Mittuniversitetet

MID SWEDEN UNIVERSITY

Inlämningsuppgift för Block I

Inlämningsuppgift för Block I: *Analysens grunder* som ska vara inlämnad senast måndag 12 december kl. 24:00. Inlämningsuppgiften består av ett antal problem som tillsammans är värda 9 poäng av totalt 45 poäng för alla fem blockens inlämningsuppgifter där 10p, 15p, 20p, 25p, 30p och 35p ger +0.5p, +1p, +1.5p, +2p, +2.5p resp. +3p på tentamina med min signatur.

Samarbeta gärna med kurskamraterna men lämna in individuella lösningar! Lämna inlämningsuppgiften till mig personligen (på föreläsningen eller i rum Q291A), i mitt fack (finns vid Q-husets studentexpedition) eller via e-post (`jens.persson@miun.se`).

1. Lös olikheten

$$\frac{3}{x-2} < \frac{5}{x-6}$$

och markera lösningen på den reella tallinjen. (1p)

2. Visa med den formella gränsvärdesdefinitionen att $\lim_{x\to\infty} e^{-2x} = 0$. (2p)

3. a) Skriv summan $4 + 14 + 30 + \cdots + (n-1)(3n-2) + n(3n+1)$ på sigmanotationsform (d.v.s. $\sum_{i=k}^{m} a_i$ för lämpliga a_i, k och m) på minst två olika sätt. (Tips: Låt $k = 1$ i den ena. Substituera index för den andra.) (1p)

b) Visa med hjälp av induktion att

$$4 + 14 + 30 + \cdots + (n-1)(3n-2) + n(3n+1) = n(n+1)^2$$

för alla $n \in \mathbb{N}$. (Tips: Summan i vänsterled samma som i a).) (2p)

4. a) Är $x = 5$ en hävbar diskontinuitet till $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-1} - 3}{x-5}$? Om den är hävbar, definiera $f(5)$ så att man får kontinuitet. (2p)

b) Använd *Satsen om mellanliggande värden* för att visa att

$$12x^3 - 64x^2 + 83x - 21 = 0$$

har (minst) en rot på intervallet $[1, 2]$. (1p)

①

LÖSNINGAR TILL INLUPP I

1. Vi har olikheten $\dfrac{3}{x-2} < \dfrac{5}{x-6}$. Förläng så att det blir liknämnigt:

$$\frac{3(x-6)}{(x-2)(x-6)} < \frac{5(x-2)}{(x-2)(x-6)} \Leftrightarrow \frac{3(x-6)-5(x-2)}{(x-2)(x-6)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-18-5x+10}{(x-2)(x-6)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-8}{(x-2)(x-6)} < 0 \Leftrightarrow$$

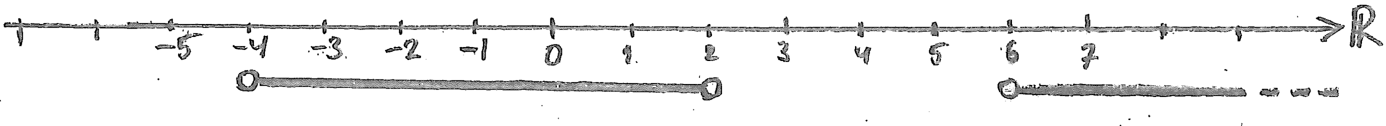
$$\Leftrightarrow -2\frac{x+4}{(x-2)(x-6)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{(x-2)(x-6)} > 0 \qquad (*)$$

Teckentabell:

x		-4		2		6	
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-6$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+4}{(x-2)(x-6)}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

$\Longrightarrow$ $(*)$ löses för $\boxed{-4 < x < 2 \text{ eller } x > 6}$,

Se tallinjen nedan:



2. Gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} e^{-2x} = 0$ i oändligheten betyder enligt formell definition:

För varje $\varepsilon > 0$ så finns $R > 0$ sådant att

$$x > R \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \qquad (*)$$

där $f(x) = e^{-2x}$ och $L = 0$. ②

Antag $\varepsilon > 0$. Betrakta

$$|f(x) - L| = |e^{-2x} - 0| = e^{-2x} \qquad (**)$$

Detta är mindre än ε omm $e^{-2x} < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x < \ln \varepsilon \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \ln \varepsilon = \ln(\varepsilon^{-1/2}) = \ln \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

Välj $R = \ln \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Då gäller implikationen

$$x > R \underset{\text{enl. ovan}}{\Longrightarrow} e^{-2x} < \varepsilon \underset{(**)}{\Longrightarrow} |f(x) - L| < \varepsilon$$

vilket precis är implikationen $(*)$.

---

3. a) Sista termen är $n(3n+1) = i(3i+1)$ för $i = n$

Testa för $i=1$: $1 \cdot (3 \cdot 1 + 1) = 1 \cdot 4 = 4$, stämmer

— " — $i=2$: $2 \cdot (3 \cdot 2 + 1) = 2 \cdot 7 = 14$, stämmer

— " — $i=3$: $3 \cdot (3 \cdot 3 + 1) = 3 \cdot 10 = 30$, stämmer

— " — $i=n-1$: $(n-1)(3(n-1)+1) = (n-1)(3n-2)$, stämmer

Vi drar slutsatsen att $a_i = i(3i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\Longrightarrow 4 + 14 + 30 + \cdots + (n-1)(3n-2) + n(3n+1) = \underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} i(3i+1)}}$$

Den andra skrivformen kan vi få genom indexsubstitution, se sid. 1 i F2:

$$\sum_{i=1}^{n} i(3i+1) = \left[\begin{matrix} i = j+1 \\ j = i-1 \end{matrix}, \begin{cases} i=1 \Leftrightarrow j=0 \\ i=n \Leftrightarrow j=n-1 \end{cases} \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)(3(j+1)+1) = \underline{\underline{\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)(3j+4)}}$$

③ b) Ska visa $\sum_{i=1}^{n} i(3i+1) = n(n+1)^2$ (*)

för alla $n \in \mathbb{N}$ $(=\{1,2,3,\dots\})$.

- <u>Startsteg:</u>
$$\begin{cases} VL_1 = \sum_{i=1}^{1} i(3i+1) = 1\cdot(3\cdot 1+1) = 4 \\ HL_1 = 1\cdot(1+1)^2 = 1\cdot 2^2 = 4 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Startsteg verifierat

- <u>Induktionssteg:</u> Antag $VL_p = HL_p$ (**)

$$\Longrightarrow VL_{p+1} = \sum_{i=1}^{p+1} i(3i+1) =$$
$$= \sum_{i=1}^{p} i(3i+1) + (p+1)\big(3(p+1)+1\big) =$$
$$= VL_p + (p+1)(3p+4) = [(**)] =$$
$$= HL_p + (p+1)(3p+4) =$$
$$= p(p+1)^2 + (p+1)(3p+4) =$$
$$= (p+1)\big(p(p+1) + (3p+4)\big) =$$
$$= (p+1)(p^2+4p+4) =$$
$$= (p+1)(p+2)^2 = (p+1)\big((p+1)+1\big)^2 =$$
$$= HL_{p+1}$$

$\Longrightarrow$ Induktionssteg verifierat.

Induktionsaxiomet ger påståendet (*).

<u>Notera:</u> Givetvis kan man inte veta säkert att $4+14+30+\dots+(n-1)(3n-2)+n(3n+1)$ är just $\sum_{i=1}^{n} i(3i+1)$, men ofta inom matematik används ellipsligaturen ... för att markera något entydigt definierat ändå.

4.

a) $\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5} =$

$= \lim_{x\to 5} \frac{(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{2x-1}+3)}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} =$

$= \lim_{x\to 5} \frac{(2x-1)-9}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} = \lim_{x\to 5} \frac{2(x-5)}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} =$

$= 2 \lim_{x\to 5} \frac{1}{\sqrt{2x-1}+3} = 2 \frac{1}{\sqrt{2\cdot 5-1}+3} =$

$= 2 \frac{1}{3+3} = \frac{1}{3}$

Låter vi $f(5) = 1/3$ så blir f kontinuerlig i $x=5$, så $x=5$ hävbar diskontinuitet.

b) Låt $f(x) = 12x^3 - 64x^2 + 83x - 21$. Eftersom f kontinuerlig på $[1,2]$ så är Satsen om mellanliggande värden tillämpbar.

$f(1) = 12\cdot 1^3 - 64\cdot 1^2 + 83\cdot 1 - 21 = 12 - 64 + 83 - 21 =$

$= 95 - 85 = 10 > 0$

$f(2) = 12\cdot 2^3 - 64\cdot 2^2 + 83\cdot 2 - 21 =$

$= 12\cdot 8 - 64\cdot 4 + 166 - 21 =$

$= 96 - 256 + 145 = 241 - 256 =$

$= -15 < 0$

Enligt Satsen om mellanliggande värden finns $c \in [1,2]$ sådant att $f(c) = 0$, d.v.s. ekvationen $f(x) = 0$ har en rot på $[1,2]$.