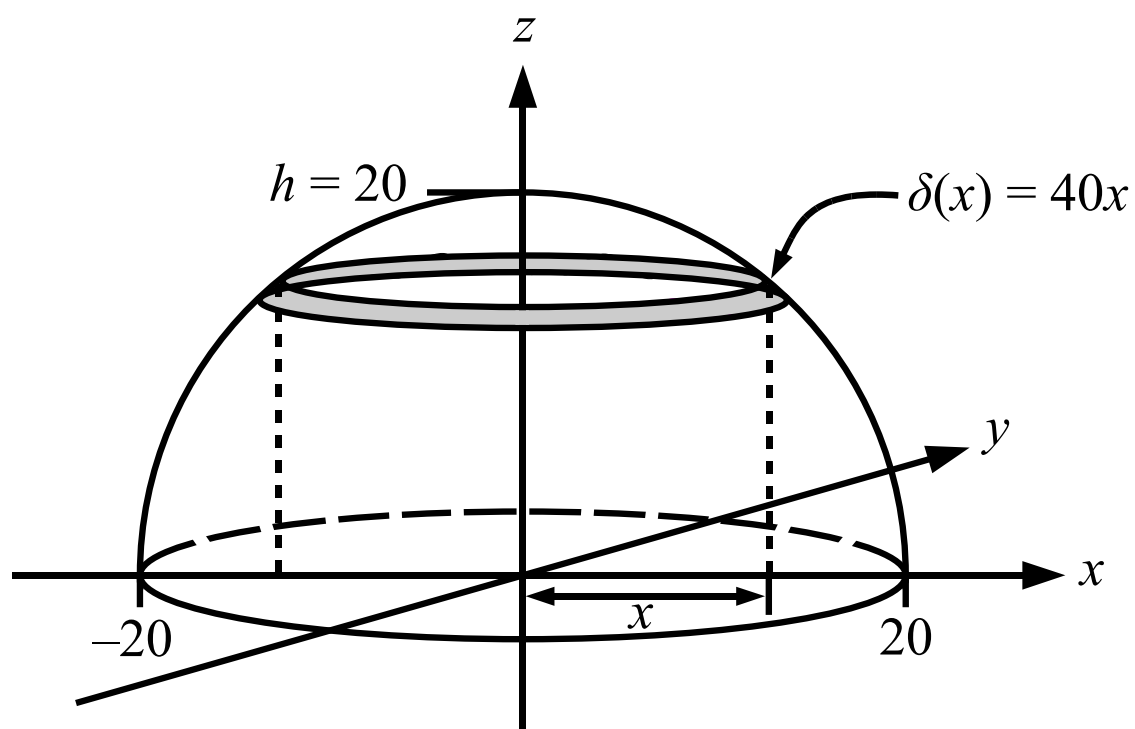


Inlämningsuppgift för Block III

Inlämningsuppgift för Block III: *Integrering* som ska vara inlämnad senast tisdag 20 december kl. 24:00. Inlämningsuppgiften består av ett antal problem som tillsammans är värda 9 poäng av totalt 45 poäng för alla fem blockens inlämningsuppgifter där 10p, 15p, 20p, 25p, 30p och 35p ger +0.5p, +1p, +1.5p, +2p, +2.5p resp. +3p på tentamina med min signatur.

Samarbeta gärna med kurskamraterna men lämna in individuella lösningar! Lämna inlämningsuppgiften till mig personligen (på föreläsningen eller i rum Q291A), i mitt fack (finns vid Q-husets studentexpedition) eller via e-post (jens.persson@miun.se).

1. a) Bestäm $\int_1^2 f(x) dx$ för $f(x) = x^3$ genom att beräkna Riemannsummor $R(f, P_n, c_n)$ för lämpliga partitioner P_n och "etiketter" c_n . (Tips: Summan $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ kan visa sig vara användbar.) (2p)
- b) Bevisa att $\int_1^2 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R(f, P_n, c_n)$ verkligen gäller för f definierad i uppgift a). (Tips: Gäller $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ för alla $a \in [1, 2]$? Vad säger detta om integrerbarhet, och vad säger integrerbarhet om sambandet mellan integraler och Riemannsummor? Se sidorna 303 & 304 i kursboken för detaljer.) (1p)
2. Beräkna följande integraler:
 - a) $\int_{-1}^0 x^3(1+x^2)^6 dx$ (Tips: Variabelsubstitution.) (1p)
 - b) $\int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx$ (Tips: Generaliserad integral. Standardgränsvärde $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t} = 0$.) (1p)
 - c) $\int \frac{dx}{(x-1)(1+x^2)^2}$ (Tips: $\int \frac{x+1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{1+x^2} + \arctan x \right) + C$.) (1p)
3. En ihålig byggnad med höjden $h = 20$ m är formad som övre halvan av en sfär och har yttätheten $\delta(x) = 40x$ kg/m² där x (enhet: m) är det vinkelräta avståndet mellan den vertikala centralaxeln och ytan på byggnaden; se Figur 1. Hur mycket väger byggnaden? (Tips: Det ljusgrå bandet i figuren har bredden $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$ där dx är den på x -axeln projicerade bredden.) (3p)



Figur 1. Den halvsfärformade byggnaden i Uppgift 3.