Mittuniversitetet

MID SWEDEN UNIVERSITY

Kompletterande uppgifter för Omtenta 2012-04-12

Kompletterande uppgifter för uppfyllande av lärandemålen. Lämnas in senast fredag 15 juni 2012 men helst snarast möjligt.

Varje uppgift är värd 3 poäng och motsvarar ett ej uppfyllt lärandemål. Det krävs minst 1.5 poäng på en uppgift för att det motsvarande lärandemålet ska anses vara uppfyllt och om inte detta sker så fås uppgiften göras om tills minst 1.5 poäng erhålls.

Följande uppgifter ska lösas av respektive student (koder från tentan):

S-1: 1 & 2; **S-4**: 2, 3, 4 & 5;.

Lämna lösningarna till de kompletterande uppgifterna till mig personligen (i rum Q291A), i facket utanför Q-husets studentexpedition, via e-post (`jens.persson@miun.se`) eller via "vanlig" post (postadress: Jens Persson, Institutionen för teknik och hållbar utveckling, Mittuniversitetet, 831 25 Östersund).

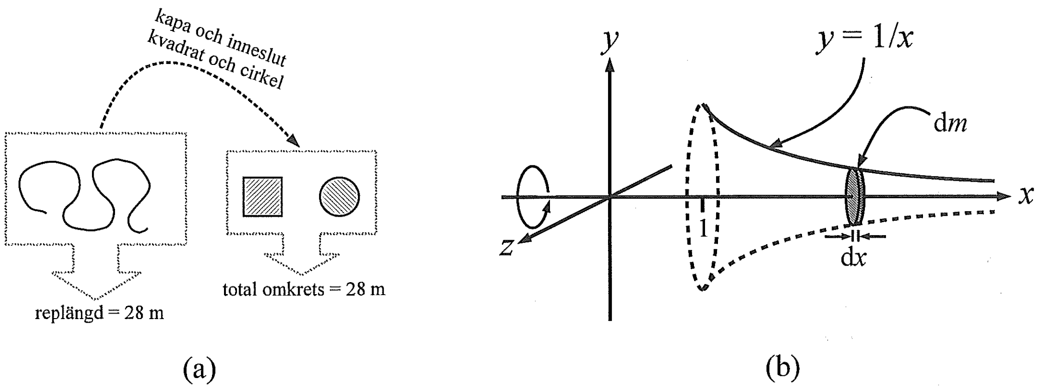
De rätta lösningarna kommer att läggas upp på kurshemsidan så snart den sista kompletteringen är godkänd, senast vecka 25.

1. (**Tillämpning av differentialkalkyl.**) Ett 28 m långt rep ska kapas i två delar så att den ena delen innesluter en kvadrat och den andra en cirkel; se Figur 1(a). Hur ska repet kapas så att summan av kvadratens och cirkelns areor blir så liten som möjligt? (3p)

2. (**Taylors sats.**) Approximera $\sin 10^\circ$ med ett fel på högst 0.01 genom att bestämma Taylorpolynomet $P_n(x)$ till $f(x) = \sin x$ kring $x = 0$ för tillräckligt stort n.
(Tips: Utnyttja konverteringsregeln $180^\circ = \pi$ rad och att, enligt Taylors sats, $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$ där $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$ och $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} x^{n+1}$ för något $s \in (0, x)$ om $x > 0$. Notera $|\sin s|, |\cos s| \leqslant 1$ för alla $s \in (0, x)$.) (3p)

3. (**Beräkning av integraler.**) Beräkna

a) generaliserade integralen $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx$; (Tips: Substitution.) (1p)



Figur 1. (a) Repet och inneslutna kvadraten och cirkeln i Uppgift 1. (b) Solid Torricellis trumpet i Uppgift 4.

b) bestämda integralen $\int_1^{e} (\ln x)^2 \, dx$; (Tips: Partialintegration två ggr.) (1p)

c) integralen $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} \, dx$; (Tips: Partialbråksuppdelning.) (1p)

4. **(Tillämpning av integralkalkyl.)** Betrakta en solid Torricellis trumpet definierad genom en rotation av kurvan $y = \frac{1}{x}$ kring x-axeln mellan $x = 1$ och $x = +\infty$; masstätheten i x hos trumpeten är $\delta(x) = \delta \frac{2x}{1+x^2}$ där δ är masstätheten vid trumpetmynningen $x = 1$. Se Figur 1(b). Beräkna den oändligt långa trumpetens masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.
(Tips: Koordinaterna $\bar{y}$ och $\bar{z}$ fås direkt ur rotationssymmetrin och för $\bar{x}$ gäller att $\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m}$ där $M_{x=0} = \int x \, dm$ (momentet), $m = \int dm$ (massan); skivmassan dm ges ur masstäthet $\delta(x)$, skrivradie y och skivtjocklek dx.) (3p)

5. **(Lösning av differentialekvationer.)** Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 2e^{x}, & (*) \\ y(0) = 0, & \\ y'(0) = 1. & \end{cases}$$

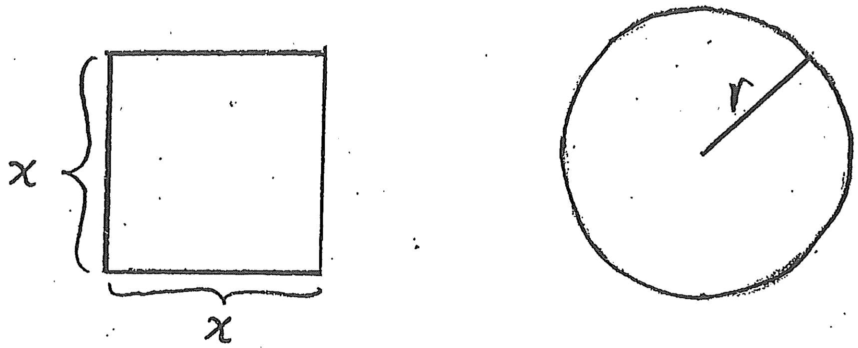
(Tips: Ingen term i partikulärlösningen får lösa den homogena ekvationen associerad till $(*)$. För detaljer, se t.ex. sid. 10–12 i F12; avsn. 17.6 i kursboken; lösningen till uppg. 7 i Tentamen 2012-01-13 etc.) (3p)

Lycka till!

LÖSNINGAR TILL KOMPLETTERANDE UPPGIFTER FÖR OMTENTAMEN 2012-04-12

1. (Tillämpning av differentialkalkyl.)

Vi ritar upp kvadraten och cirkeln och inför beteckningar:



$$\begin{cases} \text{Kvadratens omkrets} : & 4x \\ \text{Cirkelns omkrets} : & 2\pi r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Kvadratens area} : & x^2 \\ \text{Cirkelns area} : & \pi r^2 \end{cases}$$

Repet var 28 m vilket ger totala omkretsen 28 m, d.v.s.

$$4x + 2\pi r = 28$$

Så att $2x + \pi r = 14$

d.v.s.

$$r = \frac{1}{\pi}(14-2x) = \\ = \frac{2}{\pi}(7-x) \quad (*)$$

Den totala arean är

$$A = x^2 + \pi r^2 = [\text{använd } (*) \text{ ovan}] = \\ = x^2 + \pi\left(\frac{2}{\pi}(7-2x)\right)^2 =$$

$$= x^2 + \frac{4}{\pi}(7-2x)^2 = x^2 + \frac{4}{\pi}(49-28x+4x^2)$$

Arean är alltså en funktion av kvadrat-sidlängden enligt

$$A(x) = x^2 + \frac{4}{\pi}(49 - 28x + 4x^2)$$

Definitionsmängden måste vara $D_A = [0,7]$ ty $x=0$ betyder att allt rep gått åt till cirkeln och $x=7$ $(4x = 4\cdot 7 = 28)$ innebär att allt rep gått åt till kvadraten.

Vi har: $A'(x) = 2x + \frac{4}{\pi}(-28+8x) =$

$$= 2x + \frac{32}{\pi}x - \frac{112}{\pi} =$$

$$= 2\left(\left(1+\frac{16}{\pi}\right)x - \frac{56}{\pi}\right)$$

Stationär punkt: $A'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1+\frac{16}{\pi}\right)x - \frac{56}{\pi} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{56/\pi}{1+\frac{16}{\pi}} = \frac{56}{\pi+16}$$

Notera att $0 < \frac{56}{\pi+16} < \frac{56}{16} < \frac{56}{14} = 4 < 7$,

så $\frac{56}{\pi+16} \in D_A$. $\left(\frac{56}{\pi+16} \approx 2.93 \text{ enl. mini-räknare}\right)$

Vet att minsta värde finns i ändpunkter eller i stationära punkter.

$$A(0) = 0^2 + \frac{4}{\pi}(7-2\cdot 0)^2 = \frac{4}{\pi}\cdot 49 = \frac{196}{\pi}$$

$$A(7) = 7^2 + \frac{4}{\pi}(7-2\cdot 7)^2 = 49 + \frac{4}{\pi}\cdot 49 =$$

$$= 49(1+4/\pi) > A(0)$$

③

$$A\left(\frac{56}{\pi+16}\right) = \left(\frac{56}{\pi+16}\right)^2 + \frac{4}{\pi}\left(7-2\frac{56}{\pi+16}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{56}{\pi+16}\right)^2 + \frac{4}{\pi}\left(\frac{7(\pi+16)-112}{\pi+16}\right)^2 =$$

$$= \frac{3136 + \frac{4}{\pi}(7\pi+112-112)^2}{(\pi+16)^2} =$$

$$= \frac{3136+196/\pi}{(\pi+16)^2} \qquad (\dagger)$$

Vi vet att $A(0) = \frac{196}{\pi} > \frac{196}{4} = 49$. Vi har

$$\frac{3136+196/\pi}{(\pi+16)^2} < \frac{3136+196/\pi}{16^2} < \frac{3136+196/2}{16^2} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(196+\frac{49}{8}\right) < \frac{1}{16}\left(196+\frac{64}{8}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}(196+8) = \frac{204}{16} = \frac{51}{4} <$$

$$< \frac{52}{4} = 13 < 49 \underbrace{<}_{\text{enl. ovan}} A(0)$$

Det gäller alltså att $(\dagger)$ är minsta arean, d.v.s. man ska kapa repet $4\cdot\frac{56}{\pi+16}$ från ena änden och göra en kvadrat av denna första del och av den andra delen ska man göra en cirkel.

(Notera: Självklart kan man slå in alla värden på en miniräknare:
$$\begin{cases} A(0) \approx 62.4 \\ A(7) \approx 111.4 \\ A\left(\frac{56}{\pi+16}\right) \approx 8.7 \quad \text{(minst)} \end{cases}$$
vilket ger samma slutsats som förut.)

2. (Taylors sats.)
Approximera sin 10° med fel högst 0.01 genom bestämma $P_n(x)$ till $f(x) = \sin x$ kring $x=0$ för tillräckligt stort n.

Man ska alltid arbeta med radianer så låt oss konvertera 10° till radianer:

$$180° \Rightarrow \pi \text{ rad} \Leftrightarrow 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \Leftrightarrow 10° = 10\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{18} \text{ rad}$$

d.v.s. vi ska approximera $\sin\frac{\pi}{18}$.

Eftersom $f(x) = P_n + E_n(x)$ där $\begin{cases} P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i \\ E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} x^{n+1} \end{cases}$

f.n. $s \in (0, x)$ om $x > 0$ (där vi har tagit Taylorpolynomet kring $x=0$) så gäller det att

$$\sin\frac{\pi}{18} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^i}_{=P_n(\frac{\pi}{18})} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{n+1}}_{=E_n(\frac{\pi}{18})}$$

där $f(x) = \sin x$ och $s \in (0, \frac{\pi}{18})$.

Innan vi bemödar oss med $P_n(\frac{\pi}{18})$ så bestämmer vi ett tillräckligt stort n (men helst inte större!)

(5) Så att $|E_n(\frac{\pi}{18})| < 0.01$. Vi får:

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |E_0(\tfrac{\pi}{18})| = \left|\frac{f'(s)}{1!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^1\right| = \underbrace{|\cos s|}_{\leq 1}\frac{\pi}{18} \leq \frac{\pi}{18} =$$

$$= 0.1745329\ldots \text{, för stort!}$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |E_1(\tfrac{\pi}{18})| = \left|\frac{f''(s)}{2!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2\right| = \frac{1}{2}\underbrace{|\sin s|}_{\leq 1}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{\pi^2}{648} = 0.0152308\ldots \text{, för stort!}$$

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f'''(x) = -\cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |E_2(\tfrac{\pi}{18})| = \left|\frac{f'''(s)}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3\right| = \frac{1}{6}\underbrace{|\cos s|}_{\leq 1}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \leq$$

$$\leq \frac{\pi^3}{34992} = 0.0008860\ldots < 0.01 \text{, ok!}$$

Det gäller alltså att $n = 2$ är tillräckligt stort:

$$P_2(\tfrac{\pi}{18}) = \sum_{i=0}^{2}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^i =$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^1 + \frac{f''(0)}{2!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 =$$

$$= \underbrace{(\sin 0)}_{=0} + \underbrace{(\cos 0)}_{=1}\frac{\pi}{18} + \frac{1}{2}\underbrace{(-\sin 0)}_{=0}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 = \frac{\pi}{18} =$$

$$= 0.1745329\ldots$$

d.v.s. $\boxed{\sin 10° \approx 0.1745329 \text{ med ett fel på mindre än } 0.01.}$

3. (Beräkning av integraler) ⑥

a) $\int_{-1}^{3} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx$ = [Generaliserad integral av Typ II; se s.1 i F9] =

$$= \lim_{c\to -1+} \int_{c}^{3} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx =$$

$$= \left[\begin{cases} u = x+1 \Leftrightarrow x = u-1 \\ du = dx \end{cases}, \begin{cases} x=3 \Leftrightarrow u = 3+1=4 \\ x=c \Leftrightarrow u = c+1 \end{cases}\right] =$$

$$= \lim_{c\to -1+} \int_{c+1}^{4} \frac{(u-1)^2}{\sqrt{u}}\,du = \lim_{c\to -1+} \int \frac{u^2-2u+1}{u^{1/2}}\,du =$$

$$= \lim_{c\to -1+} \int_{c+1}^{4} (u^{3/2} - 2u^{1/2} + u^{-1/2})\,du =$$

$$= \lim_{c\to -1+} \left(\frac{2}{5}u^{5/2} - 2\frac{2}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2}\right)\Big|_{c+1}^{4} = [4=2^2] =$$

$$= \lim_{c\to -1+} \Big[\left(\frac{2}{5}(2^2)^{5/2} - \frac{4}{3}(2^2)^{3/2} + 2(2^2)^{1/2}\right) - \left(\frac{2}{5}(c+1)^{5/2} - \frac{4}{3}(c+1)^{3/2} + 2(c+1)^{1/2}\right)\Big] =$$

$$= \left(\frac{2}{5}2^5 - \frac{4}{3}2^3 + 2\cdot 2\right) - \underbrace{\left(\frac{2}{5}0^{5/2} - \frac{4}{3}0^{3/2} + 2\cdot 0^{1/2}\right)}_{=0} =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot 32 - \frac{4}{3}\cdot 8 + 4 - 0 =$$

$$= \frac{64}{5} - \frac{32}{3} + 4 = \frac{3\cdot 64 - 5\cdot 32 + 15\cdot 4}{15} =$$

$$= \frac{192 - 160 + 60}{15} = \boxed{\frac{92}{15}} \quad (= 6.1\overline{3})$$

7

b) $\int_1^e \underbrace{(\ln x)^2}_{\downarrow} \overset{\uparrow}{dx} = \left[\begin{cases} U = (\ln x)^2 \\ dU = 2(\ln x)\frac{1}{x}dx \end{cases}, \begin{cases} dV = dx \\ V = x \end{cases} \right] =$

$= (\ln x)^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot 2(\ln x)\frac{1}{x}dx =$

$= x(\ln x)^2\Big|_1^e - 2\int_1^e \underbrace{\ln x}_{\downarrow} \overset{\uparrow}{dx} =$

$= \left[\begin{cases} U = \ln x \\ dU = \frac{1}{x}dx \end{cases}, \begin{cases} dV = dx \\ V = x \end{cases} \right] =$

$= x(\ln x)^2\Big|_1^e - 2\left((\ln x)x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx\right) =$

$= x(\ln x)^2\Big|_1^e - 2x(\ln x)\Big|_1^e + 2\int_1^e dx =$

$= x(\ln x)^2\Big|_1^e - 2x(\ln x)\Big|_1^e + 2x\Big|_1^e =$

$= x\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right)\Big|_1^e =$

$= e\cdot\left(\underbrace{(\ln e)^2}_{=1} - 2\underbrace{\ln e}_{=1} + 2\right) - 1\cdot\left(\underbrace{(\ln 1)^2}_{=0} - 2\underbrace{\ln 1}_{=0} + 2\right) =$

$= e(1^2 - 2 + 2) - (0^2 - 0 + 2) = \underline{\underline{e - 2}}$

c) $\int \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x}dx = (*)$

- Faktorisera integrandens nämnare:

$x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6)$

$x^2 + x - 6 = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-6)} =$

$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} =$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$$

$\Rightarrow$ integranden är $\dfrac{x+1}{x(x-2)(x+3)}$

- Partialbråksuppdela integranden:

$$\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \underset{(P.B.U.)}{[\text{ansätt}]} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)} =$$

$$= \frac{A(x^2+x-6) + B(x^2+3x) + C(x^2-2x)}{x(x-2)(x+3)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (A+3B-2C)x - 6A}{x(x-2)(x+3)} =$$

Identifiera: $\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+3B-2C=1 \\ \quad -6A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B+C=-A=1/6 \\ 3B-2C=1-A=7/6 \\ A=-1/6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B=1/6-C \\ 3(1/6-C)-2C=7/6 \\ A=-1/6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=1/6-C \\ -5C=7/6-3/6=4/6=2/3 \\ A=-1/6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B=1/6-(-2/15)=5/30+4/30=9/30=3/10 \\ C=-2/15 \\ A=-1/6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (*) = \int\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}\right)dx =$$

$$= \int\left(\frac{-1/6}{x} + \frac{3/10}{x-2} + \frac{-2/15}{x+3}\right)dx =$$

⑨ $$= \int \left(-\frac{1}{6}\frac{1}{x} + \frac{3}{10}\frac{1}{x-2} - \frac{2}{15}\frac{1}{x+3}\right) dx =$$

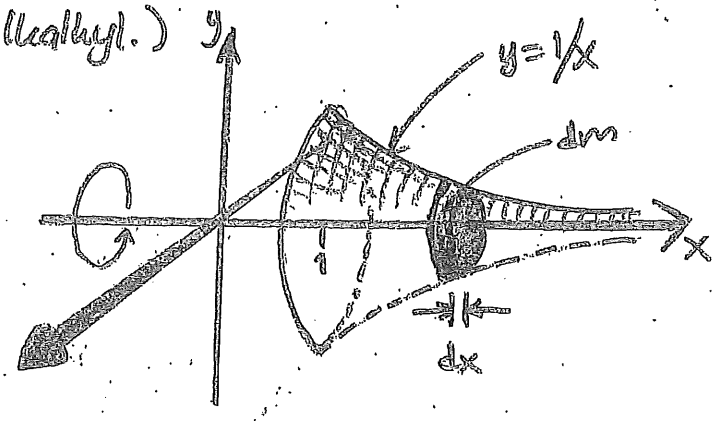
$$= \boxed{-\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + C}$$

---

4. (Tillämpning av integralkalkyl.)

Torricellis trumpet:

(Även kallad "Gabriels horn".)



Masstäthet:

$$\delta(x) = \delta \frac{2x}{1+x^2}$$

Skivmassan dm ges enligt:

$$dm = \underbrace{\delta(x)}_{\text{masstäthet}} \underbrace{dV}_{\text{volym}} = \delta(x) \underbrace{A(x)}_{\text{area}} \underbrace{dx}_{\text{tjocklek}} =$$

$$= \delta(x) \cdot \pi \underbrace{y}_{\text{radie}=1/x}{}^2 \cdot dx = \delta \frac{2x}{1+x^2} \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

$$= 2\pi\delta \frac{1}{x(1+x^2)} dx \qquad (\delta = \text{konst.})$$

• Massa: $$m = \int_{x=1}^{x=+\infty} dm = \int_1^{\infty} 2\pi\delta \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \left[\begin{matrix}\text{Gen.}\\ \text{int.}\\ \text{Typ I}\end{matrix}\right] =$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x(1+x^2)} = (*)$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = [\text{Partialbråksuppdelningsansättning}] =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} =$$

$$= \frac{A(1+x^2) + (Bx+C)x}{x(1+x^2)} =$$

⑩

$$= \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(1+x^2)}$$

Identifiera: $\begin{cases} A+B = 0 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A = -1 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases}$

$$\Longrightarrow (*) = 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \int_1^R \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \int_1^R \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Big|_1^R =$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \Big(\left(\ln R - \tfrac{1}{2}\ln(1+R^2)\right) -$$

$$- \left(\underbrace{\ln 1}_{=0} - \tfrac{1}{2}\ln(1+1^2)\right)\Big) =$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \left(\ln R - \ln\sqrt{1+R^2} + \tfrac{1}{2}\ln 2\right) =$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \left(\ln\frac{R}{\sqrt{1+R^2}} + \tfrac{1}{2}\ln 2\right) =$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \left(\ln\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1/R^2+1}}}_{\to 1} + \tfrac{1}{2}\ln 2\right) =$$

$$= 2\pi\delta \left(\underbrace{\ln 1}_{=0} + \tfrac{1}{2}\ln 2\right) = \pi\delta\ln 2$$

• <u>Moment kring $x=0$:</u>

$$M_{x=0} = \int_{x=1}^{x=+\infty} x\,dm = \int_1^\infty x \cdot 2\pi\delta \frac{1}{x(1+x^2)}dx =$$

$$= [\text{Gen. int. Typ I}] =$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{1+x^2} =$$

(11)

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} (\arctan x)\Big|_1^R$$

$$= 2\pi\delta \lim_{R\to\infty} (\underbrace{\arctan R}_{\to \pi/2} - \underbrace{\arctan 1}_{=\pi/4}) =$$

$$= 2\pi\delta \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\pi\delta \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2\delta}{2}$$

$$\Longrightarrow \bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\pi^2\delta/2}{\pi\delta\ln 2} = \frac{\pi}{2\ln 2} \quad (=2.26618\ldots)$$

P.g.a. rotationssymmetrin gäller $\bar{y} = \bar{z} = 0$.

$\boxed{\text{Torricellis trumpet med angiven masstäthet har masscentrum } (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{\pi}{2\ln 2}, 0, 0\right) \text{ givet koordinatsystemet i figuren.}}$

---

5. (Lösning av differentialekvationer)

Begynnelsevärdesproblem

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 2e^x, & (*) \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

De allmänna lösningarna kan skrivas $y = y_h + y_p$ där y_h är allmän lösning till (*):s associerade homogena ekvation och y_p är en partikulär-lösning till (*).

- Homogen ekvation: $y'' - 2y' + y = 0$

Karakteristisk ekvation: $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \quad \text{(dubbelrot)}$$

$$\Longrightarrow y_h(x) = (Cx + D)e^x$$

- Partikulärlösning: $HL_{(*)} = 2e^x$ (12)

Pröva därför med (se s. 964 i kursboken eller s. 10ff i F12):

$$y_p(x) = x^m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{0:tegradspol.}}}{A} e^x, \quad m \in \{0,1,2\}$$

$\underline{m=0}$: $y_p(x) = Ae^x$, löser homogena ekvationen (ty $y_p = y_h$ för $C=0, D=A$).

$\underline{m=1}$: $y_p(x) = xAe^x = Axe^x$, löser också homogena ekvationen (ty $y_p = y_h$ för $C=A, D=0$)

$\underline{m=2}$: $y_p(x) = x^2Ae^x = Ax^2e^x$, denna löser ej homogena ekvationen

$$\Longrightarrow y_p'(x) = 2Axe^x + Ax^2e^x = A(x^2+2x)e^x$$

$$\Longrightarrow y_p''(x) = A(2x+2)e^x + A(x^2+2x)e^x = A(x^2+4x+2)e^x$$

Sätt in y_p, y_p' och y_p'' i $(*)$:

$$A(x^2+4x+2)e^x - 2A(x^2+2x)e^x + Ax^2e^x = 2e^x$$

$$\Longleftrightarrow A(x^2+4x+2-2x^2-4x+x^2)e^x = 2e^x$$

$$\Longleftrightarrow 2Ae^x = 2e^x \Longleftrightarrow A=1$$

$$\Longrightarrow y_p(x) = 1 \cdot x^2e^x = x^2e^x$$

⑬ Lösningen blir därför:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) =$$
$$= (Cx+D)e^x + x^2e^x =$$
$$= (x^2 + Cx + D)e^x$$

$$\Longrightarrow y_p'(x) = (2x+C)e^x + (x^2+Cx+D)e^x =$$
$$= (x^2 + (C+2)x + (C+D))e^x$$

• Begynnelsevillkoren: $y(0)=0 \Leftrightarrow (0^2 + C\cdot 0 + D)e^0 = 0 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow D\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow D = 0$$
$$\Longrightarrow y_p'(x) = (x^2 + (C+2)x + C)e^x$$

$y'(0) = 1 \Leftrightarrow (0^2 + (C+2)\cdot 0 + C)e^0 = 1 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow C\cdot 1 = 1 \Leftrightarrow C = 1$$

$$\Longrightarrow y(x) = (x^2 + 1\cdot x + 0)e^x = x(x+1)e^x$$

$\boxed{\text{Lösningen är } y(x) = x(x+1)e^x.}$