Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Inlämningsuppgift för Block II

Inlämningsuppgift för Block II: *Derivering* som ska vara inlämnad senast torsdag 15 december kl. 24:00. Inlämningsuppgiften består av ett antal problem som tillsammans är värda 9 poäng av totalt 45 poäng för alla fem blockens inlämningsuppgifter där 10p, 15p, 20p, 25p, 30p och 35p ger +0.5p, +1p, +1.5p, +2p, +2.5p resp. +3p på tentamina med min signatur.

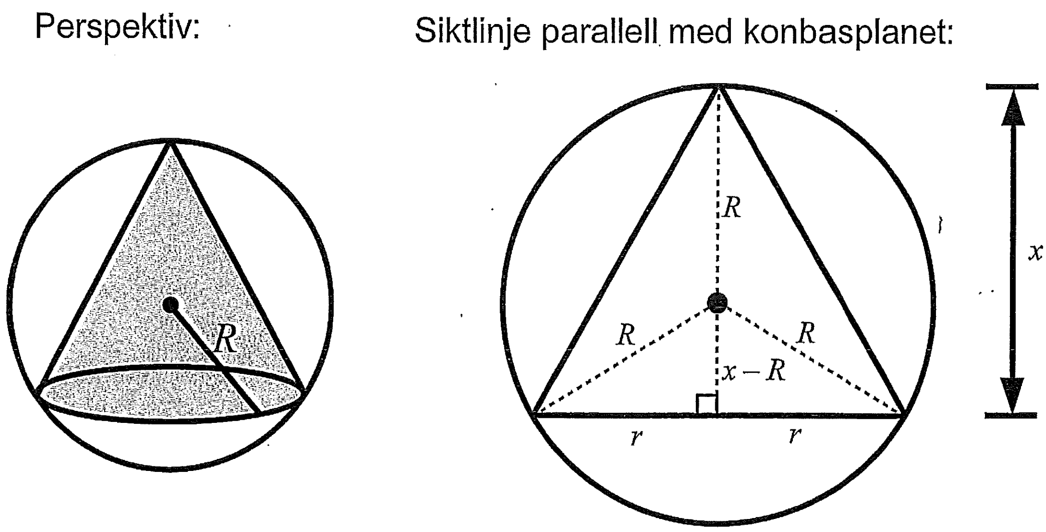
Samarbeta gärna med kurskamraterna men lämna in individuella lösningar! Lämna inlämningsuppgiften till mig personligen (på föreläsningen eller i rum Q291A), i mitt fack (finns vid Q-husets studentexpedition) eller via e-post (`jens.persson@miun.se`).

1. Visa med hjälp av *Medelvärdessatsen* att olikheten $\ln(1+x) < x$ uppfylls för alla $x > 0$. (1.5p)

2. En rät cirkulär kon är inskriven i en sfär med radien R; se Figur 1 på sidan 2. Bestäm konens dimensioner för maximal volym. (2.5p)

3. Skissera grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+1}$ med användande av den formella grafskisseringsproceduren; se sidorna 2–4 i Föreläsning 6. (2.5p)

4. Approximera $\ln 2$ med ett fel på högst 0.05 genom att bestämma Taylorpolynomet $P_n(x)$ till $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ kring $x = 0$ för tillräckligt stort n. (Tips: Eftersom $f(\frac{1}{3}) = \ln 2$ så måste $\ln 2 = P_n(\frac{1}{3}) + E_n(\frac{1}{3})$. Välj alltså lämpligt n (d.v.s. minsta möjliga som fungerar) så att $|E_n(\frac{1}{3})| < 0.05$, beräkna sedan $P_n(\frac{1}{3})$. Enklast är att uppskatta $|E_0(\frac{1}{3})|$, $|E_1(\frac{1}{3})|, \ldots$ tills det kan garanteras att felet understiger 0.05, detta för att slippa derivera f överflödigt många gånger. Notera att funktionerna $g(s) = \frac{s}{(1-s^2)^2}$ och $h(s) = -\frac{1+3s^2}{(1-s^2)^3}$ som uppkommer i E_1 resp. E_2 är strängt växande på $(0, \frac{1}{3})$.) (2.5p)



Figur 1. Sfären med den inskrivna konen i Uppgift 2.

LÖSNINGAR TILL INLUPP II

1. Ska visa $\ln(1+x) < x, \ x > 0.$

Låt $f(x) = \ln(1+x)$

Enligt Medelvärdessatsen på $[0,x]$ gäller

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c) \quad \text{f.n. } c \in (0,x)$$

d.v.s. $$\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x} = \frac{1}{1+c}$$

$$\iff \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c} \iff \ln(1+x) = \frac{1}{1+c}x$$

Men $c \in (0,x) \Rightarrow 1+c > 1+0 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+c} < \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \frac{1}{1+c}x < x, \ x>0$$

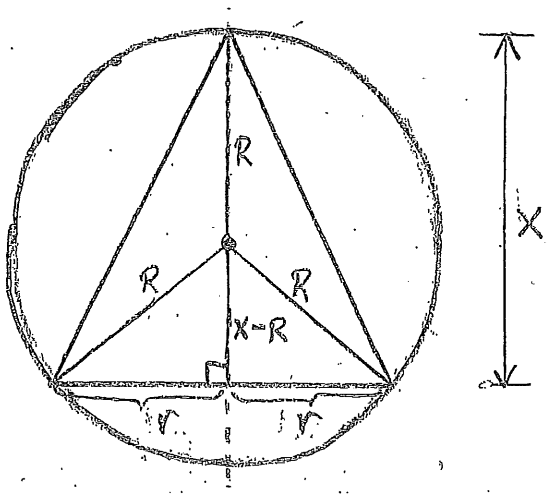
$$\Longrightarrow \ln(1+x) = \frac{1}{1+c}x < x, \ x > 0$$

vilket var precis det vi skulle visa

---

2. Kon i sfär radie R:

Kallar konhöjden x, där $x \in [0,2R]$, och konbasradie r



Pythagoras: $R^2 = (x-R)^2 + r^2$

Konens volym: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 x = [\text{Pythagoras}] =$ ②

$$= \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - (x-R)^2\right)x =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - (x^2 - 2xR + R^2)\right)x =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(2Rx^2 - x^3\right)$$

Vill hitta största värdet till $V(x)$ på $[0, 2R]$.

- Kritiska pkter: $V'(x) = \frac{\pi}{3}(4Rx - 3x^2) = \frac{\pi}{3}x(4R - 3x)$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}x(4R-3x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } 4R - 3x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x=0}_{\text{ej i det inre av } [0,2R]} \text{ eller } x = 4R/3 \in (0, 2R)$$

- Singulära pkter: Saknas!
- Ändpkter: $x = 0$ och $x = 2R$

Största värde bland dessa ($x = 0, 4R/3, 2R$):

$$\begin{cases} V(0) = \frac{\pi}{3}(2R\cdot 0^2 - 0^3) = 0 \\ V\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(2R\cdot\left(\frac{4R}{3}\right)^2 - \left(\frac{4R}{3}\right)^3\right) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{32}{9}R^3 - \frac{64}{27}R^3\right) = \\ \qquad = \frac{\pi}{81}(96-64)R^3 = \frac{32\pi}{81}R^3 \quad > 0 \\ V(2R) = \frac{\pi}{3}\left(2R(2R)^2 - (2R)^3\right) = \frac{\pi}{3}(8R^3 - 8R^3) = 0 \end{cases}$$

Största värdet är alltså $\frac{32\pi}{81}R^3$ för volymen och det fås för $x = 4R/3 \underset{\text{Pyth.}}{\Longrightarrow} r = \sqrt{R^2 - (4R/3 - R)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,R$

$$\boxed{\text{Maximal volym fås då konhöjden är } 4R/3 \text{ och konbasradien är } \tfrac{2}{3}\sqrt{2}\,R \text{ där } R \text{ är sfärradien.}}$$

③ **3.** Skissera $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$. Vi följer receptet från Föreläsning 6:

① $f'(x) = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(2x^2) - 2x^2\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2} =$

$$= \frac{(x+1)\cdot 4x - 2x^2\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x+1)^2\frac{d}{dx}(2x^2+4x) - (2x^2+4x)\frac{d}{dx}((x+1)^2)}{((x+1)^2)^2} =$$

$$= \frac{(x+1)^2(4x+4) - (2x^2+4x)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{(x+1)4(x+1) - 2x(x+2)\cdot 2}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{4(x^2+2x+1) - 4(x^2+2x)}{(x+1)^3} = \frac{4}{(x+1)^3}$$

② (a) $\lim_{x\to -1_-} f(x) = \lim_{x\to -1_-} \frac{2x^2}{x+1} = -\infty$

$\lim_{x\to -1_+} f(x) = \lim_{x\to -1_+} \frac{2x^2}{x+1} = +\infty$

$\Longrightarrow$ Dubbelsidig vertikal asymptot i $x = -1$.

(b₁) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{\frac{1}{x}(1+\frac{1}{x})} = \pm\infty$

$\Longrightarrow$ Inga horisontella asymptoter.

(b₂) Genomför en polynomdivision av kvoten $\frac{2x^2}{x+1}$:

$$\begin{array}{l} \;\;\; 2x-2 \\ \overline{2x^2 \;\big\lfloor\; x+1} \\ -2x(x+1) \\ \hline \;\;\; -2x \\ \;\;\; -(-2)(x+1) \\ \hline \;\;\;\;\;\; 2 \end{array}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{2x^2}{x+1} = 2x-2+\frac{2}{x+1}$$

$\Longrightarrow$ Snedasymptoter $y = 2x-2$ (dubbelsidig), ty

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(2x-2)\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x+1} = 0$$

(c) $f(-x) = \dfrac{2(-x)^2}{-x+1} = -\dfrac{2x^2}{x-1} \neq \pm\dfrac{2x^2}{x+1} = \pm f(x)$,

d.v.s. varken udda eller jämn funktion.
Alltså ingen uppenbar symmetri.

(d) • Skärning y-axel: $f(0) = \dfrac{2\cdot 0^2}{0+1} = 0$, d.v.s. $\underline{(0,0)}$.

• Skärning x-axel: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

d.v.s. $\underline{(0,0)}$.

3. (a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x(x+2)}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = -2$

där $f(0) = \dfrac{2\cdot 0^2}{0+1} = 0$, $f(-2) = \dfrac{2\cdot(-2)^2}{-2+1} = -8$

$\Longrightarrow$ $\underline{(0,0)}$ och $\underline{(-2,-8)}$ kritiska punkter.

(b) f' ej definierad i $\underline{x=-1}$.

(c) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x(x+2)}{(x+1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0,\ x+2>0,\ x\neq -1 \\ \text{eller} \\ x<0,\ x+2<0,\ x\neq -1 \end{cases}$

(5) $\Leftrightarrow \begin{cases} x>0,\ x>-2,\ x\neq -1 \\ \text{eller} \\ x<0,\ x<-2,\ x\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \text{eller} \\ x<-2 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x\in(-\infty,-2)\ \cup}$
$\underline{\cup\ (0,\infty)}.$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0,\ x<-2,\ x\neq -1 \\ x<0,\ x>-2,\ x\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\emptyset \quad \text{(uppfylls aldrig)} \\ -2<x<0,\ x\neq -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \underline{x\in(-2,0)\setminus\{-1\}}$ (d.v.s. $(-2,0)$ med -1 bortplockad)

4. (a) $f''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{(x+1)^3}=0$, uppfylls aldrig

(b) f'' ej definierad i $\underline{x=-1}$.

(c) $f''(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{(x+1)^3}>0 \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow \underline{x>-1}$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{(x+1)^3}<0 \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow \underline{x<-1}.$

(d) Det saknas punkter där f'' växlar tecken

$\Longrightarrow$ <u>f saknar inflexionspunkter</u>

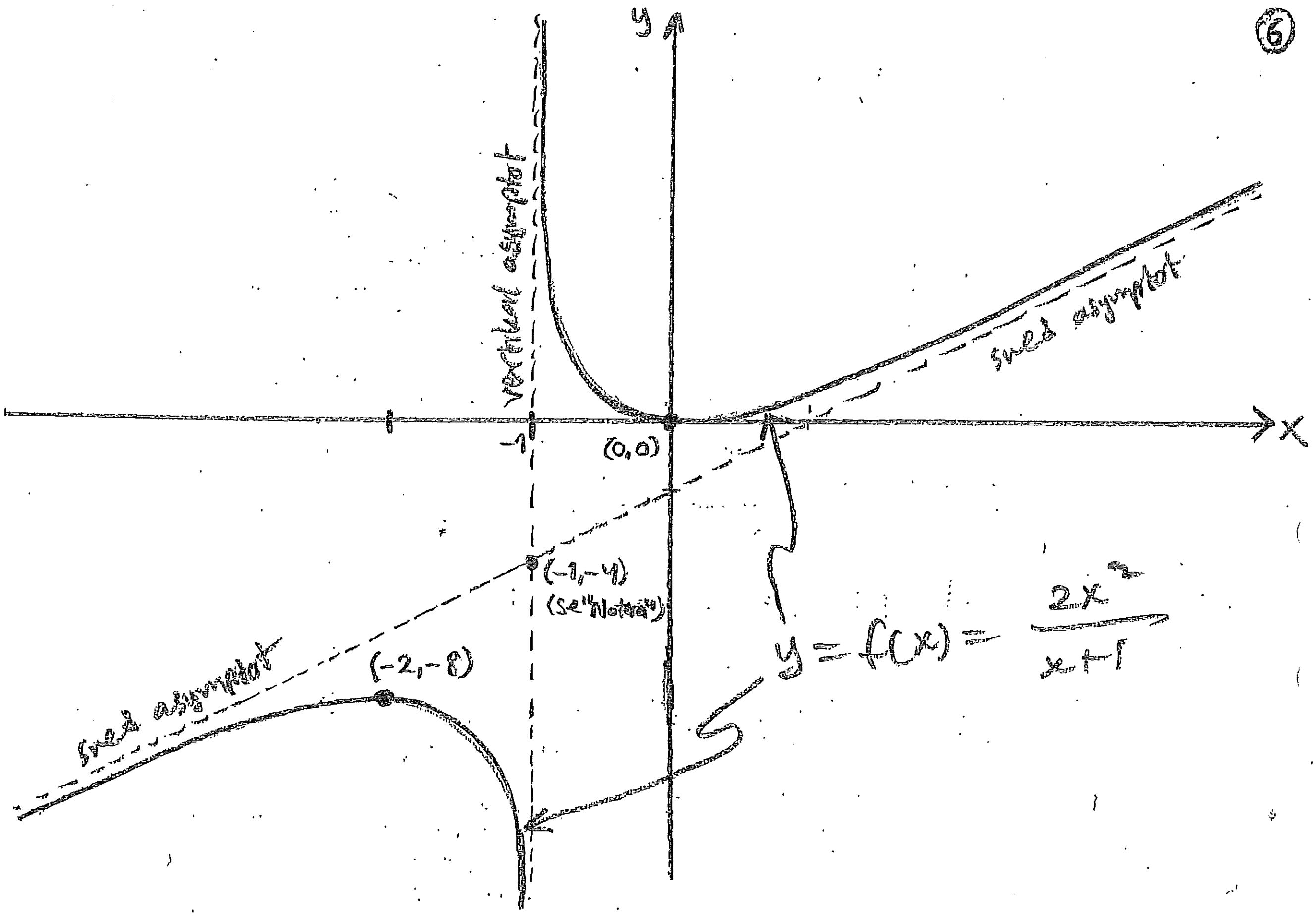
Två komponenter hos grafen ($x<-1$ och $x>-1$) och har redan tagit fram en punkt i varje ($(-2,-8)$ resp. $(0,0)$).

<u>Tabell:</u>

x		-2		-1		0	
f'	$+++$	0	$---$		$---$	0	$+++$
f''	$---$	$---$	$---$		$+++$	$+++$	$+++$
f	$\nearrow$	lok max	$\searrow$	vertikal asymptot	$\searrow$	lok min	$\nearrow$

Vi kan nu skissera funktionen:

6



<u>Notera:</u> I efterhand är det uppenbart att man har en slags "udda" funktion i punkten $(-1,-4)$ istf. origo. Detta är ingen "uppenbar" symmetri.

---

4. Vi ska utveckla $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ kring $x=0$ m.h.a. Taylorpolynom $P_n(x)$ och fel $E_n(x)$ så att $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$ där

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}(x-0)^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i$$

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

f.n. $s \in (0,x)$ om $x>0$.

(7) Eftersom $\ln\frac{1+1/3}{1-1/3} = \ln\frac{4/3}{2/3} = \ln 2$ så ska vi alltså approximera $f(\tfrac{1}{3}) = P_n(\tfrac{1}{3}) + E_n(\tfrac{1}{3})$ $= \ln 2$

som $P_n(\tfrac{1}{3})$ så att $|E_n(\tfrac{1}{3})| < 10^{-3}$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) =$$

$$= \frac{1-x}{1+x}\,\frac{(1-x)\frac{d}{dx}(1+x) - (1+x)\frac{d}{dx}(1-x)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1-x}{1+x}\,\frac{(1-x)\cdot 1 - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1+x)(1-x)} =$$

$$= \frac{2}{1-x^2}$$

$$\Longrightarrow |E_0(\tfrac{1}{3})| = \left|\frac{f'(s)}{1!}\left(\frac{1}{3}\right)^1\right| = \left|\frac{1}{3}\,\frac{2}{1-s^2}\right| = \frac{2}{3}\,\frac{1}{|1-s^2|}$$

$$= [s\in(0,1/3)] = \frac{2}{3}\,\frac{1}{1-s^2} < \frac{2}{3}\,\frac{1}{1-0^2} = \frac{2}{3}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{1-x^2}\right) = 2\left(-\frac{1}{(1-x^2)^2}\right)(-2x) =$$

$$= \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

$$\Longrightarrow |E_1(\tfrac{1}{3})| = \left|\frac{f''(s)}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\right| = \left|\frac{1}{2}\,\frac{4s}{(1-s^2)^2}\,\frac{1}{9}\right| =$$

$$= \frac{2}{9}\,\frac{|s|}{(1-s^2)^2} = [s\in(0,1/3)] = \frac{2}{9}\,\frac{s}{(1-s^2)^2}$$

$$\underset{\text{Tipset}}{<} \frac{2}{9}\,\frac{1/3}{(1-1/9)^2} = \frac{2}{9}\,\frac{1/3}{64/81} = \frac{2}{9}\,\frac{27}{64} = \frac{3}{32}$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}\frac{4x}{(1-x^2)^2} = \frac{(1-x^2)^2\frac{d}{dx}(4x) - 4x\frac{d}{dx}((1-x^2)^2)}{(1-x^2)^4} =$$ (8)

$$= \frac{(1-x^2)^2 \cdot 4 - 4x \cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} =$$

$$= \frac{4(1-x^2)+16x^2}{(1-x^2)^3} = \frac{4+12x^2}{(1-x^2)^3} = 4\,\frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$$

$$\Rightarrow E_2\left(\tfrac{1}{3}\right) = \left|\frac{f'''(s)}{3!}\left(\tfrac{1}{3}\right)^3\right| = \left|\frac{1}{6}\,4\,\frac{1+3s^2}{(1-s^2)^3}\,\frac{1}{27}\right| =$$

$$= \frac{2}{81}\,\frac{1+3s^2}{|(1-s^2)^3|} = \left[s\in(0,\tfrac{1}{3})\right] = \frac{2}{81}\,\frac{1+3s^2}{(1-s^2)^3} <$$

$$\underset{\text{Tydligt}}{<} \frac{2}{81}\,\frac{1+3\cdot 1/9}{(1-1/9)^3} = \frac{2}{81}\,\frac{4/3}{512/729} = \frac{3}{64}$$

$$< \frac{3}{60} = \frac{1}{20} = 0.05$$

d.v.s. $|E_2(\frac{1}{3})|$ är tillräckligt litet fel!

Kan approximera $\ln 2 = f(\frac{1}{3}) \approx P_2(\frac{1}{3})$.

Vi har:

$$P_2\left(\tfrac{1}{3}\right) = \sum_{i=0}^{2}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}\left(\tfrac{1}{3}\right)^i = \begin{bmatrix} 0!=1 \\ 1!=1 \\ 2!=2 \end{bmatrix}$$

$$= f(0) + f'(0)\,\frac{1}{3} + \frac{1}{2}f''(0)\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 =$$

$$= \ln\frac{1+0}{1-0} + \frac{2}{1-0^2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot 0}{(1-0^2)^2}\cdot\frac{1}{9} =$$

$$= \underbrace{\ln 1}_{=0} + \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3} = 0.\overline{6}$$

d.v.s. $\boxed{\ln 2 \approx 0.\overline{6} \text{ med ett fel mindre än } 0.05.}$

<u>Notera:</u> $\ln 2 - 0.\overline{6} = 0.0264805\ldots < 0.05$ (m.h.a. miniräknare).