R = \frac{8R}{15}$$

$\boxed{\text{Masscentrum är på höjden } \frac{8R}{15} \text{ från basen.}}$ □

Antag att man har en platta som ligger mellan $x=a$ och $x=b$, $y=0$ och $y=f(x) \geq 0$ med täthet $\delta(x)$ i varje punkt (x,y) (d.v.s. täthet oberoende i y-led). Då blir massan

$$m = \int_a^b \delta(x) f(x)\, dx$$

och momenten kring 0

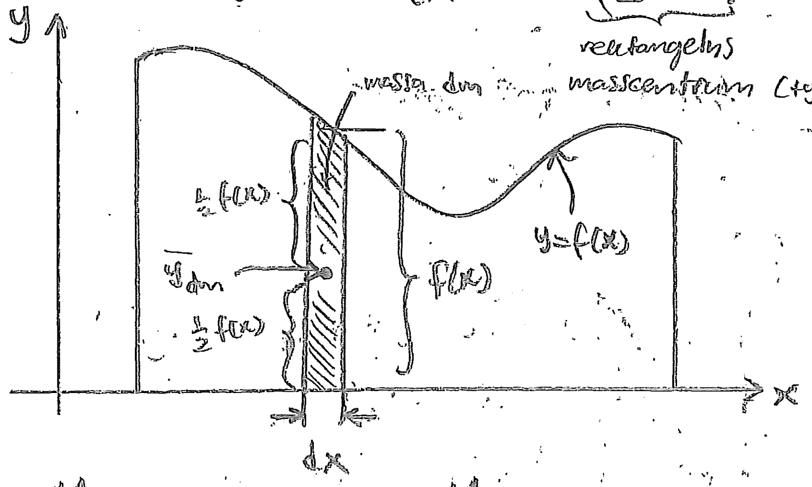
$$M_{x=0} = \int_a^b x\, \delta(x) f(x)\, dx$$

$$M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_a^b \delta(x) \left(f(x)\right)^2 dx$$

ty $dm = \underbrace{\delta(x)}_{\text{täthet}} \underbrace{f(x)\, dx}_{\text{area}}$

$$dM_{x=0} = x\, dm = x \overbrace{\delta(x) f(x)\, dx}^{\text{massa}}$$

$$dM_{y=0} = \bar{y}_{dm}\, dm = \underbrace{\left(\frac{1}{2} f(x)\right)}_{\text{rektangelns masscentrum (ty } \delta \text{ ober. av } y\text{)}} \underbrace{\delta(x) f(x)\, dx}_{\text{massa}}$$



$\bar{x} = \dfrac{M_{x=0}}{m}$ och $\bar{y} = \dfrac{M_{y=0}}{m}$ ger masscentrum $(\bar{x}, \bar{y})$.

Några jämna uppgifter

6.5:18 $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \left[\begin{cases} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{cases}, \begin{cases} x \to \infty \Leftrightarrow u \to \infty \\ x = e \Leftrightarrow u = 1 \end{cases} \right] =$

$$= \int_1^{\infty} \frac{du}{u^2} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{du}{u^2} =$$

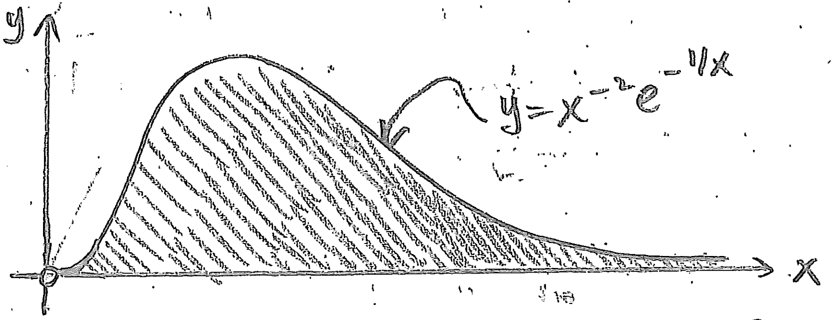
$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) =$$

$$= 1 - \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

(Integralen konvergerar.)

6.5:26 Arean hos området under $y = x^{-2}e^{-1/x}$, över x-axeln och till höger om y-axeln.

Lösning:



Arean: $\displaystyle A = \int_0^{\infty} x^{-2}e^{-1/x}\,dx = \underbrace{\int_0^1 x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}dx}_{=I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}dx}_{=I_2}$

I_1 är generaliserad av Typ II

I_2 " " " Typ I

$$I_1 = \int_0^1 x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}dx = \lim_{c\to 0_+} \int_c^1 x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}dx =$$

$$= \left[\begin{cases} u = -\frac{1}{x} \\ du = \frac{dx}{x^2} = x^{-2}dx \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \Leftrightarrow u = -1 \\ x = c \Leftrightarrow u = -\frac{1}{c} \end{cases} \right] =$$

$$= \lim_{c \to 0+} \int_{-1/c}^{-1} e^u \, du = \lim_{c \to 0+} (e^u)\Big|_{-1/c}^{-1} =$$ (14)

$$= \lim_{c \to 0+} (e^{-1} - e^{-1/c}) = e^{-1} - 0 = e^{-1}$$

$$I_2 = \int_1^\infty x^{-2} e^{-1/x} = \lim_{R \to \infty} \int_1^R x^{-2} e^{-1/x} \, dx =$$

$$= \left[\begin{cases} u = -\frac{1}{x} \\ du = x^{-2} dx \end{cases}, \begin{cases} x = R \Leftrightarrow u = -1/R \\ x = 1 \Leftrightarrow u = -1 \end{cases} \right] =$$

$$= \lim_{R \to \infty} \int_{-1}^{-1/R} e^u \, du = \lim_{R \to \infty} (e^u)\Big|_{-1}^{-1/R} =$$

$$= \lim_{R \to \infty} (e^{-1/R} - e^{-1}) = e^0 - e^{-1} = 1 - e^{-1}$$

$$\Rightarrow A = I_1 + I_2 = e^{-1} + (1 - e^{-1}) = \underline{\underline{1}}$$

7.3:26

Arean hos rotationsytan som bildas vid rotation av $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$, $x \in [1,4]$, kring x-axeln

<u>Lösning:</u> Arean ges av

$$A = \int_1^4 \underbrace{2\pi|y|}_{\text{bandomkrets}} \underbrace{\sqrt{1+(y')^2}\, dx}_{\text{bandbredd}}$$

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}\right)^2 =$$

$$= 1 + \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow A = 2\pi \int_1^4 \left(\frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right) dx =$$

$$= 2\pi \int_1^4 \left(\frac{x^5}{48} + \frac{x}{12} + \frac{x}{4} + \frac{1}{x^3}\right) dx =$$

$\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$$= 2\pi \int_1^4 \left(\frac{x^5}{48} + \frac{x}{3} + \frac{1}{x^3}\right) dx =$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^6}{288} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= 2\pi\left(\left(\frac{4^6}{288} + \frac{4^2}{6} - \frac{1}{2\cdot 4^2}\right) - \left(\frac{1}{288} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{4096-1}{288} + \frac{16-1}{6} - \frac{1}{32} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{4095}{288} + \frac{15}{6} - \frac{1}{32} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{4095}{144} + 5 - \frac{1}{16} + 1\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{4095}{144} + 6 - \frac{1}{16}\right) = \pi\,\frac{4095 + 864 - 9}{144} =$$

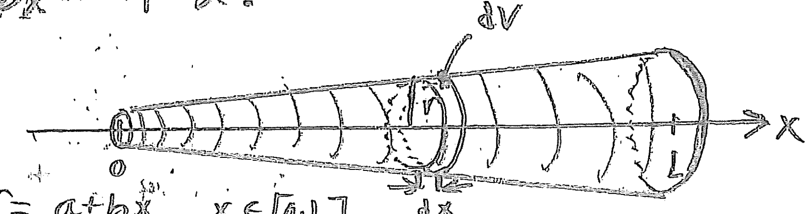
$$= \pi\,\frac{4950}{144} = \frac{2475\pi}{72} = \frac{825\cdot 3\pi}{24\cdot 3} =$$

$$= \frac{825\pi}{24} = \frac{(750+75)\pi}{8\cdot 3} = \frac{(250+25)\pi}{8} =$$

$$= \boxed{\frac{275\pi}{8}} \quad (\approx 108)$$

7.4:2 Massa och masscentrum för stållina längs x-axel mellan $x=0$ och $x=L$ där tätheten konstant men tvärsnittsradien är $a+bx$ i x.

Lösning: Skiss:



Skivan i skivan har volym:

$$dV = \pi r^2 dx = \pi (a+bx)^2 dx$$

$$\Rightarrow \quad dm = \delta_0 dV = \delta_0 \pi (a+bx)^2 dx$$

Total massa: $m = \int dm = \int_0^L \delta_0 \pi (a+bx)^2 dx =$

$$= \delta_0 \pi \left(\frac{1}{3}(a+bx)^3 \frac{1}{b} \right) \Big|_0^L =$$

$$= \delta_0 \pi \frac{1}{3b} \left((a+bL)^3 - a^3 \right) =$$

$$= \delta_0 \pi \frac{1}{3b} \left(a^3 + 3a^2 bL + 3ab^2 L^2 + b^3 L^3 - a^3 \right) =$$

$$= \boxed{\delta_0 \pi \left(a^2 L + abL^2 + \frac{1}{3} b^2 L^3 \right)}$$

Momentet: $M_{x=0} = \int dM_{x=0} = \int x\, dm =$

$$= \delta_0 \pi \int_0^L x (a+bx)^2 dx =$$

$$= \delta_0 \pi \int_0^L (a^2 x + 2abx^2 + b^2 x^3) dx =$$

$$= \delta_0 \pi \left(\frac{1}{2} a^2 x^2 + \frac{2}{3} abx^3 + \frac{1}{4} b^2 x^4 \right) \Big|_0^L =$$

$$= \delta_0 \pi \left(\frac{1}{2} a^2 L^2 + \frac{2}{3} abL^3 + \frac{1}{4} b^2 L^4 \right)$$

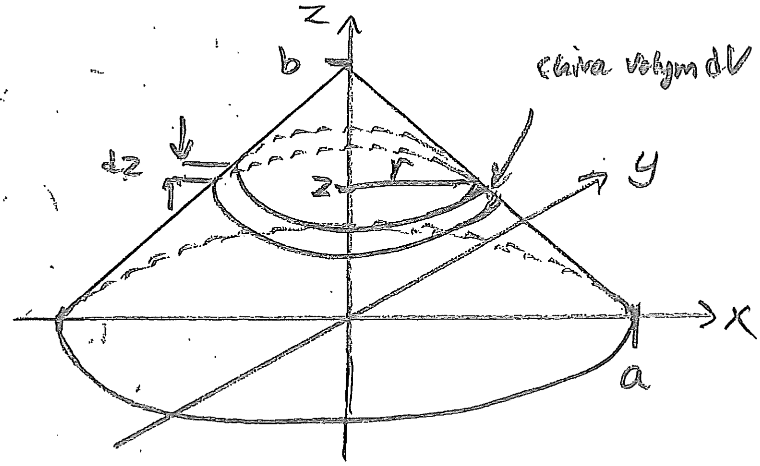
$$\Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\delta_0 \pi \left(\frac{1}{2} a^2 L^2 + \frac{2}{3} abL^3 + \frac{1}{4} b^2 L^4 \right)}{\delta_0 \pi \left(a^2 L + abL^2 + \frac{1}{3} b^2 L^3 \right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} a^2 L + \frac{2}{3} abL^2 + \frac{1}{4} b^2 L^3}{a^2 + abL + \frac{1}{3} b^2 L^2} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{4} \frac{6a^2 + 8abL + 3b^2 L^2}{3a^2 + 3abL + b^2 L^2} L}$$

⑰ **7.4:12** Massa och masscentrum hos kon med basradie a och höjd b om tätheten i P är kz där z avstånd mellan P och bas.

Lösning: Skiss:



Notera att p.g.a. likformighet gäller:

$$\frac{b}{a} = \frac{b-z}{r} \Leftrightarrow r = \frac{b-z}{b/a} = \frac{a}{b}(b-z) = a\left(1-\frac{z}{b}\right)$$

Skivans volym: $dV = \pi r^2 \cdot dz = \pi a^2\left(1-\frac{z}{b}\right)^2 dz$

" massa: $dm = \delta\, dV = kz \cdot \pi a^2\left(1-\frac{z}{b}\right)^2 dz$

Total massa:
$$m = \int dm = \int_0^b kz\pi a^2\left(1-\frac{z}{b}\right)^2 dz = \pi k a^2 \int_0^b z\left(1-\frac{z}{b}\right)^2 dz =$$
$$= \pi k a^2 \int_0^b \left(z - \frac{2}{b}z^2 + \frac{1}{b^2}z^3\right) dz$$
$$= \pi k a^2 \left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{2}{3b}z^3 + \frac{1}{4b^2}z^4\right)\Big|_0^b =$$
$$= \pi k a^2\left(\frac{1}{2}b^2 - \frac{2}{3}b^2 + \frac{1}{4}b^2\right) =$$
$$= \pi k a^2 \frac{6-8+3}{12} b^2 = \boxed{\frac{\pi}{12} k a^2 b^2}$$

Moment kring $z=0$:

$$M_{z=0} = \int dM_{z=0} = \int z\,dm =$$
$$= \int_0^b z\left(kz \cdot \pi a^2 (1-\tfrac{z}{b})^2\right) dz =$$
$$= \pi k a^2 \int_0^b z^2 (1-\tfrac{z}{b})^2 dz = [\text{se ovan}] =$$
$$= \pi k a^2 \int_0^b \left(z^2 - \frac{2}{b}z^3 + \frac{1}{b^2}z^4\right) dz =$$
$$= \pi k a^2 \left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2b}z^4 + \frac{1}{5b^2}z^5\right)\Big|_0^b =$$
$$= \pi k a^2 \left(\frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{2}b^3 + \frac{1}{5}b^3\right) =$$
$$= \pi k a^2 \frac{10-15+6}{30} b^3 =$$
$$= \frac{\pi}{30} k a^2 b^3$$

Masscentrum:

$$\bar{z} = \frac{M_{z=0}}{m} = \frac{\frac{\pi}{30} k a^2 b^3}{\frac{\pi}{12} k a^2 b^2} = \frac{12}{30} b = \frac{2b}{5}$$

d.v.s. $\boxed{\text{avstånd } 2b/5 \text{ från basen.}}$

Se även RÖ 6–8 HT09 där jag löst bl.a.

6.5:20, 6.5:34, 7.3:20,

7.3:28, 7.4:6, 7.4:14

Lösningar till dessa återfinns också nedan.

(19)

6.5:20 Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx$.

Lösning: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^4}\,dx}_{=I_1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx}_{=I_2}$

Låt oss titta på I_2 först.

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{x\,dx}{1+(x^2)^2} = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^{R^2} \frac{\frac{1}{2}du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} \int_0^{R^2} \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} (\arctan u)\Big|_0^{R^2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{R\to\infty} \arctan R^2 - 0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

På samma sätt fås:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^4}\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^0 \frac{x\,dx}{1+(x^2)^2} = \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{R\to-\infty} (\arctan u)\Big|_{R^2}^{0} = \frac{1}{2}\left(0 - \lim_{R\to-\infty} \arctan R^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

6.5:34 Konvergerar eller divergerar $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$?

Lösning: Vi har att $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}$ är obegränsad nära $x=0$. Vi delar upp intervallet i delintervallen $(0,1]$, $[1,\infty)$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}}_{=I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}}_{=I_2}$$

I_1: På $(0,1]$ gäller att

$$\sqrt{x}+x^2 > \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} < \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$$

Så att $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} < \int_0^1 x^{-1/2}\,dx = \frac{1^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} = 2$

I_2: På $[1,\infty)$ gäller att

$$\sqrt{x}+x^2 > x^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} < \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

Så att $I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} < \int_1^\infty x^{-2}\,dx = \frac{1^{1-2}}{2-1} = 1$

Då gäller

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} = I_1 + I_2 < 2+1 = 3 < \infty$$

Så att integralen konvergerar.

7.3:20 Beräkna arean hos rotationsytan som bildas när man roterar $y=x^2$, $x\in[0,2]$, kring y-axeln.

Lösning: Vi har $f(x) = x^2$, $a=0$, $b=2$. Formeln

$$S = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

(21) för rotationsytans area vid rotation kring x-axeln ger då i vårt fall (med $f'(x) = 2x$)

$$S = 2\pi \int_0^2 x \sqrt{1+(2x)^2}\, dx =$$

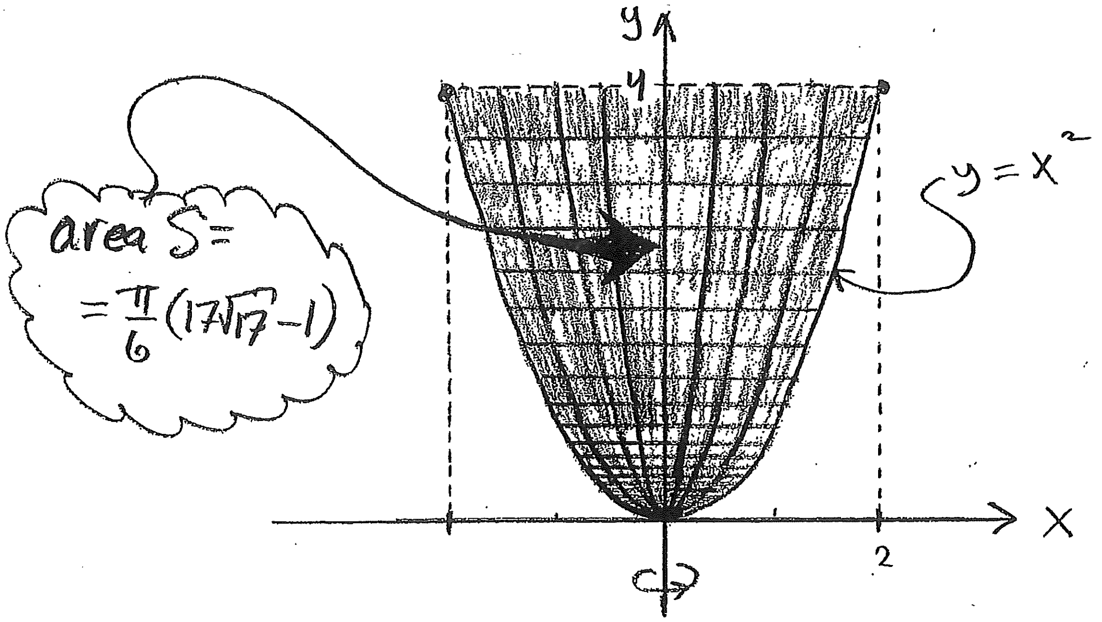
$$= 2\pi \int_0^2 x \sqrt{1+4x^2}\, dx =$$

$$= \left[\begin{cases} u = 1+4x^2 \\ du = 8x\,dx \end{cases}, \begin{cases} x=2 \Rightarrow u=17 \\ x=0 \Rightarrow u=1 \end{cases} \right] =$$

$$= 2\pi \int_1^{17} \sqrt{u}\, \frac{1}{8}\, du = \frac{\pi}{4} \int_1^{17} u^{1/2}\, du =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right) \Big|_1^{17} = \frac{\pi}{6} \left(17^{3/2} - 1^{3/2} \right) =$$

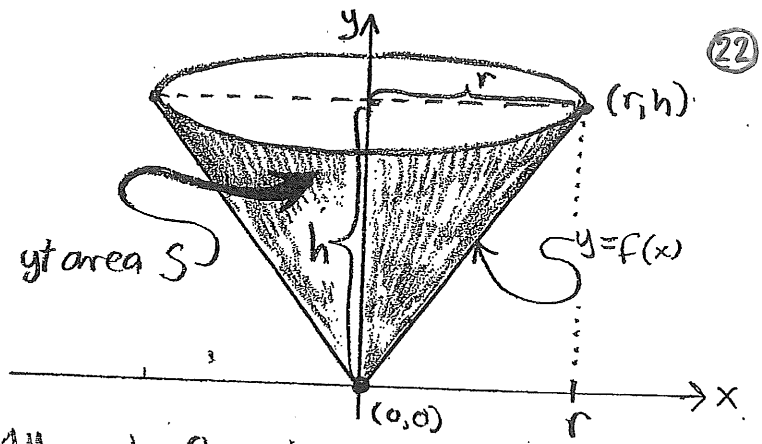
$$= \frac{\pi}{6} \left(17\sqrt{17} - 1 \right)$$



7.3:28 Bestäm arean hos den krökta ytan av en kon med basradie r och höjd h genom att rotera linjesegmentet mellan $(0,0)$ och (r,h)

kring y-axeln.

Lösning:



Linjesegmentet $y=f(x)$ mellan $(0,0)$ och (r,h) har lutningen $f'(x)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{h-0}{r-0}=\dfrac{h}{r}$

Detta ger rotationsytarean

$$S=2\pi\int_0^r |x|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=$$

$$=2\pi\int_0^r x\sqrt{1+(h/r)^2}\,dx=$$

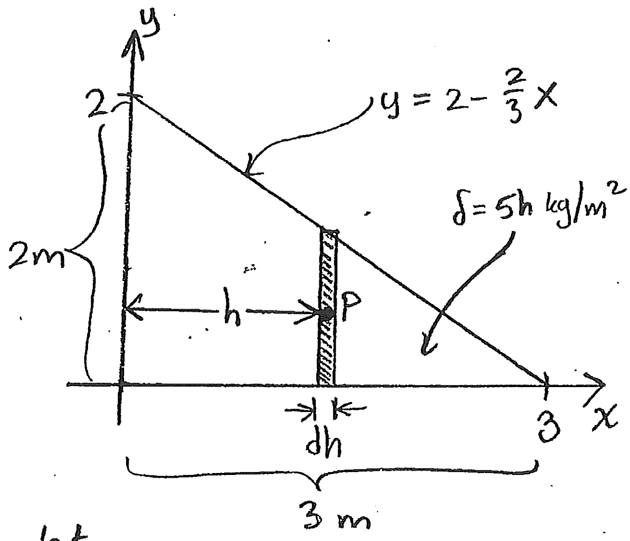
$$=2\pi\sqrt{1+(h/r)^2}\int_0^r x\,dx=2\pi\sqrt{1+(h/r)^2}\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^r=$$

$$=\pi\sqrt{1+(h/r)^2}\,r^2=\pi r\sqrt{r^2\left(1+\left(\tfrac{h}{r}\right)^2\right)}=$$

$$=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$$

7.4:6 Bestäm massa och masscentrum för en rätvinklig triangelformad platta med kateterna 2 m och 3 m om areamasstätheten i P är $5h$ kg/m^2 om h är avståndet mellan P och den kortare kateten.

(23)



Lösning: Inför koordinatsystem enligt figuren:

Hypotenusan beskrivs med formeln $y=2-\frac{2}{3}x$.

Arean hos det vertikala bandet i figuren är då

$$dA = \underbrace{\left(2-\frac{2}{3}h\right)}_{\text{höjd}}\underbrace{dh}_{\text{bredd}}$$

Detta ger masselementet

$$dm = \delta\, dA = 5h\left(2-\frac{2}{3}h\right)dh$$

Plattans massa:

$$m = \int_{h=0}^{h=3} dm = \int_0^3 5h\left(2-\frac{2}{3}h\right)dh =$$

$$= 10\int_0^3\left(h-\frac{1}{3}h^2\right)dh = 10\left(\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{9}h^3\right)\Big|_0^3 =$$

$$= 10\left(\frac{1}{2}9-\frac{1}{9}27\right) = 45-30 = \underline{\underline{15\ \text{kg}}}$$

Moment kring $x=0$:

$$M_{x=0} = \int_{h=0}^{h=3} h\, dm = \int_0^3 h\cdot 5h\left(2-\frac{2}{3}h\right)dh =$$

$$= 10\int_0^3\left(h^2-\frac{1}{3}h^3\right)dx = 10\left(\frac{1}{3}h^3-\frac{1}{12}h^4\right)\Big|_0^3 =$$

$$= 10\left(\frac{1}{3}\cdot 27-\frac{1}{12}81\right) = 90-\frac{10}{4}\cdot\frac{81}{3} =$$

$$= 90-\frac{5}{2}\cdot 27 = 90-\frac{135}{2} = \frac{180-135}{2} = \frac{45}{2}\ \text{kg}\cdot\text{m}$$

Moment kring $y=0$ (bandet har masscentrum i $(h, \frac{y}{2})$): (24)

$$M_{y=0} = \int_{h=0}^{h=3} \frac{y}{2}\, dm = \int_0^3 \frac{2-\frac{2}{3}h}{2} \cdot 5h\left(2-\frac{2}{3}h\right) dh =$$

$$= 10\int_0^3 h\left(1-\frac{1}{3}h\right)^2 dh = 10\int_0^3 h\left(1-\frac{2}{3}h+\frac{1}{9}h^2\right) dh =$$

$$= 10\int_0^3 \left(h-\frac{2}{3}h^2+\frac{1}{9}h^3\right) dh =$$

$$= 10\left(\frac{1}{2}h^2-\frac{2}{9}h^3+\frac{1}{36}h^4\right)\Big|_0^3 =$$

$$= 10\left(\frac{1}{2}\cdot 9-\frac{2}{9}\cdot 27+\frac{1}{36}\cdot 81\right) =$$

$$= 45-60+\frac{45}{2} = \frac{90-120+45}{2} = \frac{15}{2} \text{ kg}\cdot\text{m}$$

Masscentrum ges då av

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_{x=0}}{m}, \frac{M_{y=0}}{m}\right) = \left(\frac{45/2}{15}, \frac{15/2}{15}\right) =$$

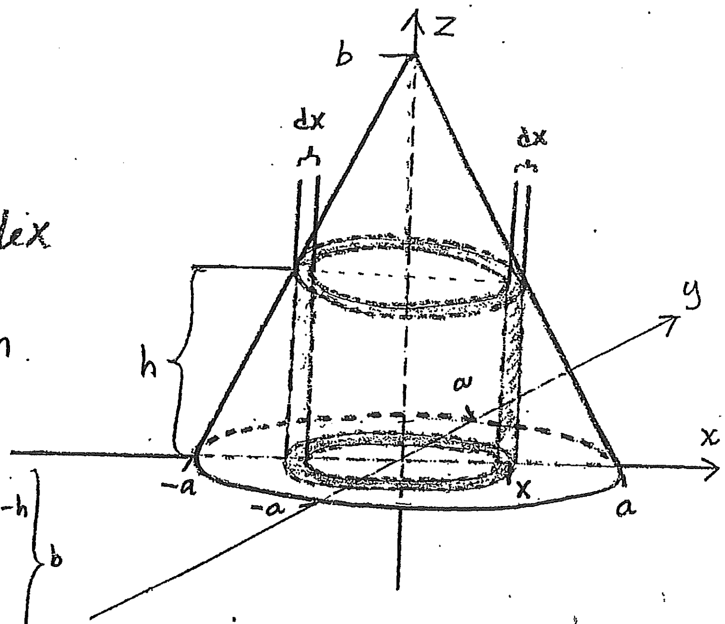
$$= \underline{\underline{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ m}}}$$

<u>7.4:14</u> Bestäm massa och masscentrum för en kon med basradie a cm, höjd b cm och masstäthet kx g/cm³ i P om P ligger på avståndet x från konens symmetriaxel.

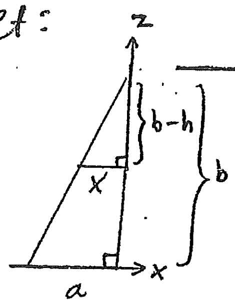
<u>Lösning:</u> Låt konens bas ligga i xy-planet och låt spetsen ligga på höjden b i z-axeln.

(25)

I cylinderskalet i figuren (tjocklek dx) är masstätheten konstant: $\delta(x) = kx$



Skalets höjd h är given genom likformighet:



$$\frac{b-h}{x} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow h = b - \frac{b}{a}x = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

Skalets volym: $dV = \underbrace{2\pi x}_{\text{omkrets}} \cdot \underbrace{h}_{\text{höjd}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{tjocklek}} = 2\pi b x\left(1 - \frac{x}{a}\right)dx$

$\Longrightarrow$ skalets massa: $dm = \delta(x)dV = kx \cdot 2\pi b x\left(1 - \frac{x}{a}\right)dx = 2\pi bk\, x^2\left(1 - \frac{x}{a}\right)dx$

Total massa: $m = \int_{x=0}^{x=a} dm = \int_0^a 2\pi bk\, x^2\left(1 - \frac{x}{a}\right)dx =$

$$= 2\pi bk \int_0^a \left(x^2 - \frac{1}{a}x^3\right)dx =$$

$$= 2\pi bk \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4a}x^4\right)\Big|_0^a =$$

$\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}\right]$

$$= 2\pi bk\left(\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^3\right) = \boxed{\frac{\pi k b a^3}{6}}$$

Skalets moment kring $z=0$ (skalets masscentrum: $\bar{z}_{skal} = \frac{h}{2}$):

$$dM_{z=0} = \frac{h}{2}dm = \frac{1}{2}b\left(1-\frac{x}{a}\right)\cdot 2\pi bkx^2\left(1-\frac{x}{a}\right)dx =$$
$$= \pi b^2 k x^2 \left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx$$

Totala momentet kring $z=0$ blir därför:

$$M_{z=0} = \int_{x=0}^{x=a} dM_{z=0} = \int_0^a \pi b^2 k x^2 \left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx =$$
$$= \pi b^2 k \int_0^a x^2\left(1-\frac{2}{a}x+\frac{1}{a^2}x^2\right)dx =$$
$$= \pi b^2 k \int_0^a \left(x^2-\frac{2}{a}x^3+\frac{1}{a^2}x^4\right)dx =$$
$$= \pi b^2 k \left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2a}x^4+\frac{1}{5a^2}x^5\right)\Big|_0^a =$$
$$= \pi b^2 k \left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{5}a^3\right) =$$
$$= \pi b^2 k \,\frac{10-15+6}{30}a^3 = \frac{\pi k b^2 a^3}{30}$$

Detta ger $\bar{z} = \dfrac{M_{z=0}}{m} = \dfrac{\pi k b^2 a^3/30}{\pi k b a^3/6} = \dfrac{b}{5}$

P.g.a. symmetri måste $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Masscentrum ligger alltså i $\boxed{(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(0,0,\frac{b}{5}\right)}$. (I vårt valda koordinatsystem.)