

Kompletterande uppgifter för Omtenta 2012-04-12

Kompletterande uppgifter för uppfyllande av lärandemålen. Lämnas in senast fredag 15 juni 2012 men helst snarast möjligt.

Varje uppgift är värd 3 poäng och motsvarar ett ej uppfyllt lärandemål. Det krävs minst 1.5 poäng på en uppgift för att det motsvarande lärandemålet ska anses vara uppfyllt och om inte detta sker så fås uppgiften göras om tills minst 1.5 poäng erhålls.

Följande uppgifter ska lösas av respektive student (koder från tentan):

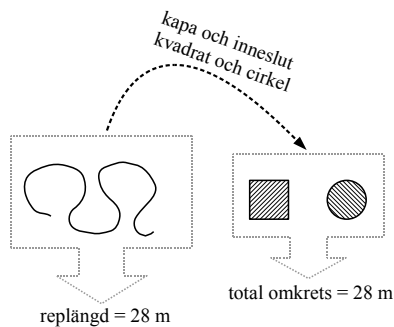
S-1: 1 & 2; **S-4:** 2, 3, 4 & 5;.

Lämna lösningarna till de kompletterande uppgifterna till mig personligen (i rum Q291A), i facket utanför Q-husets studentexpedition, via e-post (jens.persson@miun.se) eller via "vanlig" post (postadress: Jens Persson, Institutionen för teknik och hållbar utveckling, Mittuniversitetet, 831 25 Östersund).

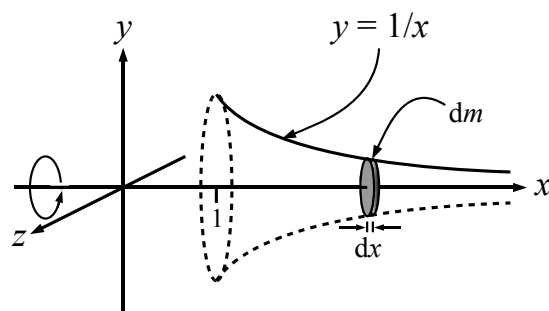
De rätta lösningarna kommer att läggas upp på kurshemsidan så snart den sista kompletteringen är godkänd, senast vecka 25.

- (Tillämpning av differentialkalkyl.)** Ett 28 m långt rep ska kapas i två delar så att den ena delen innesluter en kvadrat och den andra en cirkel; se Figur 1(a). Hur ska repet kapas så att summan av kvadratsens och cirkelns areor blir så liten som möjligt? (3p)
- (Taylors sats.)** Approximera $\sin 10^\circ$ med ett fel på högst 0.01 genom att bestämma Taylorpolynomet $P_n(x)$ till $f(x) = \sin x$ kring $x = 0$ för tillräckligt stort n .
(Tips: Utnyttja konverteringsregeln $180^\circ = \pi$ rad och att, enligt Taylors sats, $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$ där $P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$ och $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} x^{n+1}$ för något $s \in (0, x)$ om $x > 0$. Notera $|\sin s|, |\cos s| \leq 1$ för alla $s \in (0, x)$.) (3p)
- (Beräkning av integraler.)** Beräkna

a) generaliserade integralen $\int_{-1}^3 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx$; (Tips: Substitution.) (1p)



(a)



(b)

Figure 1. (a) Repet och inneslutna kvadraten och cirkeln i Uppgift 1. (b) Solid Torricelli trumpet i Uppgift 4.

b) bestämda integralen $\int_1^e (\ln x)^2 dx$; (Tips: Partialintegration två ggr.) (1p)

c) integralen $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx$; (Tips: Partialbråksuppdelning.) (1p)

4. **(Tillämpning av integralkalkyl.)** Betrakta en solid Torricelli trumpet definierad genom en rotation av kurvan $y = \frac{1}{x}$ kring x -axeln mellan $x = 1$ och $x = +\infty$; masstätheten i x hos trumpetens är $\delta(x) = \delta \frac{2x}{1+x^2}$ där δ är masstätheten vid trumpetmynningen $x = 1$. Se Figur 1(b). Beräkna den oändligt långa trumpetens masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

(Tips: Koordinaterna $\bar{y}$ och $\bar{z}$ fås direkt ur rotationssymmetrin och för $\bar{x}$ gäller att $\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m}$ där $M_{x=0} = \int x dm$ (momentet), $m = \int dm$ (massan); skivmassan dm ges ur masstäthet $\delta(x)$, skrivradie y och skivtjocklek dx .) (3p)

5. **(Lösning av differentialekvationer.)** Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 2e^x, & (*) \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

(Tips: Ingen term i partikulärlösningen får lösa den homogena ekvationen associerad till (*). För detaljer, se t.ex. sid. 10–12 i F12; avsn. 17.6 i kursboken; lösningen till uppg. 7 i Tentamen 2012-01-13 etc.) (3p)

Lycka till!