Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Inlämningsuppgift för Block V

Inlämningsuppgift för Block V: *Numeriska metoder* som ska vara inlämnad senast fredag 13 januari kl. 24:00. Inlämningsuppgiften består av ett antal problem som tillsammans är värda 9 poäng av totalt 45 poäng för alla fem blockens inlämningsuppgifter där 10p, 15p, 20p, 25p, 30p och 35p ger +0.5p, +1p, +1.5p, +2p, +2.5p resp. +3p på tentamina med min signatur.

Samarbeta gärna med kurskamraterna men lämna in individuella lösningar! Lämna inlämningsuppgiften till mig personligen (på föreläsningen eller i rum Q291A), i mitt fack (finns vid Q-husets studentexpedition) eller via e-post (`jens.persson@miun.se`).

1. Ekvationen $x - \arctan x = 1$ har exakt en rot på intervallet $[1, 5]$. Använd startpunkten $x_0 = 3$ och bestäm roten m.h.a.

a) Fixpunktsmetoden till 7 decimalers noggrannhet. Bevisa genom verifiering av *Fixpunktssatsen* att fixpunktsmetoden verkligen kan tillämpas på din införda funktion f. (Tips: Visa först att f är växande vilket ger värdemängden $[f(1), f(5)]$ på $[1, 5]$; detta ger (i). Visa sedan att derivatan aldrig överstiger 1 på $[1, 5]$; detta ger (ii) ty $\frac{|f(u)-f(v)|}{|u-v|} \leqslant \max_{x\in[1,5]} |f'(x)|$ eftersom f är deriverbar på $[1, 5]$.) (2p)

b) Newtons metod till 9 decimalers noggrannhet. (1p)

2. Bestäm T_8, M_8, S_8, T_{16} och S_{16} för integralen

$$I = \int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

samt uppskatta felet för varje approximation. (Tips: Approximationerna T_{16} och S_{16} kan beräknas med valfri metod; vilken sparar mest tid?) (3p)

3. Använd *den förbättrade Eulers stegmetod* för att approximera $y(2)$ givet begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = \frac{2}{x}y + 2x + 1, & (*) \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

med steglängden $h = \frac{1}{4} = 0.25$. Bestäm även det för approximationen $y(x_4) \approx y_4$ exakta felet $e_4 = y(x_4) - y_4$, $x_4 = 2$. (Tips: ODE:n $(*)$ kan lösas m.h.a. integrerande faktor.) (3p)

LÖSNINGAR TILL INLUPP V

1. Ekvation $x - \arctan x = 1$ har exakt <u>en</u> rot på $[1,5]$.

a) Skriv om ekvation på formen $f(x) = x$:

$$x - \arctan x = 1 \Leftrightarrow \arctan x + 1 = x$$

d.v.s. $f(x) = \arctan x + 1$. Vill nu visa att f uppfyller Fixpunktssatsen (s.3 F13).

<u>(i)</u>: $f(x) = \arctan x + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$

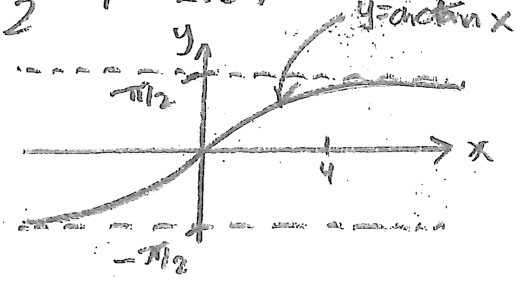
d.v.s. f växande på $[1,5] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Största värde $f(5)$ och minsta värde $f(1)$, d.v.s. $f(x) \in [f(1), f(5)]$

$$\begin{cases} f(1) = \arctan 1 + 1 = \frac{\pi}{4} + 1 \approx 1.79 \\ f(5) = \arctan 5 + 1 < \frac{\pi}{2} + 1 \approx 2.57 \end{cases}$$

$\Rightarrow [f(1), f(5)] \approx$

$\approx [1.79, 2.57] \subset [1,5]$



d.v.s. $x \in [1,5]$

$\Rightarrow f(x) \in [1,5]$; (i) verifierat!

<u>(ii)</u>: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ är avtagande på $[1,5]$ så

$$\max_{x \in [1,5]} |f'(x)| = f'(1) = \frac{1}{1+1^2} = 1/2$$

$$\Rightarrow \frac{|f(u) - f(v)|}{|u-v|} \leq \max_{x \in [1,5]} \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|$$

$$= \max_{x \in [1,5]} |f'(x)| = 1/2 \quad \forall u,v \in [1,5] \quad (2)$$

$$\Rightarrow |f(u)-f(v)| \leq \frac{1}{2}|u-v| \quad \forall u,v \in [1,5]$$

d.v.s. $K = 1/2 \in (0,1)$ i formuleringen av Fixpunktssatsen.

$\Rightarrow$ (ii) verifierat!

Vi kan nu garantera att $\{x_n\}$ där $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_0 = 3 \in [1,5]$, kommer konvergera. Vi får:

$x_0 = 3 \quad (= 3.\underbrace{0000000}_{7\text{ decimaler}}00\ldots)$

$x_1 = f(x_0) = \arctan x_0 + 1 = \arctan 3 + 1 =$

$= 2.\underbrace{2490457}72\ldots$

$x_2 = f(x_1) = \arctan x_1 + 1 = \arctan 2.249045772\ldots + 1 =$

$= 2.\underbrace{1524145}43\ldots$

$x_3 = f(x_2) = \arctan x_2 + 1 = \arctan 2.152414543\ldots + 1 =$

$= 2.\underbrace{1358720}98\ldots$

$x_4 = f(x_3) = \arctan x_3 + 1 = 2.\underbrace{1329166}64\ldots$

$x_5 = f(x_4) = 2.\underbrace{1323846}94\ldots$

$x_6 = 2.\underbrace{1322888}12\ldots$

$x_7 = 2.\underbrace{1322715}27\ldots$

$x_8 = 2.\underbrace{1322684}10\ldots$

$x_9 = 2.\underbrace{1322678}48\ldots$

$x_{10} = 2.\underbrace{1322677}47\ldots$

③ $x_{11} = 2.\underbrace{1322677}29\ldots$

$x_{12} = 2.\underbrace{1322677}25\ldots$

$x_{13} = 2.\underbrace{1322677}25\ldots$

Det verkar som att roten till 7 decimaler

är $\underline{\underline{r = 2.1322677}}$.

b) Skriv om ekvation på formen $f(x) = 0$:

$$x - \arctan x = 1 \Leftrightarrow x - \arctan x - 1 = 0$$

d.v.s. $f(x) = x - \arctan x - 1$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

Formel för Newtons metod:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - \arctan x_n - 1}{\frac{x_n^2}{1+x_n^2}} =$$

$$= \frac{x_n^3}{x_n^2} - \frac{(x_n - \arctan x_n - 1)(1+x_n^2)}{x_n^2} =$$

$$= \frac{1}{x_n^2}\left[x_n^3 - (x_n + x_n^3 - \arctan x_n - x_n^2 \arctan x_n - 1 - x_n^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{x_n^2}\left(-x_n + \arctan x_n + x_n^2 \arctan x_n + 1 + x_n^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n^2}(1+x_n^2)\arctan x_n + \frac{1}{x_n^2}(1+x_n^2) =$$

$$= \frac{1+x_n^2}{x_n^2}(\arctan x_n + 1) - \frac{1}{x_n} =$$

$$= (x_n^{-2}+1)(1+\arctan x_n) - x_n^{-1}$$

Vi får nu:

$$x_0 = 3 \quad (= 3.\underbrace{000000000}_{9\text{ decimaler}}0\ldots)$$

$$x_1 = (x_0^{-2}+1)(1+\arctan x_0) - x_0^{-1} =$$

$$= (3^{-2}+1)(1+\arctan 3) - 3^{-1} = 2.\underbrace{165606413}7\ldots$$

$$x_2 = (x_1^{-2}+1)(1+\arctan x_1) - x_1^{-1} =$$

$$= (2.1656064137\ldots^{-2}+1)(1+\arctan 2.1656064137\ldots)$$

$$- 2.1656064137\ldots^{-1} =$$

$$= 2.\underbrace{132359002}1\ldots$$

$$x_3 = (x_2^{-2}+1)(1+\arctan x_2) - x_2^{-1} = 2.\underbrace{132267725}9\ldots$$

$$x_4 = 2.\underbrace{132267725}2\ldots$$

$$x_5 = 2.\underbrace{132267725}2\ldots$$

$$x_6 = 2.\underbrace{132267725}2\ldots$$

Det verkar som att roten till 9 decimaler är $\underline{\underline{r = 2.132267725.}}$

---

2. Integral $I = \int_1^5 \frac{dx}{x^2}$.

Delintervallängd $h = \frac{5-1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ för $n=8$. Vi får:

- $$T_8 = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_6 + y_7 + \frac{1}{2}y_8\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1^2} + \frac{1}{(3/2)^2} + \frac{1}{(4/2)^2} + \cdots + \frac{1}{(8/2)^2} + \frac{1}{(9/2)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{5^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{9} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{4}{64} + \frac{4}{81} + \frac{1}{50}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{25+1}{50}\right) + \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{16} + \cdots + \frac{2}{64} + \frac{2}{81}\right) =$$

5

$$= \frac{13}{50} + 2\underbrace{\left(1/9 + 1/16 + \dots + 1/64 + 1/81\right)}_{\text{kvadrater i nämnarna}} = \underline{\underline{0.8395354\dots}}$$

- $$M_8 = h\left(f(m_1) + f(m_2) + \dots + f(m_7) + f(m_8)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+1/4)^2} + \frac{1}{(1+1/2+1/4)^2} + \frac{1}{(1+2/2+1/4)^2} + \dots + \frac{1}{(1+6/2+1/4)^2} + \frac{1}{(1+7/2+1/4)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(5/4)^2} + \frac{1}{(7/4)^2} + \frac{1}{(9/4)^2} + \dots + \frac{1}{(17/4)^2} + \frac{1}{(19/4)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{16}{25} + \frac{16}{49} + \frac{16}{81} + \dots + \frac{16}{289} + \frac{16}{361}\right) =$$

$$= 8\underbrace{\left(1/25 + 1/49 + 1/81 + \dots + 1/289 + 1/361\right)}_{\text{kvadrater i nämnarna}} =$$

$$= \underline{\underline{0.7808816\dots}}$$

- $$S_8 = \frac{h}{3}\left(\sum y_{\text{ändpunkter}} + 4\sum y_{\text{udda}} + 2\sum y_{\text{jämna}}\right) =$$

$$= \frac{1/2}{3}\left((y_0 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{5^2}\right) + 4\left(\frac{1}{(3/2)^2} + \frac{1}{(5/2)^2} + \frac{1}{(7/2)^2} + \frac{1}{(9/2)^2}\right) + 2\left(\frac{1}{(4/2)^2} + \frac{1}{(6/2)^2} + \frac{1}{(8/2)^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\left(1 + \frac{1}{25}\right) + 4\left(\frac{4}{9} + \frac{4}{25} + \frac{4}{49} + \frac{4}{81}\right) + 2\left(\frac{4}{16} + \frac{4}{36} + \frac{4}{64}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{26}{25} + 16(1/9 + 1/25 + 1/49 + 1/81) + 8(1/16 + 1/36 + 1/64)\right) =$$

$$= \frac{13}{75} + \frac{8}{3}(1/9 + 1/25 + 1/49 + 1/81) + \frac{4}{3}(1/16 + 1/36 + 1/64) =$$

$$= \frac{13}{75} + \frac{8}{3}(1/9 + 1/25 + 1/49 + 1/81) + \frac{1}{3}(1/4 + 1/9 + 1/16) =$$

$= \underline{\underline{0.8048435\ldots}}$ ⑥

- $T_{16} = T_{2\cdot 8} = \dfrac{T_8 + M_8}{2} = \dfrac{0.8395354\ldots + 0.7808816\ldots}{2} =$

$= \underline{\underline{0.8102085\ldots}}$

- $S_{16} = S_{2\cdot 8} = \dfrac{T_8 + 2M_8}{3} = \dfrac{0.8395354\ldots + 2\cdot 0.7808816\ldots}{3} =$

$= \underline{\underline{0.8004328\ldots}}$

- Feluppskattningar: $f(x) = 1/x^2 \Rightarrow f'(x) = -2/x^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x) = 6/x^4 \Rightarrow f'''(x) = -24/x^5 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 120/x^6$

$|f''(x)| = |6/x^4| = 6/x^4 \leq 6/1^4 = 6$ på $[1,5]$

och

$|f^{(4)}(x)| = |120/x^6| = 120/x^6 \leq 120/1^6 = 120$ på $[1,5]$

Detta ger feluppskattningarna

$$|I - T_8| \leq \frac{6(5-1)}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6\cdot 4}{12}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \underline{\underline{0.5}}$$

$$|I - M_8| \leq \frac{6(5-1)}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6\cdot 4}{24}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \underline{\underline{0.25}}$$

$$|I - S_8| \leq \frac{120(5-1)}{180}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{120\cdot 4}{180}\,\frac{1}{16} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{6} =$$

$$= \underline{\underline{0.1666666\ldots}}$$

$$|I - T_{16}| \leq \frac{6(5-1)}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{6\cdot 4}{12}\,\frac{1}{16} = \frac{1}{8} = \underline{\underline{0.125}}$$

$$|I - S_{16}| \leq \frac{120(5-1)}{180}\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{120\cdot 4}{180}\,\frac{1}{256} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{64} =$$

$$= 1/96 = \underline{\underline{0.0104166\ldots}}$$

(7) **3.** Begynnelsevärdesproblem $\begin{cases} y' = \frac{2}{x}y + 2x + 1, & (*) \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Bestämma $y(2)$ med steglängd $h = 1/4 = 0.25$.

Vi vet att BVP:et $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ med

steglängd h ger med den förbättrade Euler-stegmetoden:

$$\begin{cases} x_n = x_0 + nh \\ u_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \longleftarrow \text{"Vanligt" Eulersteg} \\ y_{n+1} = y_n + h\dfrac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2} \end{cases}$$

Här: $f(x,y) = \frac{2}{x}y + 2x + 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $h = 1/4 = 0.25$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n = 1 + n \cdot 1/4 = 1 + n/4 \\ u_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{x_n}y_n + 2x_n + 1\right) = y_n + \frac{1}{2x_n}y_n + \frac{x_n}{2} + \frac{1}{4} = \\ \quad = (1 + 1/2x_n)y_n + \frac{1}{2}x_n + 1/4 \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{x_n}y_n + 2x_n + 1\right) + \left(\frac{2}{x_{n+1}}u_{n+1} + 2x_{n+1} + 1\right)\right] \\ \quad = y_n + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{y_n}{x_n} + x_n + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{u_{n+1}}{x_{n+1}} + x_{n+1} + \frac{1}{2}\right)\right] = \\ \quad = (1 + 1/4x_n)y_n + \frac{u_{n+1}}{4x_{n+1}} + \frac{x_n + x_{n+1}}{4} + 1/4 \end{cases}$$

Vi får iterationerna:

$$n=1 \begin{cases} x_1 = 1 + 1/4 = 5/4 = 1.25 \\ u_1 = (1 + 1/2x_0)y_0 + \frac{1}{2}x_0 + 1/4 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} = \\ \quad = 3/4 = 0.75 \\ y_1 = (1 + 1/4x_0)y_0 + \frac{u_1}{4x_1} + \frac{x_0 + x_1}{4} + 1/4 = \end{cases}$$

$$= 0 + \frac{3/4}{5} + \frac{1+5/4}{4} + 1/4 = \frac{3}{20} + \frac{9}{16} + \frac{1}{4} = 77/80 =$$ ⑧

$$= 0.9625$$

$n=2$

$$\begin{cases} x_2 = 1 + 2/4 = 3/2 = 1.5 \\ u_2 = (1 + 1/2x_1)y_1 + \frac{1}{2}x_1 + 1/4 = (1 + 1/\tfrac{5}{2})\frac{77}{80} + \frac{5}{8} + 1/4 = \\ \quad = 2.2225 \quad (= 889/400) \\ y_2 = (1 + 1/4x_1)y_1 + \frac{u_2}{4x_2} + \frac{x_1 + x_2}{4} + 1/4 = \\ \quad = (1 + 1/5)\frac{77}{80} + \frac{889/400}{6} + \frac{5/4 + 3/2}{4} + 1/4 = \\ \quad = 2.4629166\ldots \quad (= \frac{5911}{2400}) \end{cases}$$

$n=3$

$$\begin{cases} x_3 = 1 + 3/4 = 7/4 = 1.75 \\ u_3 = (1 + 1/2x_2)y_2 + \frac{1}{2}x_2 + 1/4 = (1 + 1/3)\frac{5911}{2400} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \\ \quad = 4.2838888\ldots \quad (= 7711/1800) \\ y_3 = (1 + 1/4x_2)y_2 + \frac{u_3}{4x_3} + \frac{x_2 + x_3}{4} + \frac{1}{4} = \\ \quad = (1 + 1/6)\frac{5911}{2400} + \frac{7711/1800}{7} + \frac{3/2 + 7/4}{4} + \frac{1}{4} = \\ \quad = 4.5478869\ldots \quad (= 152809/33600) \end{cases}$$

$n=4$

$$\begin{cases} x_4 = 1 + 4/4 = 2 \\ u_4 = (1 + 1/2x_3)y_3 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4} = (1 + 1/\tfrac{7}{2})\frac{152809}{33600} + \frac{7}{8} + \frac{1}{4} = \\ \quad = 6.9722831\ldots \quad (= 546627/78400) \\ y_4 = (1 + 1/4x_3)y_3 + \frac{u_4}{4x_4} + \frac{x_3 + x_4}{4} + \frac{1}{4} = \\ \quad = (1 + 1/7)\frac{152809}{33600} + \frac{546627/78400}{8} + \frac{7/4 + 2}{4} + \frac{1}{4} = \\ \quad = 7.2566204\ldots \end{cases}$$

d.v.s. $\underline{y(2) = y(x_4) \approx y_4 = 7.2566204\ldots}$

(9)

Exakt lösning: (*): $y' = \frac{2}{x}y + 2x + 1 \Leftrightarrow y' + \left(-\frac{2}{x}\right)y = 2x+1$

Detta är en första ordningens linjära ODE (se s. 9 i F11) och löses m.h.a. integrerande faktor.

Den IF:n är i detta fall $e^{\mu(x)}$ där

$$\mu(x) = \int\left(-\frac{2}{x}\right)dx = -2\ln|x|$$

$$\Rightarrow IF = e^{\mu(x)} = e^{-2\ln|x|} =$$

$$= \left(e^{\ln|x|}\right)^{-2} = |x|^{-2} = 1/x^2$$

Vi får då:

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = \frac{2x+1}{x^2}$$

d.v.s. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Vilket integreras: $$\frac{1}{x^2}y = \int\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$= 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

och vi löser ut y: $y(x) = 2x^2\ln|x| - x + Cx^2$

Villkoret $y(1) = 0$ ger: $0 = 2\cdot 1^2 \cdot \underbrace{\ln|1|}_{=\ln 1 = 0} - 1 + C\cdot 1^2$

$$\Leftrightarrow 0 = C - 1 \Leftrightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow y(x) = 2x^2\ln x - x + x^2, \quad x > 0$$

$\Rightarrow y(2) = 2\cdot 2^2\ln 2 - 2 + 2^2 =$ (kan uteslutas fallet $x<0$)

$$= 8\ln 2 + 2 = 7.5451774\ldots$$

Felet e_4 blir därför (10)

$$e_4 = y(x_4) - y_4 = y(2) - y_4 =$$
$$= 7.5451774\ldots - 7.2566204\ldots =$$
$$= \underline{0.2885570\ldots}$$