Institutionen för naturvetenskap, teknik och matematik (NAT)
Institutionen för teknik och hållbar utveckling (THU)

MATEMATISK FORMELSAMLING

UPPLAGA 2

Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Innehåll

1 Notation, mängdlära och logik

Mängder och tal

$\emptyset$	tomma mängden, $\{\,\}$
$\mathbb{Z}$	mängden av heltal, $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$
$\mathbb{Z}_+$	mängden av positiva heltal, $\{1,2,3,\ldots\}$
$\mathbb{Z}_-$	mängden av negativa heltal, $\{\ldots-3,-2,-1\}$
$\mathbb{N}$	mängden av naturliga tal, $\{0,1,2,\ldots\}$
$\{x\in\mathbb{Z}\,\vert\,P\}$	mängden av alla x i $\mathbb{Z}$ som uppfyller egenskapen P
$\{x\in\mathbb{Z}:P\}$	samma som $\{x\in\mathbb{Z}\,\vert\,P\}$
$\mathbb{Q}$	mängden av rationella tal, $\{p/q : p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0\}$
$\mathbb{R}$	mängden av reella tal
$\mathbb{R}_+$	mängden av positiva reella tal, $\{x\in\mathbb{R}: x>0\}$
$\mathbb{R}_-$	mängden av negativa reella tal, $\{x\in\mathbb{R}: x<0\}$
$[a,b]$	det slutna intervallet från a till b, $\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\leq b\}$
$]a,b[$	det öppna intervallet från a till b, $\{x\in\mathbb{R}: a< x< b\}$
(a,b)	samma som $]a,b[$
$\mathbb{C}$	mängden av komplexa tal, $\{a+ib : a,b\in\mathbb{R}\}$

De positiva primtalen ≤ 100

$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97$

Symboler från mängdlära

$A=B$	A är lika med B
$A\neq B$	A är inte lika med B
$a\in A$	elementet a finns i mängden A
$a\notin A$	elementet a finns inte i mängden A
$A\cup B$	unionen av mängderna A och B, $\{x:\ x\in A$ eller $x\in B\}$
$A\cap B$	snittet av mängderna A och B, $\{x:\ x\in A$ och $x\in B\}$
$A-B$	skillnaden mellan mängderna A och B, dvs $\{x\in A:\ x\notin B\}$
$A\setminus B$	samma som $A-B$
$\overline{B}$	den komplementära mängden till B, om B är en delmängd till den universella mängden $\mathcal{U}$ så är $\overline{B}=\{x\in\mathcal{U}:\ x\notin B\}$
B^c	samma som $\overline{B}$
$A\subseteq B$	A är en delmängd till B, $x\in A\Rightarrow x\in B$
$A\subset B$	A är en äkta delmängd till B, dvs $A\subseteq B$ och $A\neq B$
$A\times B$	den kartesiska produkten av mängderna A och B, dvs mängden av alla ordnade par (a,b) sådana att $a\in A$ och $b\in B$
$\mathcal{P}(A)$	potensmängden till A, dvs mängden av alla delmängder till A

Viktiga likheter inom mängdlära

Associativa lagar:
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Kommutativa lagar:
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Distributiva lagar:
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

De Morgans lagar:
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Logiska symboler

$\neg p$	icke p
$p \vee q$	p eller q
$p \wedge q$	p och q
$p \Rightarrow q$	p implicerar/medför q
$p \Leftrightarrow q$	p är ekvivalent med q

Viktiga ekvivalenser inom logik

Associativa lagar:
$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

Kommutativa lagar:
$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$
$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

Distributiva lagar:
$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

De Morgans lagar:
$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

Logiska ekvivalenser för bevisföring

Att bevisa $p \Leftrightarrow q$ är ekvivalent med att bevisa $p \Rightarrow q$ och $q \Rightarrow p$

Att bevisa $p \Rightarrow q$ är ekvivalent med att bevisa $\neg q \Rightarrow \neg p$

2 Algebra

Symboler för relationer mellan tal

$a = b$	a är lika med b
$a \neq b$	a är inte lika med b
$a < b$	a är (strikt) mindre än b
$a > b$	a är (strikt) större än b
$a \leq b$	a är mindre än eller lika med b
$a \geq b$	a är större än eller lika med b
$a \vert b$	heltalet a delar heltalet b

Viktiga likheter för aritmetik

Associativa lagar:	$(a+b)+c = a+(b+c), \quad (ab)c = a(bc)$
Kommutativa lagar:	$a+b = b+a, \quad ab = ba$
Distributiva lagen:	$a(b+c) = ab+ac$
Lagen om nolldelare:	Om $ab = 0$ så är $a = 0$ eller $b = 0$

Kvadreringsreglerna och konjugatregeln

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Kubregler

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

Summor av kuber

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

Andragradspolynom

Ekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rötterna

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ och } x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

där $x_1 + x_2 = -p$ och $x_1 \cdot x_2 = q$

Absolutbelopp

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Kvadratrötter

$$\begin{aligned} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} &= \sqrt{ab} & \qquad & a \geq 0, \quad b \geq 0 \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a}{b}} & & a \geq 0, \quad b > 0 \\ \sqrt{a^2 b} &= |a|\sqrt{b} & & b \geq 0 \end{aligned}$$

Potenser
x, y, a, b, reella tal $a, b > 0$, och n ett positivt heltal

$$a^x a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x b^x = (ab)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^0 = 1 \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Logaritmer
För positiva reella tal x, y, a, b, där $a, b \neq 1$ gäller

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad \lg xy = \lg x + \lg y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \lg \frac{x}{y} = \lg x - \lg y$$

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x \qquad \lg x^p = p \cdot \lg x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad \lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

där

$$a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x \qquad 10^y = x \Leftrightarrow y = \lg x \qquad e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$$

$\log_{10}$ skrivs oftast lg

$\log_e$ skrivs oftast ln

Några summationsformler

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{r=0}^{n} x^r = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \quad \text{där det reella talet } x \neq 1$$

Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$$

där n är ett positivt heltal, $\displaystyle\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, $n! = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ och $0! = 1$.

3 Komplexa tal

Definition
Ett komplext tal z kan skrivas $z = a + ib$ där a och b är reella tal och i är ett tal som uppfyller $i^2 = -1$.

Talen $z = a + ib$ och $\overline{z} = a - ib$ kallas konjugerade.

Belopp
Beloppet $|z|$ av $z = a + ib$ är $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Polär form

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}, \quad \text{där } r = |z| \text{ och } \varphi = \arg(z)$$

De Moivre

$$z^n = r^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big) = r^n e^{in\varphi}$$

Multiplikationsregler
Om $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ och $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ så är

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \end{aligned}$$

4 Punkter, vektorer och plan i rummet

Avståndet mellan punkterna (x_1, y_1, z_1) **och** (x_2, y_2, z_2)

$$\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 + |z_1 - z_2|^2}$$

Avståndet från punkten (x_1, y_1, z_1) **till planet** $ax + by + cz = d$

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Normen (längden) av vektorn $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Skalärprodukten av vektorerna $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ **och** $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \alpha,$$

där α är vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$.

Projektion av vektorn u på vektorn a

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \, \mathbf{a}$$

Cauchy–Schwarz olikhet

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$$

5 Geometri

Cirkel
r cirkelns radie, A area, O omkrets

$$A = \pi r^2$$

$$O = 2\pi r$$

Pyramid
B bottenarea, h höjd, V volym

$$V = \frac{Bh}{3}$$

Rak cirkulär cylinder
r radie, h höjd, S mantelarea (ytarea), V volym

$$S = 2\pi rh$$

$$V = \pi r^2 h$$

Rak cirkulär kon
r radie, h höjd, s sida, S mantelarea (ytarea), V volym

$$S = \pi rs$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Sfär
r radie, S mantelarea (ytarea), V volym

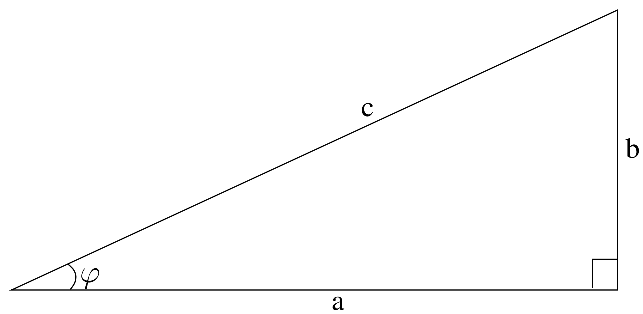
$$S = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

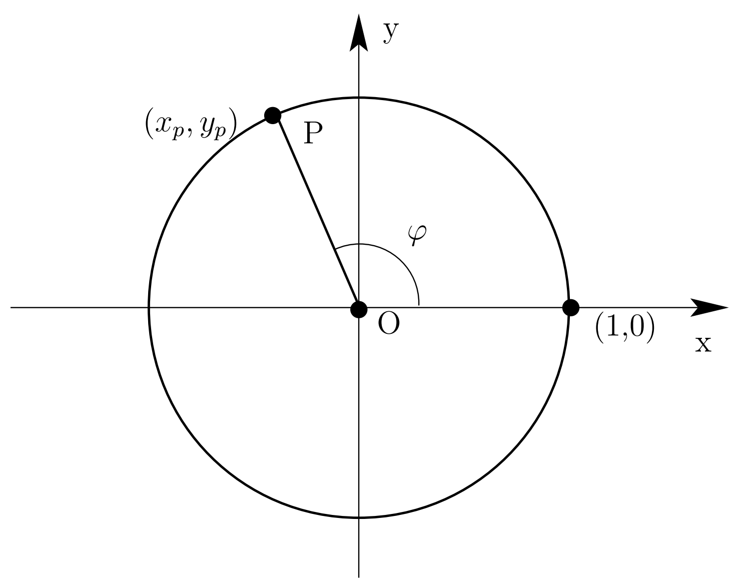
6 Trigonometri

Rätvinklig triangel

$$\sin\varphi = \frac{b}{c}$$
$$\cos\varphi = \frac{a}{c}$$
$$\tan\varphi = \frac{b}{a}$$

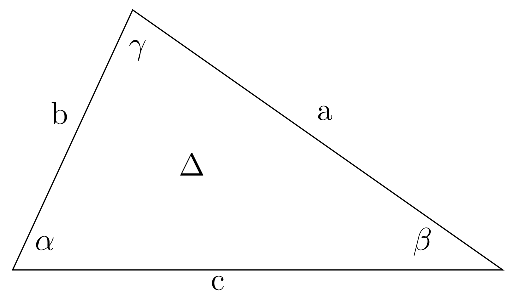


Enhetscirkeln



$$\sin\varphi = y_p \qquad \cos\varphi = x_p$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \qquad \cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$



Areasatsen för triangeln Δ

$$\text{area } \Delta = \frac{bc \sin \alpha}{2}$$

Sinussatsen

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

Cosinussatsen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Additionsreglerna

$$\begin{aligned}
\sin(\varphi + \psi) &= \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \\
\sin(\varphi - \psi) &= \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \\
\cos(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \\
\cos(\varphi - \psi) &= \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi
\end{aligned}$$

Trigonometriska ettan

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

Formlerna för dubbla vinkeln

$$\begin{aligned}
\sin(2\varphi) &= 2 \sin \varphi \cos \varphi \\
\cos(2\varphi) &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \;=\; 2\cos^2 \varphi - 1 \;=\; 1 - 2\sin^2 \varphi
\end{aligned}$$

Uttryck på formen $a \sin x + b \cos x$

$$a \sin x + b \cos x \quad = \quad r \sin(x + y)$$

där $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos y = \dfrac{a}{r}$ och $\sin y = \dfrac{b}{r}$

Några exakta värden för trigonometriska funktioner

Vinkel φ				
grader	radianer	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\tan \varphi$
0	0	0	1	0
30	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90	$\pi/2$	1	0	ej def.
120	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
135	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
150	$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
180	π	0	-1	0
210	$7\pi/6$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
225	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1
240	$4\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}$
270	$3\pi/2$	-1	0	ej def.
300	$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}$
315	$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
330	$11\pi/6$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
360	2π	0	1	0

7 Några standardgränsvärden

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

8 Derivator

Definition

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivator av några funktioner

Funktion	Derivata
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
e^{kx}	ke^{kx}
$a^x,\ a > 0$	$a^x \ln a$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Produktregeln

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Kvotregeln

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

Kedjeregeln

$$h(x) = f\big(g(x)\big)$$
$$h'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Derivata av invers funktion

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$$

Taylors formel

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

för något ξ mellan x och a.

9 Integraler

Primitiva funktioner

Funktion	Primitiv funktion
x^a	$\dfrac{1}{a+1}\,x^{a+1} + c, \quad a \neq -1$
e^x	$e^x + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c$
$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$

Partiell integration

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Rotationsvolymer

$$\text{Rotation kring } x\text{-axeln:} \quad V = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx$$

$$\text{Rotation kring } y\text{-axeln:} \quad V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

Båglängd

$$s = \int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt, \quad x = x(t), \quad y = y(t)$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx, \quad y = f(x)$$

10 Differentialekvationer

Första ordningens linjära differentialekvationer
Integrerande faktor till $y' + g(x)y = h(x)$ är $e^{G(x)}$, där $G(x) = \int g(x)\,dx$.

Andra ordningens homogena linjära differentialekvationer
Differentialekvationen

$$y'' + ay' + by = 0,$$

där a och b är konstanter har lösningar som ges av:

$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$	om rötterna r_1 och r_2 till karaktäristiska ekvationen är reella och $r_1 \neq r_2$;
$y = (Ax + B)e^{rx}$	om rötterna r_1 och r_2 till karaktäristiska ekvationen är reella och $r_1 = r_2 = r$;
$y = e^{\alpha x}\big(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\big)$	om rötterna $r_1 = \alpha+\beta i$ och $r_2 = \alpha-\beta i$ till karaktäristiska ekvationen inte är reella.