Mittuniversitetet

MID SWEDEN UNIVERSITY

Inlämningsuppgift för Block III

Inlämningsuppgift för Block III: *Integrering* som ska vara inlämnad senast tisdag 20 december kl. 24:00. Inlämningsuppgiften består av ett antal problem som tillsammans är värda 9 poäng av totalt 45 poäng för alla fem blockens inlämningsuppgifter där 10p, 15p, 20p, 25p, 30p och 35p ger +0.5p, +1p, +1.5p, +2p, +2.5p resp. +3p på tentamina med min signatur.

Samarbeta gärna med kurskamraterna men lämna in individuella lösningar! Lämna inlämningsuppgiften till mig personligen (på föreläsningen eller i rum Q291A), i mitt fack (finns vid Q-husets studentexpedition) eller via e-post (`jens.persson@miun.se`).

1. **a)** Bestäm $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ för $f(x) = x^3$ genom att beräkna Riemannsummor $R(f, P_n, c_n)$ för lämpliga partitioner P_n och "etiketter" c_n. (Tips: Summan $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ kan visa sig vara användbar.) (2p)

b) Bevisa att $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} R(f, P_n, c_n)$ verkligen gäller för f definierad i uppgift a). (Tips: Gäller $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ för alla $a \in [1, 2]$? Vad säger detta om integrerbarhet, och vad säger integrerbarhet om sambandet mellan integraler och Riemannsummor? Se sidorna 303 & 304 i kursboken för detaljer.) (1p)

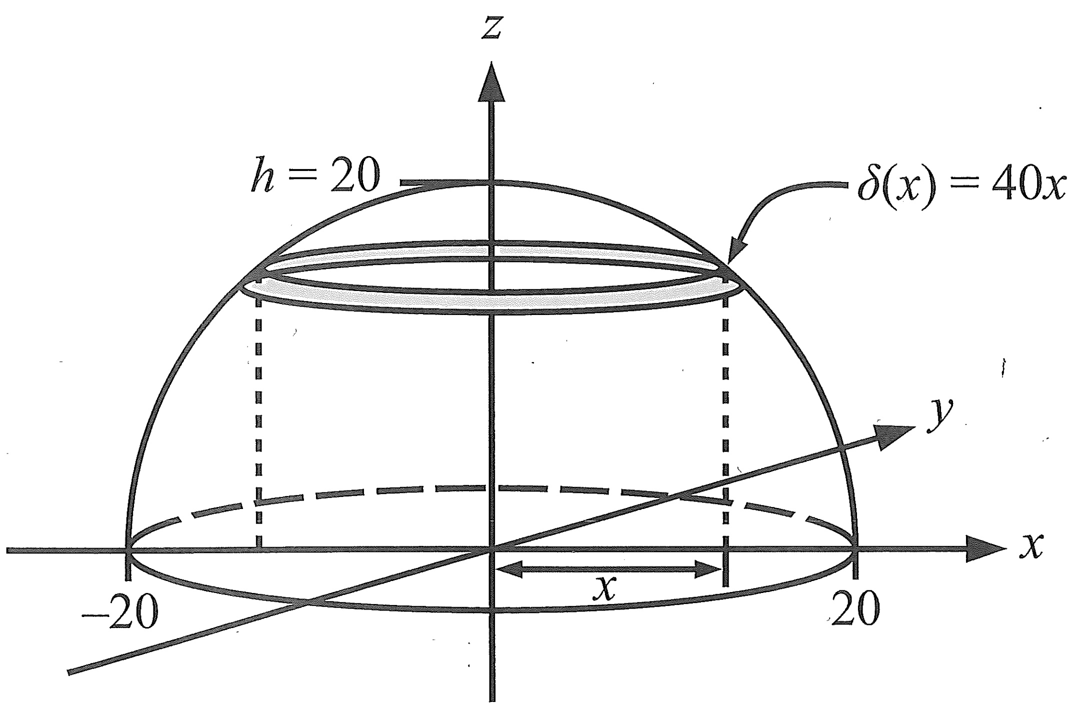
2. Beräkna följande integraler:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} x^3(1+x^2)^6\,\mathrm{d}x$ (Tips: Variabelsubstitution.) (1p)

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{x}\ln x\,\mathrm{d}x$ (Tips: Generaliserad integral. Standardgränsvärde $\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$.) (1p)

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(1+x^2)^2}$ (Tips: $\int \frac{x+1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(\frac{x-1}{1+x^2} + \arctan x\big) + C$.) (1p)

3. En ihålig byggnad med höjden $h = 20$ m är formad som övre halvan av en sfär och har yttätheten $\delta(x) = 40x$ kg/m^2 där x (enhet: m) är det vinkelräta avståndet mellan den vertikala centralaxeln och ytan på byggnaden; se Figur 1. Hur mycket väger byggnaden? (Tips: Det ljusgrå bandet i figuren har bredden $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$ där $\mathrm{d}x$ är den på x-axeln projicerade bredden.) (3p)



Figur 1. Den halvsfärformade byggnaden i Uppgift 3.

①

LÖSNINGAR TILL INLUPP III

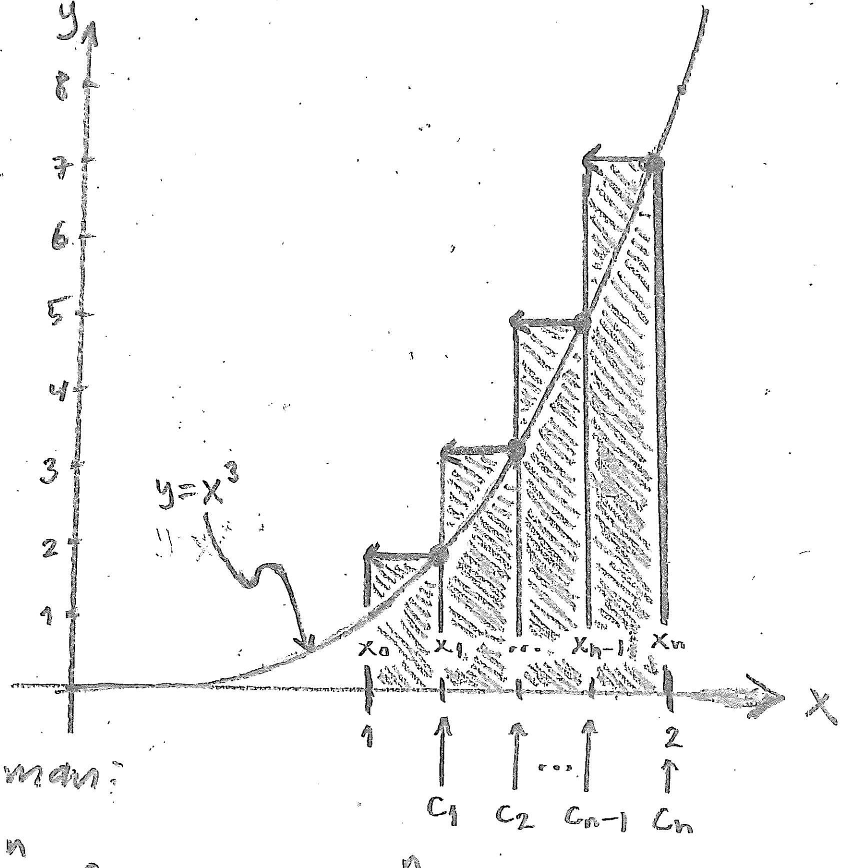
1. a) Inför partition $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ med delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ av samma längd

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{\text{total intervallängd}}{\#\,\text{delintervall}} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$$

där $i = 1, 2, \dots, n$. De n st "etiketterna" $C_n = \{c_{n,1}, c_{n,2}, \dots, c_{n,n}\}$ kan väljas godtyckligt i $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, enklast är att helt enkelt låta

$$c_i = x_i = 1 + \frac{i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

Se figur:



Detta ger Riemannsumman:

$$R(f, P_n, C_n) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^3 \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n+i}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}(n+i)^3 = [\text{Utveckla}] =$$ ②

$$= \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}(n^3+3n^2i+3ni^2+i^3) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i + \frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2 + \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3 = \begin{bmatrix}\text{F2}\\ \text{sid.2}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{n}n + \frac{3}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3 = [\text{Tips}]$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4} =$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 x^3\,dx = \lim_{n\to\infty} R(f, P_n, c_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right) =$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 1^2 =$$

$$= 1 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{4} = 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{8+6+1}{4} = \boxed{\frac{15}{4}}$$

b) $f(x) = x^3$ kontinuerlig på $[1,2]$ ty för alla $a \in [1,2]$ gäller uppenbarligen $\lim_{x\to a} x^3 = a^3$ (rent allmänt är polynomfunktioner kontinuerliga).

$\Longrightarrow$ Enligt Sats (se längst ned sid. 7 F7 eller Th. 2 sid. 304 i kursboken) gäller att f är integrerbar på $[1,2]$

$\Longrightarrow$ Riemannsummans gränsvärde då $n \to \infty$ är precis integralen (se sid 6&7 i F7, eller s. 303-304 i kursboken)

③ **2.** a) $\int_{-1}^{0} x^3(1+x^2)^6\,dx = \left[\begin{cases} u = 1+x^2 \Rightarrow x^2 = u-1 \\ du = 2x\,dx \Leftrightarrow x\,dx = \frac{1}{2}du \end{cases}, \begin{cases} x=0 \Rightarrow u=1 \\ x=-1 \Rightarrow u=2 \end{cases}\right] = \int_2^1 (u-1)u^6 \frac{1}{2}du =$

$= \frac{1}{2}\int_1^2 (1-u)u^6\,du = \frac{1}{2}\int_1^2 (u^6-u^7)\,du =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{8}u^8\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{7}\cdot 2^7 - \frac{1}{8}\cdot 2^8\right) - \left(\frac{1}{7}\cdot 1^7 - \frac{1}{8}\cdot 1^8\right)\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{128-1}{7} - \frac{256-1}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{127}{7} - \frac{255}{8}\right) =$

$= \frac{1}{2}\,\frac{127\cdot 8 - 255\cdot 7}{7\cdot 8} = \frac{1}{2}\,\frac{1016-1785}{56} =$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{56}\cdot 769 = \boxed{-\frac{769}{112}}$ (≈ -6.866)

b) $\int_0^1 \sqrt{x}\ln x\,dx$ = [integrand odefinierad i $x=0$ $\Rightarrow$ Generaliserad integral Typ II] =

$= \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \sqrt{x}\ln x\,dx = \lim_{c\to 0+}\int_c^1 \underbrace{\ln x}_{\downarrow}\ \underbrace{x^{1/2}dx}_{\uparrow}$

Partiell integration $= \left[\begin{cases} U = \ln x \\ dU = \frac{1}{x}dx \end{cases}, \begin{cases} dV = x^{1/2}dx \\ V = \frac{2}{3}x^{3/2} \end{cases}\right] =$

$= \lim_{c\to 0+}\left((\ln x)\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_c^1 - \int_c^1 \frac{2}{3}x^{3/2}\frac{1}{x}\,dx\right) =$

$= \lim_{c\to 0+}\left(-\frac{2}{3}c^{3/2}\ln c - \frac{2}{3}\int_c^1 x^{1/2}\,dx\right) =$

(ty $\ln 1 = 0$) 5

$$= \lim_{c \to 0_+} \left(-\frac{2}{3} c^{3/2} \ln c - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_c^1 \right) =$$

$$= \lim_{c \to 0_+} \left(-\frac{2}{3} c^{3/2} \ln c - \frac{2}{3} \frac{2}{3} (1 - c^{3/2}) \right) =$$

$$= -\frac{2}{3} \lim_{c \to 0_+} \left(c^{3/2} \ln c - \frac{2}{3} c^{3/2} + \frac{2}{3} \right) =$$

$$= -\frac{2}{3} \left(\lim_{c \to 0_+} \frac{\ln c}{c^{-3/2}} - \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \right) =$$

$$= \left[\text{Variabelbyte } t = c^{-3/2} \Leftrightarrow c = t^{-2/3},\ c \to 0_+ \Leftrightarrow t \to +\infty \right] =$$

$$= -\frac{2}{3} \left(\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t^{-2/3}}{t} + \frac{2}{3} \right) = \left[\ln a^b = b \ln a \right] =$$

$$= -\frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3} \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} + \frac{2}{3} \right) = \left[\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \right] =$$

$$= -\frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \right) = \boxed{-\frac{4}{9}}$$

c) $$\int \frac{dx}{(x-1)(1+x^2)^2} = (*)$$

Ansätt den rationella integranden som partialbråk:

$$\frac{1}{(x-1)(1+x^2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{1+x^2} + \frac{Dx+E}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{A(1+x^2)^2 + (Bx+C)(x-1)(1+x^2) + (Dx+E)(x-1)}{(x-1)(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{A(1+2x^2+x^4) + (Bx+C)(x+x^3-1-x^2) + (Dx^2-Dx+Ex-E)}{(x-1)(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{(x-1)(1+x^2)^2} \Big((Ax^4 + 2Ax^2 + A) + (Bx^2 + Bx^4 - Bx - Bx^3 +$$
$$+ Cx + Cx^3 - C - Cx^2) + (Dx^2 + (E-D)x - E) \Big) =$$

⑤ $= \dfrac{1}{(x-1)(1+x^2)^2}\Big((A+B)x^4+(C-B)x^3+(2A+B-C+D)x^2+$
$$+(C-B+E-D)x+(A-C-E)\Big)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B &= 0 \\ C-B &= 0 \\ 2A+B-C+D &= 0 \\ C-B+E-D &= 0 \\ A-C-E &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) -2 \; -1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) -1 \; \boxed{-1} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) -1 \; \boxed{-\tfrac{1}{2}} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) -1 \; \boxed{-1} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) -\tfrac{1}{2} \; \boxed{-\tfrac{1}{2}} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right) 1/2 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right) 1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right) -1 \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&1/4\\ 0&1&0&0&0&-1/4\\ 0&0&1&0&0&-1/4\\ 0&0&0&1&0&-1/2\\ 0&0&0&0&1&-1/2 \end{array}\right] \iff \begin{cases} A=1/4\\ B=-1/4\\ C=-1/4\\ D=-1/2\\ E=-1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (*) = \int\left(\frac{1/4}{x-1} + \frac{(-1/4)x-1/4}{1+x^2} + \frac{(-1/2)x-1/2}{(1+x^2)^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int\frac{x+1}{1+x^2}dx - \frac{1}{2}\int\frac{x+1}{(1+x^2)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{8}\int\frac{2x}{1+x^2}dx - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int\frac{x+1}{(1+x^2)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{8}\ln(1+x^2) - \frac{1}{4}\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{x+1}{(1+x^2)^2}dx$$

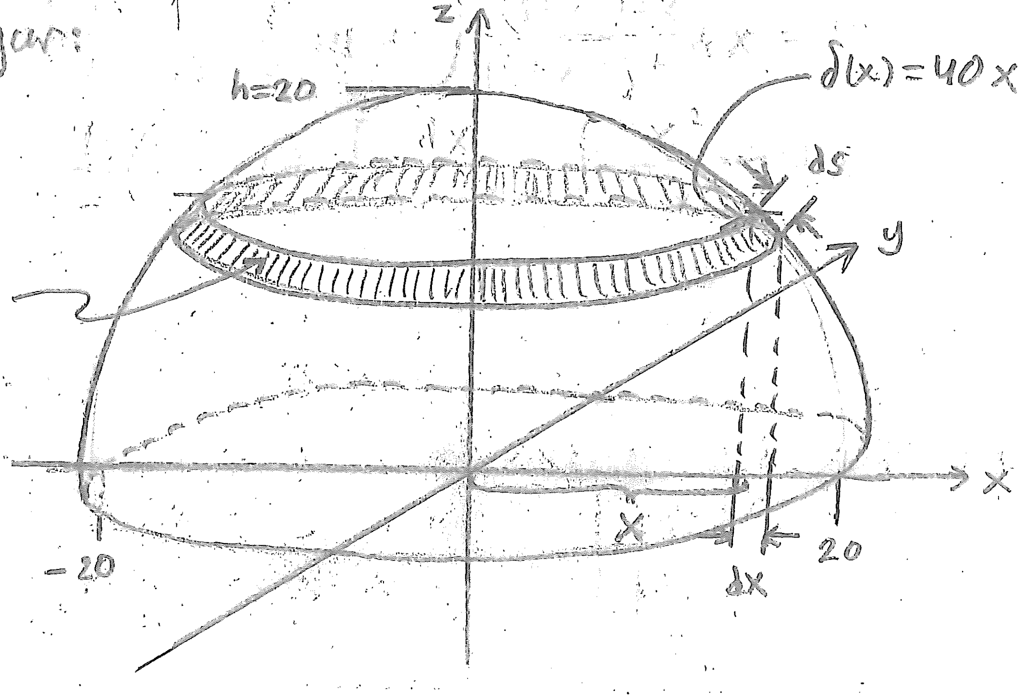
$$\underset{[\text{TIPS}]}{=} \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{8}\ln(1+x^2) - \frac{1}{4}\arctan x -$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{1+x^2} + \arctan x\right) + C =$$

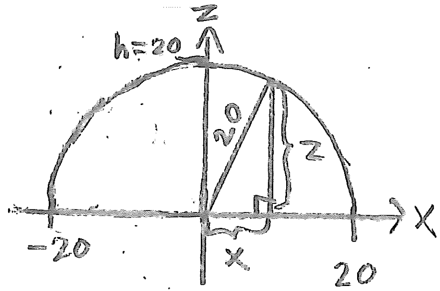
$$= \boxed{\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{8}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\frac{x-1}{1+x^2} + C}$$

3.

Se figur:



⑦ Höjden av byggnaden ovanför x-axeln ges av Pythagoras enligt: $z^2+x^2=h^2$



$$z=\sqrt{h^2-x^2}=$$
$$=\sqrt{20^2-x^2}=$$
$$=(400-x^2)^{1/2}$$

tipset

$$\Rightarrow ds = \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx = \left[\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}(400-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)=\right.$$
$$\left.= x(400-x^2)^{-1/2}\right]=$$
$$=\sqrt{1+\left(x(400-x^2)^{-1/2}\right)^2}\,dx=$$
$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{400-x^2}}\,dx=\sqrt{\frac{(400-x^2)+x^2}{400-x^2}}\,dx=$$
$$=\sqrt{\frac{400}{400-x^2}}\,dx=\frac{20}{\sqrt{400-x^2}}\,dx \qquad \text{(bandbredden)}$$

Detta ger bandarean

$$dS = \underbrace{2\pi x}_{\text{omkrets}}\cdot\underbrace{ds}_{\text{bredd}} = 2\pi x\frac{20}{\sqrt{400-x^2}}\,dx = 40\pi\frac{x}{\sqrt{400-x^2}}\,dx$$

vilket ger bandmassan

$$dm = \underbrace{\delta(x)}_{\text{yttäthet}}\underbrace{dS}_{\text{area}} = 40x\cdot 40\pi\frac{x}{\sqrt{400-x^2}}\,dx=$$
$$=1600\pi\frac{x^2}{\sqrt{400-x^2}}\,dx$$

Den totala massan hos byggnaden är därför

$$m=\int dm=\int_0^{20}1600\pi\frac{x^2}{\sqrt{400-x^2}}\,dx=$$

8

$$= 1600\pi \int_0^{20} \frac{x^2}{\sqrt{400-x^2}}\,dx = \left[\begin{cases} x = 20\sin\theta \\ dx = 20\cos\theta\, d\theta \end{cases} \right.,$$

$$\left. \begin{cases} x = 20 \Leftarrow \theta = \pi/2 \\ x = 0 \Leftarrow \theta = 0 \end{cases} \right] = 1600\pi \int_0^{\pi/2} \frac{(20\sin\theta)^2}{\sqrt{400-(20\sin\theta)^2}}\, 20\cos\theta\, d\theta$$

$$= 1600\pi \int_0^{\pi/2} \frac{400\sin^2\theta}{\sqrt{400-400\sin^2\theta}}\, 20\cos\theta\, d\theta =$$

$$= 1600\pi \cdot 400 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{20\sqrt{1-\sin^2\theta}}\, 20\cos d\theta = \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-\sin^2\theta} = \\ = \sqrt{\cos^2\theta} = \\ = |\cos\theta| = \\ = \cos\theta, \text{ty} \\ \theta \in (0, \pi/2) \end{array} \right] =$$

$$= 640000\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta =$$

$$= 640000\pi \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = 320000\pi \int_0^{\pi/2} (1-\cos 2\theta)\, d\theta =$$

$$= 320000\pi \left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} = 320000\pi \left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right) - \right.$$

$$\left. - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0\right) \right) =$$

$$= 320000\pi \left(\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - (0-0) \right) = 160000\pi^2$$

$\boxed{\text{Byggnaden väger } 160000\pi^2 \text{ kg } (\approx 1579 \text{ ton}).}$