

Inlämningsuppgift för Block V

Inlämningsuppgift för Block V: *Numeriska metoder* som ska vara inlämnad senast fredag 13 januari kl. 24:00. Inlämningsuppgiften består av ett antal problem som tillsammans är värda 9 poäng av totalt 45 poäng för alla fem blockens inlämningsuppgifter där 10p, 15p, 20p, 25p, 30p och 35p ger +0.5p, +1p, +1.5p, +2p, +2.5p resp. +3p på tentamina med min signatur.

Samarbeta gärna med kurskamraterna men lämna in individuella lösningar! Lämna inlämningsuppgiften till mig personligen (på föreläsningen eller i rum Q291A), i mitt fack (finns vid Q-husets studentexpedition) eller via e-post (jens.persson@miun.se).

1. Ekvationen $x - \arctan x = 1$ har exakt en rot på intervallet $[1, 5]$.

Använd startpunkten $x_0 = 3$ och bestäm roten m.h.a.

- a) Fixpunktsmetoden till 7 decimalers noggrannhet. Bevisa genom verifiering av *Fixpunktssatsen* att fixpunktsmetoden verkligen kan tillämpas på din införda funktion f . (Tips: Visa först att f är växande vilket ger värdemängden $[f(1), f(5)]$ på $[1, 5]$; detta ger (i). Visa sedan att derivatan aldrig överstiger 1 på $[1, 5]$; detta ger (ii) ty $\frac{|f(u)-f(v)|}{|u-v|} \leq \max_{x \in [1,5]} |f'(x)|$ eftersom f är deriverbar på $[1, 5]$.) (2p)

- b) Newtons metod till 9 decimalers noggrannhet. (1p)

2. Bestäm T_8 , M_8 , S_8 , T_{16} och S_{16} för integralen

$$I = \int_1^5 \frac{dx}{x^2}$$

samt uppskatta felet för varje approximation. (Tips: Approximationerna T_{16} och S_{16} kan beräknas med valfri metod; vilken sparar mest tid?) (3p)

3. Använd *den förbättrade Eulers stegmetod* för att approximera $y(2)$ givet begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = \frac{2}{x}y + 2x + 1, \\ y(1) = 0, \end{cases} \quad (*)$$

med steglängden $h = \frac{1}{4} = 0.25$. Bestäm även det för approximationen $y(x_4) \approx y_4$ exakta felet $e_4 = y(x_4) - y_4$, $x_4 = 2$. (Tips: ODE:n (*) kan lösas m.h.a. integrerande faktor.) (3p)