Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Inlämningsuppgift för Block IV

Inlämningsuppgift för Block IV: *Serier och differentialekvationer* som ska vara inlämnad senast onsdag 4 januari kl. 24:00. Inlämningsuppgiften består av ett antal problem som tillsammans är värda 9 poäng av totalt 45 poäng för alla fem blockens inlämningsuppgifter där 10p, 15p, 20p, 25p, 30p och 35p ger +0.5p, +1p, +1.5p, +2p, +2.5p resp. +3p på tentamina med min signatur.

Samarbeta gärna med kurskamraterna men lämna in individuella lösningar! Lämna inlämningsuppgiften till mig personligen (på föreläsningen eller i rum Q291A), i mitt fack (finns vid Q-husets studentexpedition) eller via e-post (`jens.persson@miun.se`).

1. Avgör huruvida den positiva serien nedan är konvergent eller divergent

$$\frac{2}{3}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 7}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 7\cdot 11}+\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15}+\cdots.$$

(Tips: Skriv om serien på formen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ m.h.a. lämpliga fakulteter.) (1.5p)

2. Bestäm de värden på x för vilka serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^n}{n^2}$ absolutkonvergerar, konvergerar betingat resp. divergerar. (2.5p)

3. Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x^2y' = \dfrac{3(x^2+y^2)}{\ln\left(\arctan\frac{y}{x}\right)} + xy, & (*) \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

(Tips: Differentialekvationen $(*)$ är "homogen". Du kommer behöva integrera partiellt. Inget krav på att lösa ut y som explicit funktion av x föreligger.) (2p)

4. Bestäm den allmänna lösningen till den andra ordningens inhomogena linjära ODE:n $y''+4y=x\cos 2x$. (3p)

①

LÖSNINGAR TILL INLOPP IV

1. Positiv serie

$$\frac{2}{3}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 7}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 7\cdot 11}+\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15}+\dots$$

kan med sigmanotation skrivas $\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15\cdots(4n-1)}}_{a_n}$

Kvotkriteriet ger nu:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)(2(n+1))}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15\cdots(4n-1)\cdot(4(n+1)-1)}}{\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15\cdots(4n-1)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)(2(n+1))}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)}\,\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15\cdots(4n-1)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15\cdots(4n-1)(4(n+1)-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{4(n+1)-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{4n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+2/n}{4+3/n}=$$

$$=\frac{2+0}{4+0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}<1$$

$\Longrightarrow$ Serien konvergerar

---

2. Serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ där $a_n=\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^n}{n^2}$, $x\in R$

- Absolutkonvergent: Undersök $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$

Kvotkriteriet:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left(1-\frac{1}{x}\right)^{n+1}/(n+1)^2\right|}{\left|\left(1-\frac{1}{x}\right)^n/n^2\right|}=$$

2

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(1-\frac{1}{x}\right)^{n+1}\right|}{\left|\left(1-\frac{1}{x}\right)^{n}\right|} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \left|1-\frac{1}{x}\right| \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 =$$

$$\boxed{\left(\frac{n/n}{(n+1)/n}\right)^2}$$

$$= \left|1-\frac{1}{x}\right| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^2 = \left|1-\frac{1}{x}\right| \left(\frac{1}{1+0}\right)^2 =$$

$$= \left|1-\frac{1}{x}\right|$$

$$\rho < 1 \Leftrightarrow \left|1-\frac{1}{x}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1-\frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 < 1 \text{ och } 1 < 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - 2 < 0 \text{ och } \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} < 0 \text{ och } x > 0$$

[Teckentabell:

x		0		$1/2$	
$1-2x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{1-2x}{x}$	$-$	$\not\exists$	$+$	0	$-$

]

$$\Leftrightarrow (x < 0 \text{ eller } x > 1/2) \text{ och } (x > 0) \Leftrightarrow$$

oförenliga!

$$\Leftrightarrow x > 1/2 \text{ och } x > 0 \Leftrightarrow x > 1/2$$

ger konvergens för $\sum_n |a_n|$

$$\rho > 1 \Leftrightarrow \left|1-\frac{1}{x}\right| > 1 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x} < -1 \text{ eller } 1-\frac{1}{x} > 1$$

$$\Leftrightarrow \underset{(\rho<1)}{[\text{se ovan}]} \frac{1-2x}{x} > 0 \text{ eller } x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{(\rho>1)}{[\text{se ovan}]} 0 < x < 1/2 \text{ eller } x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, \tfrac{1}{2})$$

③ ger divergens för $\sum_n |a_n|$

$\rho = 1 \Leftrightarrow \left|1 - \frac{1}{x}\right| = 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} = 1 \\ 1 - \frac{1}{x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/x = 0 & \text{(omöjligt)} \\ 1/x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1/2$

Kvotkriteriet ger inget

$x = 1/2$: $|a_n| = \left|\frac{(1 - \frac{1}{1/2})^n}{n^2}\right| = \left|\frac{(1-2)^n}{n^2}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$

ger konvergens för $\sum_n |a_n|$ ty $\sum_n \frac{1}{n^2}$ är en konvergent serie

$\boxed{\text{Serien absolutkonvergent för } x \geq 1/2.}$

- Betingad konvergens: Undersök $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, vet redan att $x \geq 1/2$ ger absolutkonvergens.

$0 < x < 1/2$: $a_n = \frac{(1 - \frac{1}{x})^n}{n^2} = \left[1 - \frac{1}{x} < -1 \text{ enl. ovan}\right]$

$= \frac{(-|1 - \frac{1}{x}|)^n}{n^2} = (-1)^n \underbrace{\underbrace{\left|1 - \frac{1}{x}\right|}_{>1}{}^n}_{\to \infty \text{ då } n \to \infty} \frac{1}{n^2}$

$\Longrightarrow a_n$ går ej mot noll

$\Longrightarrow \sum_n a_n$ divergerar

$x < 0$: $a_n = \frac{(1 - \frac{1}{x})^n}{n^2} = \left[1 - \frac{1}{x} > 1 \text{ enl. ovan}\right] =$

$= \underbrace{\underbrace{\left[1 - \frac{1}{x}\right]}_{>1}{}^n \frac{1}{n^2}}_{\to \infty \text{ då } n \to \infty} \longrightarrow \infty$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ divergerar (mot ∞)

$\boxed{\text{Serien är inte betingat konvergent för några värden på } x\text{, och divergent för } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1/2).}$

---

3. $\begin{cases} x^2 y' = \dfrac{3(x^2+y^2)}{\ln(\arctan y/x)} + xy & (*) \\ y(1) = 1 \end{cases}$

(*) "homogen", d.v.s. HL till

$$y' = 3\frac{x^2+y^2}{x^2} \frac{1}{\ln(\arctan \frac{y}{x})} + \frac{xy}{x^2}$$

kan skrivas som funktion av y/x. Vi har

$$y' = 3\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)\frac{1}{\ln(\arctan v)} + \frac{y}{x} \quad (**)$$

(Uppenbarligen gäller $y' = f(y/x)$ där f är
$f(t) = 3(1+t^2)\dfrac{1}{\ln(\arctan t)} + t$.)

Ansätt $v = y/x \Leftrightarrow y = xv \Rightarrow y' = 1 \cdot v + xv' =$
$= v + xv'$

Detta insatt i (**) ger:

$$v + xv' = 3(1+v^2)\frac{1}{\ln(\arctan v)} + v$$

$$xv' = 3(1+v^2)\frac{1}{\ln(\arctan v)} \quad \text{, separabelt!}$$

$$\int \frac{\ln(\arctan v)}{3(1+v^2)} dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{——} \; '' \; \text{——} = \ln|x| \quad (***)$$

⑤ $$\int \frac{\ln(\arctan v)}{3(1+v^2)}\,dv = \frac{1}{3}\int \underbrace{\ln(\arctan v)}_{\downarrow}\,\underbrace{\frac{1}{1+v^2}\,dv}_{\uparrow} =$$

$$= \left[\begin{cases} U = \ln(\arctan v) \\ dU = \frac{1}{\arctan v}\frac{1}{1+v^2}\,dv \end{cases}, \begin{cases} dV = \frac{1}{1+v^2}\,dv \\ V = \arctan v \end{cases}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln(\arctan v)\arctan v - \int \arctan v\,\frac{1}{\arctan v}\,\frac{1}{1+v^2}\,dv\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln(\arctan v)\arctan v - \int \frac{dv}{1+v^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln(\arctan v)\arctan v - \arctan v + C_1\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln(\arctan v) - 1\right)\arctan v + C$$

Enligt (***) gäller då:

$$\frac{1}{3}\left(\ln(\arctan v) - 1\right)\arctan v + C = \ln|x|$$

Men $y(1) = 1 \Leftrightarrow [v = y/x]\ v(1) = y(1)/1 = 1/1 = 1$

$$\Longrightarrow \frac{1}{3}\left(\ln\underbrace{(\arctan 1)}_{\pi/4} - 1\right)\underbrace{\arctan 1}_{\pi/4} + C = \underbrace{\ln \underbrace{|1|}_{=1}}_{=0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\ln\frac{\pi}{4} - 1\right)\frac{\pi}{4} + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{12}\left(1 - \ln\frac{\pi}{4}\right) = 0.325\ldots$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{3}\left(\ln(\arctan v) - 1\right)\arctan v + \frac{\pi}{12}\left(1 - \ln\frac{\pi}{4}\right) = \ln|x|$$

Men $v = y/x$ och $x > 0 \Rightarrow \ln|x| = \ln x$ innebär att
(ty begynnelsepkt $x = 1 > 0$)

$$\boxed{\frac{1}{3}\left(\ln\left(\arctan\frac{y}{x}\right) - 1\right)\arctan\frac{y}{x} + \frac{\pi}{12}\left(1 - \ln\frac{\pi}{4}\right) = \ln x}$$

(Man behöver ej lösa ut y som funktion av x.)

4.

Inhomogen linjär ODE: $y'' + 4y = x\cos 2x$ (*) ⑥

- Allmänna lösningen är $y = y_p + y_h$ där y_p någon (partikulär) lösning till (*) och y_h allmän lösning till (*):s motsv. homogena ekvation.

- Homogena versionen av (*): $y'' + 4y = 0$ (**)

Karakteristisk ekv. $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r = \pm 2i$

$\Longrightarrow y_h(x) = C\cos 2x + D\sin 2x$

- Partikulärlösning till (*): $HL_{(*)} = x\cos 2x$

Pröva därför med (se s. 964 i boken; $r=0$):

$$y_p(x) = x^m\left((A_1 + A_2 x)\cos 2x + (B_1 + B_2 x)\sin 2x\right)$$

$m = 0 \Rightarrow y_p$ innehåller termer som löser homogena ODE:n (**)

Vi måste därför välja $m = 1$

$$\Longrightarrow y_p(x) = (A_1 x + A_2 x^2)\cos 2x + (B_1 x + B_2 x^2)\sin 2x$$

$$\Longrightarrow y_p'(x) = (A_1 + 2A_2 x)\cos 2x - (2A_1 x + 2A_2 x^2)\sin 2x + (B_1 + 2B_2 x)\sin 2x + (2B_1 x + 2B_2 x^2)\cos 2x$$

(7)

$$= \left(A_1 + 2(A_2+B_1)x + 2B_2x^2\right)\cos 2x + \\ + \left(B_1 + 2(B_2-A_1)x - 2A_2x^2\right)\sin 2x$$

$$\Longrightarrow y_p''(x) = \left(2(A_2+B_1)+4B_2x\right)\cos 2x - \\ - \left(2A_1 + 4(A_2+B_1)x + 4B_2x^2\right)\sin 2x + \\ + \left(2(B_2-A_1) - 4A_2x\right)\sin 2x + \\ + \left(2B_1 + 4(B_2-A_1)x - 4A_2x^2\right)\cos 2x =$$

$$= \left((2A_2+4B_1) + (8B_2-4A_1)x - 4A_2x^2\right)\cos 2x + \\ + \left((2B_2-4A_1) - (8A_2+4B_1)x - 4B_2x^2\right)\sin 2x$$

Sätt in y_p och y_p'' i $(*)$:

$$\left((2A_2+4B_1)+(8B_2-4A_1)x-4A_2x^2\right)\cos 2x + \\ + \left((2B_2-4A_1)-(8A_2+4B_1)x-4B_2x^2\right)\sin 2x + \\ + 4(A_1x+A_2x^2)\cos 2x + 4(B_1x+B_2x^2)\sin 2x = \\ = x\cos 2x$$

$$\Longleftrightarrow \left((2A_2+4B_1)+8B_2x\right)\cos 2x + \\ + \left((2B_2-4A_1)-8A_2x\right)\sin 2x = x\cos 2x$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2A_2 + 4B_1 = 0 \\ 8B_2 = 1 \\ 2B_2 - 4A_1 = 0 \\ -8A_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} B_1 = -\frac{1}{2}A_2 = 0 \\ B_2 = 1/8 \\ A_1 = \frac{1}{2}B_2 = 1/16 \\ A_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y_p(x) = \frac{1}{16} x \cos 2x + \frac{1}{8} x^2 \sin 2x$$

8

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) =$$

$$= \frac{1}{16} x \cos 2x + \frac{1}{8} x^2 \sin 2x + C \cos 2x + D \sin 2x =$$

d.v.s. $\boxed{y(x) = \left(C + \frac{1}{16} x\right) \cos 2x + \left(D + \frac{1}{8} x^2\right) \sin 2x}$