Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Kompletterande uppgifter för Tenta 2012-01-13

Kompletterande uppgifter för uppfyllande av lärandemålen. Lämnas in senast 12 april 2012 (datum för omtentamen), helst i januari eller början av februari.

Varje uppgift är värd 3 poäng och motsvarar ett ej uppfyllt lärandemål. Det krävs minst 1.5 poäng på en uppgift för att det motsvarande lärandemålet ska anses vara uppfyllt och om inte detta sker så fås uppgiften göras om tills minst 1.5 poäng erhålls.

Följande uppgifter ska lösas av respektive student (koder från tentan):

Ö-7: 1 & 3; **Ö-8**: 3; **Ö-41**: 1, 2, 3 & 4; **S-122**: 1 & 3.

Lämna lösningarna till de kompletterande uppgifterna till mig personligen (i rum Q291A), i mitt fack (finns vid Q-husets studentexpedition) eller via e-post (`jens.persson@miun.se`).

De rätta lösningarna kommer att läggas upp på kurshemsidan så snart den sista kompletteringen är godkänd.

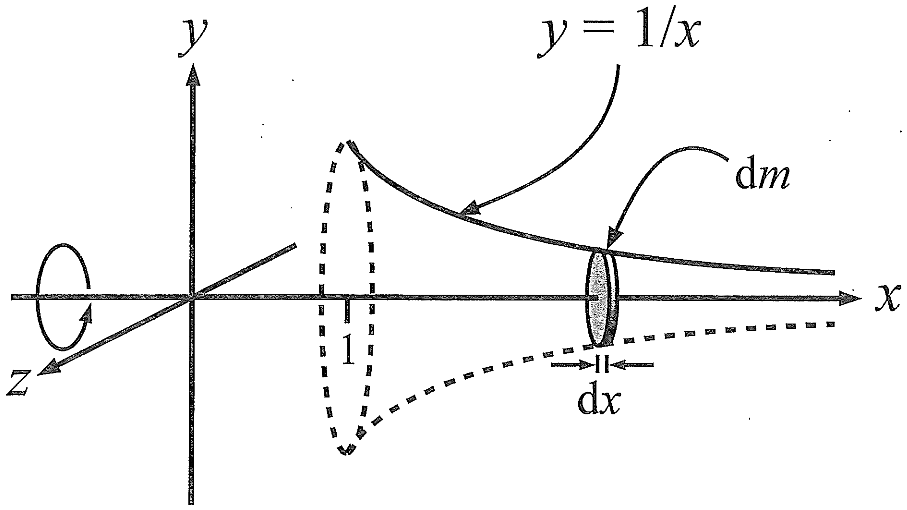
1. **(Taylors sats.)** Approximera $\sin 10°$ med ett fel på högst 0.01 genom att bestämma Taylorpolynomet $P_n(x)$ till $f(x) = \sin x$ kring $x = 0$ för tillräckligt stort n.
(Tips: Utnyttja konverteringsregeln $180° = \pi$ rad och att, enligt Taylors sats, $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$ där $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$ och $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} x^{n+1}$ för något $s \in (0, x)$ om $x > 0$. Notera $|\sin s|, |\cos s| \leqslant 1$ för alla $s \in (0, x)$.) (3p)

2. **(Beräkning av integraler.)** Beräkna

a) generaliserade integralen $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$; (Tips: Substitution.) (1p)

b) bestämda integralen $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$; (Tips: Partialintegration två ggr.) (1p)

c) integralen $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x}\,\mathrm{d}x$; (Tips: Partialbråksuppdelning.) (1p)



Figur 1. Solid Torricellis trumpet i Uppgift 3.

3. **(Tillämpning av integralkalkyl.)** Betrakta en solid Torricellis trumpet definierad genom en rotation av kurvan $y = \frac{1}{x}$ kring x-axeln mellan $x = 1$ och $x = +\infty$; masstätheten i x hos trumpeten är $\delta(x) = \delta\frac{2x}{1+x^2}$ där δ är masstätheten vid trumpetmynningen $x = 1$. Se Figur 1. Beräkna den oändligt långa trumpetens masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.
(Tips: Koordinaterna $\bar{y}$ och $\bar{z}$ fås direkt ur rotationssymmetrin och för $\bar{x}$ gäller att $\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m}$ där $M_{x=0} = \int x\,\mathrm{d}m$ (momentet), $m = \int \mathrm{d}m$ (massan); skivmassan $\mathrm{d}m$ ges ur masstäthet $\delta(x)$, skrivradie y och skivtjocklek $\mathrm{d}x$.) (3p)

4. **(Lösning av differentialekvationer.)** Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 2\mathrm{e}^x, & (*) \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

(Tips: Ingen term i partikulärlösningen får lösa den homogena ekvationen associerad till $(*)$. För detaljer, se t.ex. sid. 10–12 i F12; avsn. 17.6 i kursboken; lösningen till uppg. 7 i Tentamen 2012-01-13 etc.) (3p)

Lycka till!

LÖSNINGAR TILL KOMPLETTERANDE UPPGIFTER FÖR TENTAMEN 2012-01-13

1. (Taylors sats.)

Approximera $\sin 10^\circ$ med fel högst 0.01 genom bestämma $P_n(x)$ till $f(x) = \sin x$ kring $x=0$ för tillräckligt stort n.

Man ska alltid arbeta med radianer så låt oss konvertera 10° till radianer:

$$180^\circ = \pi \text{ rad} \Leftrightarrow 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \Leftrightarrow 10^\circ = 10\frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{18} \text{ rad}$$

d.v.s. vi ska approximera $\sin \frac{\pi}{18}$.

Eftersom $f(x) = P_n + E_n(x)$ där $\begin{cases} P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i \\ E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} x^{n+1} \end{cases}$

f.n. $s \in (0, x)$ om $x > 0$ (där vid har tagit Taylorpolynomet kring $x=0$) så gäller det att

$$\sin \frac{\pi}{18} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \left(\frac{\pi}{18}\right)^i}_{= P_n(\frac{\pi}{18})} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} \left(\frac{\pi}{18}\right)^{n+1}}_{= E_n(\frac{\pi}{18})}$$

där $f(x) = \sin x$ och $s \in (0, \frac{\pi}{18})$.

Innan vi bemödar oss med $P_n(\frac{\pi}{18})$ så bestämmer vi ett tillräckligt stort n (men helst inte större!)

Så att $|E_n(\frac{\pi}{18})| < 0.01$. Vi får: ②

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow$$

$$\Downarrow \qquad \Rightarrow |E_0(\tfrac{\pi}{18})| = \left|\frac{f'(s)}{1!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^1\right| = \underbrace{|\cos s|}_{\leq 1}\frac{\pi}{18} \leq \frac{\pi}{18} =$$

$$= 0.1745329\ldots, \text{ för stort!}$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x \Rightarrow$$

$$\Downarrow \qquad \Rightarrow |E_1(\tfrac{\pi}{18})| = \left|\frac{f''(s)}{2!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2\right| = \frac{1}{2}\underbrace{|\sin s|}_{\leq 1}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{\pi^2}{648} = 0.0152308\ldots, \text{ för stort!}$$

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f'''(x) = -\cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |E_2(\tfrac{\pi}{18})| = \left|\frac{f'''(s)}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3\right| = \frac{1}{6}\underbrace{|\cos s|}_{\leq 1}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \leq$$

$$\leq \frac{\pi^3}{34992} = 0.0008860\ldots < 0.01, \text{ ok!}$$

Det gäller alltså att $n=2$ är tillräckligt stort:

$$P_2\left(\frac{\pi}{18}\right) = \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^i =$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^1 + \frac{f''(0)}{2!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 =$$

$$= \underbrace{(\sin 0)}_{=0} + \underbrace{(\cos 0)}_{=1}\frac{\pi}{18} + \frac{1}{2}\underbrace{(-\sin 0)}_{=0}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 = \frac{\pi}{18} =$$

$$= 0.1745329\ldots$$

d.v.s. $\boxed{\text{sin } 10° \approx 0.1745329 \text{ med ett fel på mindre än } 0.01.}$

③ **2.** (Beräkning av integraler)

a) $\int_{-1}^{3} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx$ = [Generaliserad integral av Typ II; se s.1 i F9] =

$$= \lim_{c\to -1+} \int_{c}^{3} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx =$$

$$= \left[\begin{cases} u = x+1 \Leftrightarrow x = u-1 \\ du = dx \end{cases}, \begin{cases} x=3 \Leftrightarrow u = 3+1=4 \\ x=c \Leftrightarrow u = c+1 \end{cases} \right] =$$

$$= \lim_{c\to -1+} \int_{c+1}^{4} \frac{(u-1)^2}{\sqrt{u}}\,du = \lim_{c\to -1+} \int \frac{u^2-2u+1}{u^{1/2}}\,du =$$

$$= \lim_{c\to -1+} \int_{c+1}^{4} (u^{3/2} - 2u^{1/2} + u^{-1/2})\,du =$$

$$= \lim_{c\to -1+} \left(\frac{2}{5}u^{5/2} - 2\frac{2}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2} \right)\Big|_{c+1}^{4} = [4=2^2] =$$

$$= \lim_{c\to -1+} \Big[\left(\frac{2}{5}(2^2)^{5/2} - \frac{4}{3}(2^2)^{3/2} + 2(2^2)^{1/2} \right) - \left(\frac{2}{5}(c+1)^{5/2} - \frac{4}{3}(c+1)^{3/2} + 2(c+1)^{1/2} \right) \Big] =$$

$$= \left(\frac{2}{5}2^5 - \frac{4}{3}2^3 + 2\cdot 2 \right) - \underbrace{\left(\frac{2}{5}0^{5/2} - \frac{4}{3}0^{3/2} + 2\cdot 0^{1/2} \right)}_{=0} =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot 32 - \frac{4}{3}\cdot 8 + 4 - 0 =$$

$$= \frac{64}{5} - \frac{32}{3} + 4 = \frac{3\cdot 64 - 5\cdot 32 + 15\cdot 4}{15} =$$

$$= \frac{192 - 160 + 60}{15} = \boxed{\frac{92}{15}} \quad (= 6.1\overline{3})$$

b) $$\int_1^e (\ln x)^2\, dx = \left[\begin{cases} u=(\ln x)^2 \\ du = 2(\ln x)\frac{1}{x}\,dx \end{cases}, \begin{cases} dV = dx \\ V = x \end{cases}\right] =$$

$$= (\ln x)^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot 2(\ln x)\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= x(\ln x)^2 \Big|_1^e - 2\int_1^e \ln x\, dx =$$

$$= \left[\begin{cases} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\,dx \end{cases}, \begin{cases} dV = dx \\ V = x \end{cases}\right] =$$

$$= x(\ln x)^2 \Big|_1^e - 2\left((\ln x)x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\,dx\right) =$$

$$= x(\ln x)^2 \Big|_1^e - 2x(\ln x)\Big|_1^e + 2\int_1^e dx =$$

$$= x(\ln x)^2 \Big|_1^e - 2x(\ln x)\Big|_1^e + 2x\Big|_1^e =$$

$$= x\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right)\Big|_1^e =$$

$$= e\cdot\Big(\underbrace{(\ln e)}_{=1}{}^2 - 2\underbrace{\ln e}_{=1} + 2\Big) - 1\cdot\Big(\underbrace{(\ln 1)}_{=0}{}^2 - 2\underbrace{\ln 1}_{=0} + 2\Big) =$$

$$= e(1^2 - 2 + 2) - (0^2 - 0 + 2) = \underline{\underline{e - 2}}$$

c) $$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx = (*)$$

- <u>Faktorisera integrandens nämnare:</u>

$$x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6)$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-6)} =$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} =$$

⑤ $$= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$$

$\Longrightarrow$ integranden är $\dfrac{x+1}{x(x-2)(x+3)}$

- Partialbråksuppdela integranden:

$$\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \underset{(\text{P.B.U.})}{[\text{ansätt}]} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)} =$$

$$= \frac{A(x^2+x-6) + B(x^2+3x) + C(x^2-2x)}{x(x-2)(x+3)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (A+3B-2C)x - 6A}{x(x-2)(x+3)} =$$

Identifiera: $$\begin{cases} A+B+C = 0 \\ A+3B-2C = 1 \\ -6A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B+C = -A = 1/6 \\ 3B-2C = 1-A = 7/6 \\ A = -1/6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = 1/6 - C \\ 3(1/6 - C) - 2C = 7/6 \\ A = -1/6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1/6 - C \\ -5C = 7/6 - 3/6 = 4/6 = 2/3 \\ A = -1/6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = 1/6 - (-2/15) = 5/30 + 4/30 = 9/30 = 3/10 \\ C = -2/15 \\ A = -1/6 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (*) = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{-1/6}{x} + \frac{3/10}{x-2} + \frac{-2/15}{x+3} \right) dx =$$

$$= \int \left(-\frac{1}{6}\frac{1}{x} + \frac{3}{10}\frac{1}{x-2} - \frac{2}{15}\frac{1}{x+3} \right) dx =$$

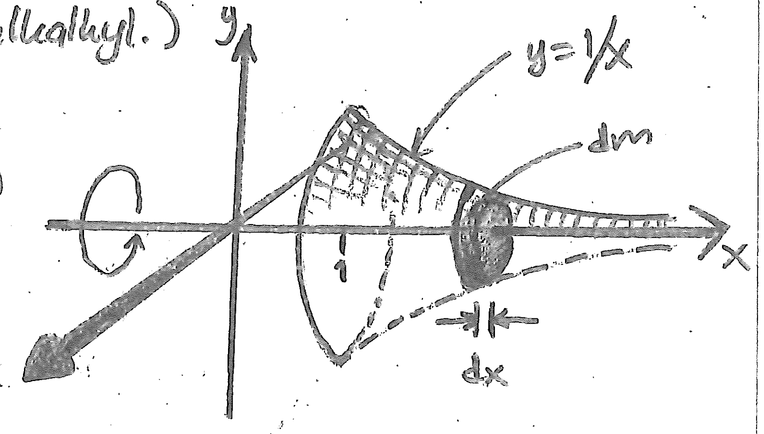
$$= \boxed{-\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + C}$$

---

3. (Tillämpning av integralkalkyl.)

Torricellis trumpet:

(Även kallad "Gabriels horn".)



Masstäthet:

$$\delta(x) = \delta \frac{2x}{1+x^2}$$

Skivmassan dm ges enligt:

$$dm = \underbrace{\delta(x)}_{\text{masstäthet}} \underbrace{dV}_{\text{volym}} = \delta(x) \underbrace{A(x)}_{\text{area}} \underbrace{dx}_{\text{tjocklek}} =$$

$$= \delta(x) \cdot \pi \underbrace{y}_{\text{radie} = 1/x}{}^2 \cdot dx = \delta \frac{2x}{1+x^2} \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

$$= 2\pi\delta \frac{1}{x(1+x^2)} dx \qquad (\delta = \text{konst.})$$

• **Massa:** $$m = \int_{x=1}^{x=+\infty} dm = \int_1^{\infty} 2\pi\delta \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \begin{bmatrix}\text{Gen.} \\ \text{int.} \\ \text{Typ I}\end{bmatrix} =$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x(1+x^2)} = (*)$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = [\text{Partialbråksuppdelningsansättning}] =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} =$$

$$= \frac{A(1+x^2) + (Bx+C)x}{x(1+x^2)} =$$

⑦ $$= \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(1+x^2)}$$

Identifiera: $\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$

$$\Longrightarrow (*) = 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \int_1^R \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \int_1^R \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Big|_1^R =$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \Big(\left(\ln R - \frac{1}{2}\ln(1+R^2)\right) -$$
$$- \big(\underbrace{\ln 1}_{=0} - \frac{1}{2}\ln(1+1^2)\big)\Big) =$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \left(\ln R - \ln\sqrt{1+R^2} + \frac{1}{2}\ln 2\right) =$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \left(\ln \frac{R}{\sqrt{1+R^2}} + \frac{1}{2}\ln 2\right) =$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \Big(\ln \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1/R^2+1}}_{\to 1}} + \frac{1}{2}\ln 2\Big) =$$

$$= 2\pi\delta \Big(\underbrace{\ln 1}_{=0} + \frac{1}{2}\ln 2\Big) = \pi\delta \ln 2$$

• Moment kring $x=0$:

$$M_{x=0} = \int_{x=1}^{x=+\infty} x\,dm = \int_1^\infty x \cdot 2\pi\delta \frac{1}{x(1+x^2)}dx =$$

$$= [\text{Gen. int. Typ I}] =$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{1+x^2} =$$

⑧

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \left(\arctan x\right)\Big|_1^R$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \left(\underbrace{\arctan R}_{\to \pi/2} - \underbrace{\arctan 1}_{=\pi/4}\right) =$$

$$= 2\pi\delta\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\pi\delta\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2\delta}{2}$$

$$\Longrightarrow \bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\pi^2\delta/2}{\pi\delta\ln 2} = \frac{\pi}{2\ln 2} \qquad (=2.26618\ldots)$$

P.g.a. rotationssymmetrin gäller $\bar{y} = \bar{z} = 0$.

$$\boxed{\text{Torricellis trumpet med angiven masstäthet har masscentrum } (\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(\frac{\pi}{2\ln 2}, 0, 0\right) \text{ givet koordinatsystemet i figuren.}}$$

---

4. (Lösning av differentialekvationer.)

Begynnelsevärdesproblem
$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 2e^x, & (*) \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

De allmänna lösningarna kan skrivas $y = y_h + y_p$ där y_h är allmän lösning till $(*)$:s associerade homogena ekvation och y_p är en partikulärlösning till $(*)$.

- Homogen ekvation: $y'' - 2y' + y = 0$

Karakteristisk ekvation: $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \quad \text{(dubbelrot)}$$

$$\Longrightarrow y_h(x) = (Cx + D)e^x$$

(9) • Partikulärlösning: $HL_{(*)} = 2e^x$

Pröva därför med (se s. 964 i kursboken eller s. 10ff i F12):

$$y_p(x) = x^m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{0:tegradspol.}}}{A} e^x, \quad m \in \{0,1,2\}$$

m=0: $y_p(x) = Ae^x$, löser homogena ekvationen (ty $y_p = y_h$ för $C=0, D=A$)

m=1: $y_p(x) = xAe^x = Axe^x$, löser också homogena ekvationen (ty $y_p = y_h$ för $C=A, D=0$)

m=2: $y_p(x) = x^2Ae^x = Ax^2e^x$, denna löser ej homogena ekvationen

$$\Longrightarrow y_p'(x) = 2Axe^x + Ax^2e^x =$$
$$= A(x^2+2x)e^x$$
$$\Longrightarrow y_p''(x) = A(2x+2)e^x + A(x^2+2x)e^x =$$
$$= A(x^2+4x+2)e^x$$

Sätt in y_p, y_p' och y_p'' i (*):

$$A(x^2+4x+2)e^x - 2A(x^2+2x)e^x + Ax^2e^x = 2e^x$$
$$\Longleftrightarrow A(x^2+4x+2-2x^2-4x+x^2)e^x = 2e^x$$
$$\Longleftrightarrow 2Ae^x = 2e^x \Longleftrightarrow A = 1$$
$$\Longrightarrow y_p(x) = 1 \cdot x^2e^x = x^2e^x$$

Lösningen blir därför:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) =$$
$$= (Cx+D)e^x + x^2 e^x =$$
$$= (x^2 + Cx + D)e^x$$

$$\Longrightarrow y_p'(x) = (2x+C)e^x + (x^2+Cx+D)e^x =$$
$$= (x^2 + (C+2)x + (C+D))e^x$$

• Begynnelsevillkoren: $\underset{\sim\sim\sim}{y(0)=0} \Leftrightarrow (0^2 + C\cdot 0 + D)e^0 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow D \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow D = 0$$

$$\Longrightarrow y_p'(x) = (x^2 + (C+2)x + C)e^x$$

$\underset{\sim\sim\sim}{y'(0)=1} \Leftrightarrow (0^2 + (C+2)\cdot 0 + C)e^0 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow C \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow C = 1$$

$$\Longrightarrow y(x) = (x^2 + 1\cdot x + 0)e^x = x(x+1)e^x$$

$$\boxed{\text{Lösningen är } \quad y(x) = x(x+1)e^x.}$$