Mittuniversitetet

MID SWEDEN UNIVERSITY

Omtentamen 2012-04-12

Miniräknare: Symbolhanterande är ej tillåten.
Formelsamling: Matematisk formelsamling (NAT, THU); se bifogat häfte.

Lösningarna bör vara så pass väldokumenterade att en läsare kan följa alla moment utan att behöva fylla i viktiga saknade steg.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är: A 22p, B 18p, C 14p, D 10p, E 9p. (Max: 24p. exkl. bonuspoäng.) Till tentamensskrivningspoängen adderas erhållna bonuspoäng. (Max: +3p.)

1. **a)** Ge den formella definitionen av "$f(x)$ är kontinuerlig i inre punkten $x = c$ till definitionsmängden". Ge exempel på en funktion som är kontinuerlig i $x = 0$ och en som är diskontinuerlig i $x = 0$. (Tips: För diskontinuerliga funktionen, konstruera som i t.ex. **b**).) (1.5p)

b) För vilka värden på A och B är funktionen

$$f(x) = \begin{cases} Ax - B, & x \leqslant 1, \\ 3x, & 1 < x < 2, \\ Bx^2 - A, & 2 \leqslant x, \end{cases}$$

kontinuerlig i $x = 1$ men diskontinuerlig i $x = 2$? (1.5p)

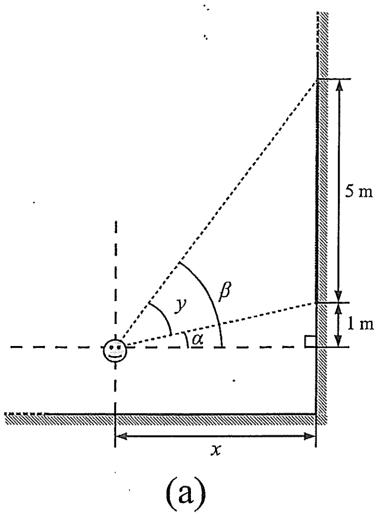
2. Den nedre kanten av en biografduk som är 5 m hög befinner sig 1 m ovanför en biografbesökares ögon. Hur långt från duken ska besökaren sitta för att få den bästa vyn, d.v.s. för vilket avstånd $x > 0$ maximeras synvinkeln y i Figur 1(a)? (Tips: Notera att $y = \beta - \alpha$.) (3p)

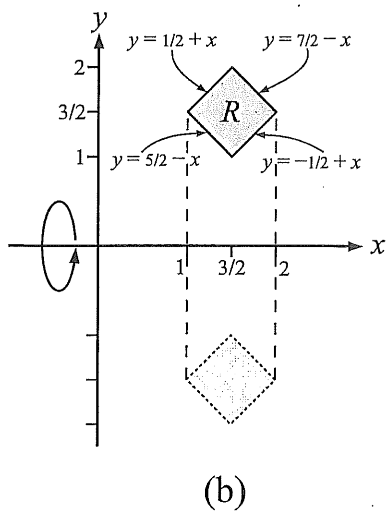
3. Den s.k. *errorfunktionen* definieras enligt $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Beräkna Taylorpolynomen av ordning 3 till $\operatorname{erf}(x)$ resp. $\sin x$ kring $x = 0$ och använd resultatet för att beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \big(\operatorname{erf}(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x\big)/x^3$. (Tips: Det gäller att $f(x) = P_3(x) + \mathcal{O}(x^5)$ för både $f = \operatorname{erf}$ och $f = \sin$.) (3p)

4. **a)** Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}}$. (Tips: $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$; vad är u?) (1p)

b) Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \cos x \, dx$ genom att integrera partiellt två gånger. (1p)

c) Beräkna den bestämda integralen $\displaystyle\int_0^{\sqrt{6}} \frac{x^3}{(x^2+2)^2}\, dx$. (1p)





Figur 1. (a) Biografen i Uppgift 2. (b) Ringen i Uppgift 5.

5. Bestäm ytarean hos den ringformade kropp som bildas då området R begränsat uppåt av linjerna $y = \frac{1}{2} + x$ för $x \in [1, \frac{3}{2}]$ och $y = \frac{7}{2} - x$ för $x \in [\frac{3}{2}, 2]$ och nedåt av linjerna $y = \frac{5}{2} - x$ för $x \in [1, \frac{3}{2}]$ och $y = -\frac{1}{2} + x$ för $x \in [\frac{3}{2}, 2]$ roteras kring x-axeln.; se Figur 1(b). (Tips: Det blir en summa av fyra integraler av typen $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ för lämpliga a, b och f.) (3p)

6. Skriv om serien $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{6} + \cdots$ på sigmanotation och bestäm de värden på x för vilka serien absolutkonvergerar, konvergerar betingat resp. divergerar. (3p)

7. **a)** Lös $\frac{1}{\cos x} y' + (\tan x) y = e^{\cos x}$. (Tips: Integrerande faktor.) (2p)

b) Lös $x^2 y' - xy - y^2 = x^2$ givet att $y(1) = 1$. (Tips: Ansätt $v = \frac{y}{x}$.) (2p)

8. Finn den enda reella lösningen till $x^3 + 6x = 6$ med hjälp av

a) fixpunktsmetoden, $x_0 = 1$, och 3 decimalers noggrannhet; (1p)

b) Newtons metod, $x_0 = 1$, och 7 decimalers noggrannhet. (1p)

(Tips: Skriv om på formen $f(x) = x$ i **a)** och $f(x) = 0$ i **b)**.)

Lycka till!

① # LÖSNINGAR TILL TENTAN 2012-04-12

1. a) Den formella definitionen av

"$f(x)$ är kontinuerlig i inre punkten $x=c$ till definitionsmängden"

är att $f(x)$ i den inre punkten $x=c$ till definitionsmängden uppfyller

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

d.v.s. $f(c)$ är definierat och gränsvärdet av $f(x)$ då $x \to c$ är $f(c)$.

b) Funktion $$f(x) = \begin{cases} Ax-B, & x \le 1, \\ 3x, & 1 < x < 2, \\ Bx^2-A, & 2 \le x, \end{cases}$$

som ska vara

(i) kontinuerlig i $x=1$, men
(ii) diskontinuerlig i $x=2$.

- Villkor (i) säger enligt a) ovan att

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow [\text{Sats s.10 i F10}]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow [\text{Def. av } f]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1_-} (Ax-B) = \lim_{x\to 1_+} 3x = A\cdot 1 - B \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad A\cdot 1 - B = 3\cdot 1 = A\cdot 1 - B \Leftrightarrow A - B = 3$ ②

- Villkor (ii) säger på motsvarande sätt att

$$\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 2_-} f(x) \neq f(2) \\ \text{eller} \\ \lim_{x\to 2_+} f(x) \neq f(2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 2_-} 3x \neq B\cdot 2^2 - A \\ \text{eller} \\ \lim_{x\to 2_+} (Bx^2 - A) = B\cdot 2^2 - A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\cdot 2 \neq B\cdot 2^2 - A \\ \text{eller} \\ B\cdot 2^2 - A \neq B\cdot 2^2 - A \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 \neq 4B - A \\ \text{eller} \\ 4B - A \neq 4B - A \quad \text{(omöjligt!)} \end{cases} \Leftrightarrow 6 \neq 4B - A$$

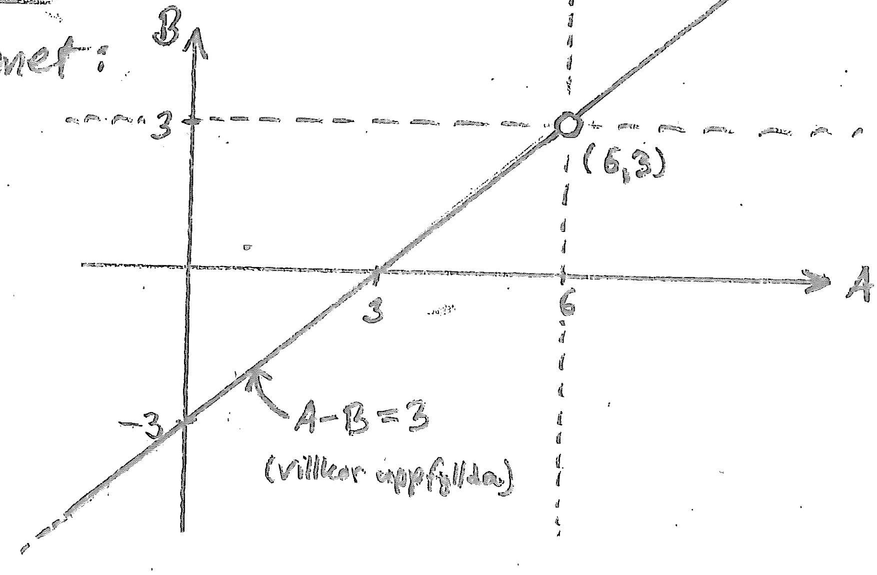
Men $A - B = 3 \Leftrightarrow A = B + 3$ ger

$$6 \neq 4B - (B+3) \Leftrightarrow 6 \neq 3B - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3B \neq 9 \Leftrightarrow B \neq 3$$

d.v.s. $\boxed{A - B = 3 \quad \text{där } B \neq 3}$.

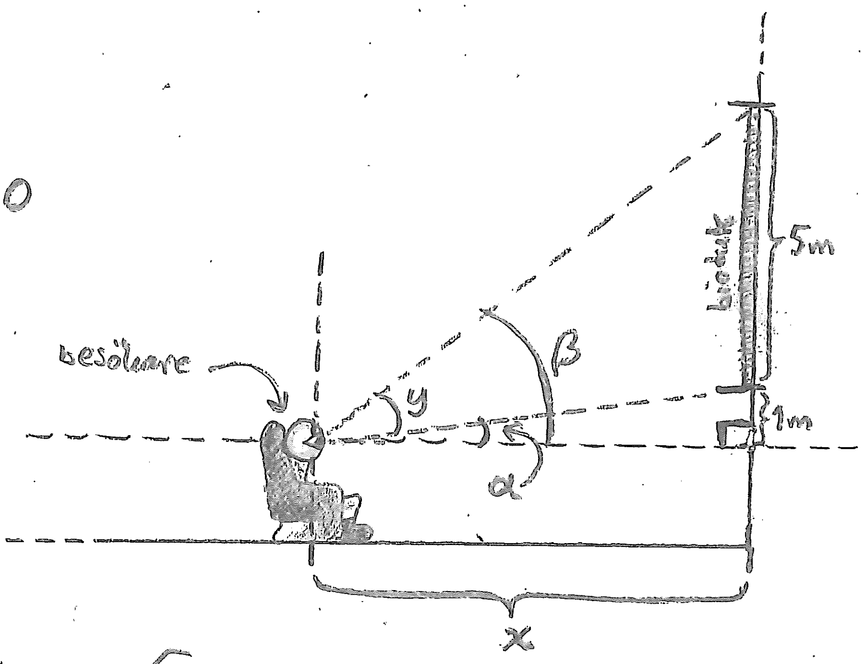
Lösningen i AB-planet:



③ **2.** Biografen:

avstånd : $x > 0$
synvinkel : y

Notera:
$y = \beta - \alpha$



Ur geometrin fås:
$$\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{\text{motsatt katet}}{\text{närliggande katet}} = \dfrac{1}{x} \\ \tan\beta = \dfrac{\text{motsatt katet}}{\text{närliggande katet}} = \\ \quad = \dfrac{5+1}{x} = \dfrac{6}{x} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left[\alpha, \beta < \frac{\pi}{2}\right] \begin{cases} \alpha = \arctan\dfrac{1}{x} \\ \beta = \arctan\dfrac{6}{x} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad y = \beta - \alpha = \arctan\frac{6}{x} - \arctan\frac{1}{x}$$
där $x \in (0, \infty)$.

Vi vill bestämma x så att y antar sitt största värde. Eftersom $(0, \infty)$ inte är ett slutet ändligt intervall så behöver vi undersöka $\lim_{x \to 0_+} y(x)$ och $\lim_{x \to +\infty} y(x)$:

$$\lim_{x \to 0_+} y(x) = \lim_{x \to 0_+} \left(\arctan\frac{6}{x} - \arctan\frac{1}{x}\right) =$$

④

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\arctan \frac{6}{x} - \arctan \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \arctan 0 - \arctan 0 = 0 - 0 = 0$$

Eftersom $y > 0$ för alla andra värden så måste det enligt sats S.10 i F5 gälla att $y(x)$ har ett största värde på $(0, \infty)$. Detta får vi genom att hitta de kritiska punkterna (singulära punkter saknas):

$$y'(x) = \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{6}{x} - \arctan \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{6}{x}\right)^2} \left(-\frac{6}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{6}{x^2+6^2} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{6}{x^2+36}$$

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} - \frac{6}{x^2+36} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} = \frac{6}{x^2+36} \Leftrightarrow x^2+36 = 6(x^2+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+36 = 6x^2+6 \Leftrightarrow 30 = 5x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = (\pm)\sqrt{6}$$

d.v.s. maximal synvinkel fås på avståndet $\sqrt{6}$ m (≈ 2.45 m)

Notera: $y(\sqrt{6}) = \arctan 6/\sqrt{6} - \arctan 1/\sqrt{6} = \arctan \sqrt{6} - \arctan \frac{1}{\sqrt{6}}$
$= [\arctan 1/x = \pi/2 - \arctan x \quad \forall x > 0] =$

⑤

$$= \arctan\sqrt{6} - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{6}\right) =$$

$$= 2\arctan\sqrt{6} - \frac{\pi}{2} = 0.796\ldots = 45.5\ldots^\circ$$

vilket är den maximala synvinkeln.

---

3. Errorfunktionen: $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$

Taylorpolynom av ordning n kring $x=a$:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

vilket för $n=3$ och $a=0$ innebär

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}(x-0)^i =$$

$$= \frac{f^{(0)}(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x-0)^1 +$$

$$+ \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 =$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3$$

• $\underline{f(x) = \mathrm{erf}(x):}$ $f(x) = \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

$$\Rightarrow f(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^0 e^{-t^2}\,dt = 0$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \text{[Analysens huvudsats I s. 11 i F7]} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-0^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot 1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx}(e^{-x^2}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(-2x)e^{-x^2} =$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2}$$

$$\Longrightarrow f''(0) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot 0 \cdot e^{-0^2} = 0$$

$$f'''(x) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx}(xe^{-x^2}) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2}\right)$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{\pi}}(1-2x^2)e^{-x^2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}(2x^2-1)e^{-x^2}$$

$$\Longrightarrow f'''(0) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}(2 \cdot 0^2 - 1)e^{-0^2} = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Longrightarrow P_3(x) = 0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} x + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\right)x^3$$

d.v.s. $\boxed{P_3(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} x^3 \quad \text{för } \operatorname{erf}(x)}$.

$$\Longrightarrow \operatorname{erf}(x) = [\text{Tips}] = P_3(x) + O(x^5) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} x - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} x^3 + O(x^5)$$

• $\underline{f(x) = \sin x}$: $\quad f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = \sin 0 = 0$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = -\sin 0 = -0 = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$\Longrightarrow P_3(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot (-1) \cdot x^3$$

d.v.s. $\boxed{P_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3 \quad \text{för } \sin x}$

$$\Longrightarrow \sin x \underset{\text{Tips}}{=} P_3(x) + O(x^5) = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$$

⑦ Detta ger:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{erf}(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}x - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}x^3 + O(x^5)\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)\right)}{x^3} =$$

$$\left[\begin{matrix}O(x^5)-O(x^5)\\ =O(x^5)\end{matrix}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}x - \frac{2}{\sqrt{\pi}}x\right) + \left(-\frac{2}{3\sqrt{\pi}}x^3 + \frac{1}{3\sqrt{\pi}}x^3\right) + O(x^5)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3\sqrt{\pi}}x^3 + O(x^5)}{x^3} = \left[\frac{O(x^5)}{x^3} = O\left(\frac{x^5}{x^3}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{3\sqrt{\pi}} + O(x^2)\right) = -\frac{1}{3\sqrt{\pi}} + 0 = \boxed{-\frac{1}{3\sqrt{\pi}}}$$

---

4. a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} = [\text{Kvadratkomplettera}] =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-x-2)}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2 - 2\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\right)}} = \left[\begin{matrix}\text{Samla}\\ \text{kvadraterna:}\\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \frac{9}{4}\end{matrix}\right]$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - 9/4\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{3}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}-\frac{1}{3}\right)^2}} = \int \frac{\frac{2}{3}\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2}} =$$

$$= \left[\begin{cases} u = \frac{2x-1}{3} \\ du = \frac{2}{3}dx \end{cases}\right] = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = [\text{Tipset}] =$$

$$= \arcsin u + C = \boxed{\arcsin \frac{2x-1}{3} + C}$$

b) $\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx = [\text{Generaliserad integral av Typ I}] =$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^R \underbrace{e^{-x}}_{\downarrow} \underbrace{\cos x\,dx}_{\uparrow} = \left[\begin{cases} U = e^{-x} \\ dU = -e^{-x}dx \end{cases}, \ldots\right.$$

$$\ldots \left.\begin{cases} dV = \cos x\,dx \\ V = \sin x \end{cases}\right] =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left((e^{-x}\sin x)\Big|_0^R - \int_0^R \sin x(-e^{-x}dx)\right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left((e^{-R}\sin R - \cancel{e^{-0}\sin 0}^{\,0}) + \int_0^R e^{-x}\sin x\,dx\right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(e^{-R}\sin R + \int_0^R \underbrace{e^{-x}}_{\downarrow} \underbrace{\sin x\,dx}_{\uparrow}\right) =$$

$$= \left[\begin{cases} U = e^{-x} \\ dU = -e^{-x}dx \end{cases}, \begin{cases} dV = \sin x\,dx \\ V = -\cos x \end{cases}\right] =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \Big[e^{-R}\sin R + \Big((e^{-x}(-\cos x))\Big|_0^R -$$

$$- \int_0^R (-\cos x)(-e^{-x}dx)\Big)\Big] =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(e^{-R}\sin R - (e^{-x}\cos x)\Big|_0^R - \int_0^R e^{-x}\cos x\,dx\right)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(e^{-R}\sin R - (e^{-R}\cos R - e^{-0}\cos 0)\right) -$$

(9)

$$-\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x}\cos x\,dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(1+e^{-R}(\sin R-\cos R)\right)-$$

$$-\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x}\cos x\,dx$$

där vi noterar att den sista termen är vad vi faktiskt räknar ut, kalla det $\lim_{R\to\infty} I(R)$, d.v.s.

$$\lim_{R\to\infty} I(R) = \lim_{R\to\infty}\left(1+e^{-R}(\sin R-\cos R)\right)-$$

$$-\lim_{R\to\infty} I(R)$$

$$\Longrightarrow 2\lim_{R\to\infty} I(R) = \lim_{R\to\infty}\left(1+\underbrace{\underbrace{e^{-R}}_{\to 0}\underbrace{(\sin R+\cos R)}_{\in[-2,2]}}_{\to 0}\right) =$$

$$= 1+0 = 1$$

$$\Longrightarrow \lim_{R\to\infty} I(R) = \underline{\underline{1/2}}$$

c) $$\int_0^{\sqrt{6}} \frac{x^3}{(x^2+2)^2}\,dx = (*)$$

Ansätt integranden som partialbråk:

$$\frac{x^3}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)}{(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{Ax^3+2Ax+Bx^2+2B+Cx+D}{(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{Ax^3+Bx^2+(2A+C)x+D}{(x^2+2)^2}$$

Identifiera: $\begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ 2A+C=0 \\ D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=-2A=-2\cdot 1=-2 \\ D=0 \end{cases}$

$$\Longrightarrow (*) = \int_0^{\sqrt{6}} \left(\frac{1\cdot x+0}{x^2+2} + \frac{(-2)x+0}{(x^2+2)^2} \right) dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+2} - \frac{2x}{(x^2+2)^2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{x^2+2} \right) \Big|_0^{\sqrt{6}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\ln(6+2) + \frac{1}{6+2} \right) - \left(\frac{1}{2}\ln(0+2) + \frac{1}{0+2} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\ln 8 + \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2} \right) =$$

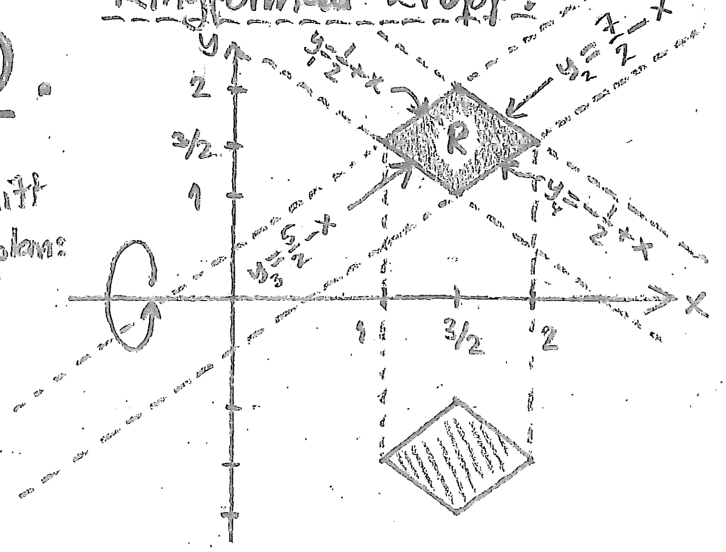
$$= \frac{1}{2}\ln(2^3) + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{4}{8} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1-4}{8} = \boxed{\ln 2 - \frac{3}{8}}$$

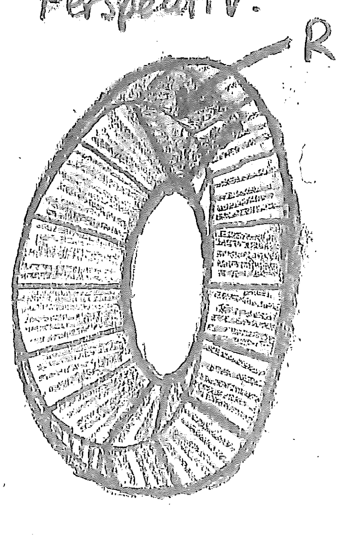
5.

Ringformad kropp:

Tvärsnitt i xy-plan:



Perspektiv:



(11) R: • Begr. uppåt av
$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}+x, \quad x \in [1, 3/2] & (1) \\ y_2 = \frac{7}{2}-x, \quad x \in [3/2, 2] & (2) \end{cases}$$

• Begr. nedåt av
$$\begin{cases} y_3 = \frac{5}{2}-x, \quad x \in [1, 3/2] & (3) \\ y_4 = -\frac{1}{2}+x, \quad x \in [3/2, 2] & (4) \end{cases}$$

Varje linjesegment (1)–(4) kommer generera en yta hos ringen vid rotation kring x-axeln. Arean hos de respektive ytorna är (enl. tips):

$$S_1 = 2\pi \int_1^{3/2} y_1(x)\sqrt{1+(y_1'(x))^2}\,dx =$$
$$= 2\pi \int_1^{3/2} \left(\frac{1}{2}+x\right)\sqrt{1+1^2}\,dx =$$
$$= 2\sqrt{2}\pi \int_1^{3/2} \left(\frac{1}{2}+x\right)dx$$

$$S_2 = 2\pi \int_{3/2}^{2} y_2(x)\sqrt{1+(y_2'(x))^2}\,dx =$$
$$= 2\pi \int_{3/2}^{2} \left(\frac{7}{2}-x\right)\sqrt{1+(-1)^2}\,dx =$$
$$= 2\sqrt{2}\pi \int_{3/2}^{2} \left(\frac{7}{2}-x\right)dx$$

$$S_3 = 2\pi \int_1^{3/2} y_3(x)\sqrt{1+(y_3'(x))^2}\,dx =$$
$$= 2\pi \int_1^{3/2} \left(\frac{5}{2}-x\right)\sqrt{1+(-1)^2}\,dx =$$
$$= 2\sqrt{2}\pi \int_1^{3/2} \left(\frac{5}{2}-x\right)dx$$

(12)

$$S_4 = 2\pi \int_{3/2}^{2} y_4(x) \sqrt{1 + (y_4'(x))^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{3/2}^{2} \left(-\frac{1}{2} + x\right) \sqrt{1 + 1^2}\, dx =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \int_{3/2}^{2} \left(-\frac{1}{2} + x\right) dx$$

Detta ger den totala ringytarean

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \int_{1}^{3/2} \left(\frac{1}{2} + x\right) dx + 2\sqrt{2}\pi \int_{3/2}^{2} \left(\frac{7}{2} - x\right) dx +$$

$$+ 2\sqrt{2}\pi \int_{1}^{3/2} \left(\frac{5}{2} - x\right) dx + 2\sqrt{2}\pi \int_{3/2}^{2} \left(-\frac{1}{2} + x\right) dx =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \int_{1}^{3/2} \left(\left(\frac{1}{2} + x\right) + \left(\frac{5}{2} - x\right)\right) dx +$$

$$+ 2\sqrt{2}\pi \int_{3/2}^{2} \left(\left(\frac{7}{2} - x\right) + \left(-\frac{1}{2} + x\right)\right) dx =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \int_{1}^{3/2} 3\, dx + 2\sqrt{2}\pi \int_{3/2}^{2} 3\, dx = 2\sqrt{2}\pi \int_{1}^{2} 3\, dx =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \left(3x\right)\Big|_{1}^{2} = 2\sqrt{2}\pi\,(3\cdot 2 - 3\cdot 1) =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\,(6-3) = 2\sqrt{2}\pi \cdot 3 = \underline{\underline{6\sqrt{2}\pi}}$$ (areaenheter)

(≈ 26.7)

(13) **6.** Serien $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}+\frac{x^5}{6}+\dots$ på sigma-notation är $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$, d.v.s. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med $a_n=\frac{x^n}{n+1}$. Här är $x\in\mathbb{R}$.

- **Absolutkonvergent:** Undersök $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$:

Kvotkriteriet:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)+1}\right|}{\left|\frac{x^n}{n+1}\right|}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\,\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}|x|=$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n}{1+2/n}=|x|\frac{1+0}{1+0}=|x|$$

$\rho<1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow x\in(-1,1)$ ger konv. hos $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$

$\rho>1 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow x<-1$ eller $x>1$ ger div. hos $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$

$\rho=1 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=\pm1$ ger inget hos $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$

$x=\pm1$: $|a_n|=\left|\frac{(\pm1)^n}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$

Jämför denna med $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, $b_n=1/n$ (harmoniska serien), som divergerar (mot ∞).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{1+0} = 1 > 0$$ (14)

$\Longrightarrow$ [Jämförelsekriterium #2 (b); se s.9 F10]

$\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n+1}$ divergerar (mot ∞)

$\boxed{\text{Serien absolutkonvergent för } x\in(-1,1).}$

- Betingat konvergent: Undersök $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, vet redan att $x\in(-1,1)$ ger absolutkonvergens.

$x<-1$: $a_n = \frac{x^n}{n+1} = [x<-1<0 \Rightarrow x=-|x|] =$

$$= \frac{(-|x|)^n}{n+1} = (-1)^n \underbrace{\underbrace{|x|^n}_{>1} \frac{1}{n+1}}_{\to\infty \text{ då } n\to\infty}$$

$\Longrightarrow$ a_n går ej mot noll

$\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar (enl. Termkonv.krit s.6 F10)

$x=-1$: $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, här gäller:

(i) $a_n a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(n+1)(n+2)} =$

$$= -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0 \quad \forall n$$

(ii) $|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} =$

$$= |a_n| \quad \forall n$$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0$

$\Longrightarrow$ [Kriterium f. alt. serier, s. 2 F11]

(15)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerar}$$

$\underline{x = 1:}$ $a_n = \dfrac{1}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar (se ovan)

$\underline{x > 1:}$ $a_n = \dfrac{x^n}{n+1} = \underbrace{x}_{>1}{}^n \dfrac{1}{n+1} \longrightarrow \infty$ då $n \to \infty$

$\Longrightarrow$ a_n går ej mot noll

$\underset{\text{[Termkonv.krit.]}}{\Longrightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar

$$\boxed{\text{Serien är betingat konvergent för } x = -1 \text{ och divergent för } x < -1 \text{ och } x \geq 1.}$$

---

7. a) $\dfrac{1}{\cos x} y' + (\tan x) y = e^{\cos x}$ (*)

Tipset integrerande faktor antyder att vi ska skriva om (*) på formen

$$y' + p(x) y = q(x)$$

d.v.s. (*) blir:

$$y' + \underbrace{(\cos x)(\tan x)}_{= \cos x \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x} y = (\cos x) e^{\cos x}$$

$$y' + \underbrace{(\sin x)}_{= p(x)} y = \underbrace{(\cos x) e^{\cos x}}_{= q(x)} \quad \text{, ok!}$$

I.F. $= e^{\mu(x)}$ där

$$\mu(x) = \int p(x)\, dx = \int \sin x \, dx = -\cos x \quad (+C)$$

$\Longrightarrow$ I.F. $= e^{-\cos x}$

$\Longrightarrow$ DE:n kan skrivas

$$e^{-\cos x} y' + (e^{-\cos x} \sin x) y' = \cos x$$

d.v.s. $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-\cos x} y\right) = \cos x$

$$\Longrightarrow e^{-\cos x} y = \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\boxed{y(x) = e^{\cos x}(\sin x + C)}$$

b) $x^2 y' - xy - y^2 = x^2$ givet att $y(1) = 1$

Man kan skriva ODE:n som (mult. m. $\frac{1}{x^2}$):

$$y' - \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} = 1$$

d.v.s. $y' - \dfrac{y}{x} - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = 1$ (*)

Detta är en "homogen" ODE och kan göras separabel m.h.a. ansättning $V(x) = \dfrac{y(x)}{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y(x) = xV(x) \Rightarrow y'(x) = 1 \cdot V(x) + x \cdot V'(x) =$$
$$= V(x) + xV'(x)$$

Sätt in detta i (*):

$$V + xV' - V - V^2 = 1 \Leftrightarrow xV' - V^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xV' = 1 + V^2 \underset{\text{[Separabelt!]}}{\Leftrightarrow} \frac{dV}{1+V^2} = \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dV}{1+V^2} = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \arctan V = \ln|x| + C \Leftrightarrow$$

(17) $\Leftrightarrow [v = \frac{y}{x}, x>0] \arctan \frac{y}{x} = \ln x + C$

Utnyttja nu $y(1)=1$: $\arctan \frac{1}{1} = \cancel{\ln 1}^{0} + C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ (ty $\tan \frac{\pi}{4} = 1$)

$\Longrightarrow \arctan \frac{y}{x} = \ln x + \frac{\pi}{4}$ (**)

$\Longleftrightarrow \frac{y}{x} = \tan\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right)$ (***)

$\Longleftrightarrow \boxed{y(x) = x \tan\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right)}$ (†)

Notera: Att gå från (**) till (***) kräver att

$-\frac{\pi}{2} < \ln x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ ty $\arctan \alpha = \beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = \tan \beta$ för $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$

d.v.s. $-\frac{3\pi}{4} < \ln x < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{3\pi}{4}} < x < e^{\frac{\pi}{4}}$, d.v.s. definitionsmängden (maximal) till $y(x)$ enl. (†) är $(e^{-3\pi/4}, e^{\pi/4})$.

(Denna noggranna analys ej nödvändig.)

---

8. Ekvationen $x^3 + 6x = 6$ har en reell lösning.

a) Finn den m.h.a. Fixpunktsmetoden, $x_0 = 1$, och 3 decimalers noggrannhet.

Vi ska skriva om ekvationen på formen $f(x) = x$ f.n. fkn $f(x)$. Vi får:

(18)

$$x^3+6x=6 \Leftrightarrow 6-x^3=6x \Leftrightarrow 1-\frac{1}{6}x^3=x$$

d.v.s. $f(x)=1-\frac{1}{6}x^3$. Bilda följden $\{x_n\}$ genom $x_{n+1}=f(x_n)$ givet startvärde x_0; här gäller alltså $x_{n+1}=1-\frac{1}{6}x_n^3$, $x_0=1$:

$$x_1=1-\frac{1}{6}x_0^3=1-\frac{1}{6}\cdot 1^3=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}=0.\underbrace{833}_{\text{3 decimaler}}33\ldots$$

$$x_2=1-\frac{1}{6}x_1^3=1-\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3=1-\frac{125}{1296}=\frac{1171}{1296}=0.\underbrace{903}54\ldots$$

$$x_3=1-\frac{1}{6}x_2^3=1-\frac{1}{6}\left(\frac{1171}{1296}\right)^3=0.\underbrace{877}05\ldots$$

$$x_4=1-\frac{1}{6}x_3^3=1-\frac{1}{6}0.87705\ldots^3=0.\underbrace{887}55\ldots$$

$$x_5=1-\frac{1}{6}x_4^3=1-\frac{1}{6}\cdot 0.88755\ldots^3=0.\underbrace{883}47\ldots$$

$$x_6=1-\frac{1}{6}x_5^3=1-\frac{1}{6}\cdot 0.88347\ldots^3=0.\underbrace{885}07\ldots$$

$$x_7=1-\frac{1}{6}\cdot 0.88507\ldots^3=0.\underbrace{884}44\ldots$$

$$x_8=1-\frac{1}{6}\cdot 0.88444\ldots^3=0.\underbrace{884}69\ldots$$

$$x_9=1-\frac{1}{6}\cdot 0.88469\ldots^3=0.\underbrace{884}59\ldots$$

$$x_{10}=1-\frac{1}{6}\cdot 0.88459\ldots^3=0.\underbrace{884}63\ldots$$

$$x_{11}=1-\frac{1}{6}\cdot 0.88463\ldots^3=0.\underbrace{884}61\ldots$$

etc. Det verkar som att lösningen till tre decimaler är $\underline{\underline{0.885}}$ (avrundat uppåt).

Notera: Man kan visa att Fixpunktssatsen (se s.3ff F13) är tillämplig för t.ex. $I=[3/4, 1]$.

$f'(x)=-\frac{1}{2}x^2<0 \quad \forall x\in I \Rightarrow f$ avtagande på I

(19) $\Longrightarrow x \in [3/4, 1] \Rightarrow f(x) \in [f(1), f(3/4)] =$

$= [1-\frac{1}{6}\cdot 1^3, 1-\frac{1}{6}\cdot(\frac{3}{4})^3] = [\underbrace{5/6}_{>3/4}, \underbrace{119/128}_{<1}] \subset [\frac{3}{4}, 1]$

d.v.s. villkor (i) i Fixpuktsatsen uppfyllt.

(ii): $|f'(x)| = |-\frac{1}{2}x^2| = \frac{1}{2}x^2$

$\Longrightarrow \max_{x\in I} |f'(x)| = \max_{x\in[\frac{3}{4},1]} \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \left|\frac{f(u)-f(v)}{u-v}\right| \leq \max_{x\in I}|f'(x)| = \frac{1}{2}$

d.v.s. $K = \frac{1}{2} < 1$ fungerar i villkoret.

$\Longrightarrow$ Fixpunktssatsen kan tillämpas (varje val av startvärde $x_0 \in I = [3/4, 1]$ kommer ge konvergens av den genererade följden $\{x_n\}$).

b) Finn derr m.h.a. Newtons metod, $x_0 = 1$, och 7 decimalers noggrannhet.

Vi ska skriva om ekvationen på formen

$f(x) = 0$ f.n. funktion (deriverbar) $f(x)$.

Vi får: $x^3 + 6x = 6 \Leftrightarrow x^3 + 6x - 6 = 0$

d.v.s. $f(x) = x^3 + 6x - 6$. Bilda följden $\{x_n\}$ genom $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ givet startvärde x_0; här gäller alltså

$f(x) = x^3 + 6x - 6 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6$

Så att

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3+6x_n-6}{3x_n^2+6} =$$

$$= \frac{x_n(3x_n^2+6)-(x_n^3+6x_n-6)}{3x_n^2+6} =$$

$$= \frac{3x_n^3+6x_n-x_n^3-6x_n+6}{3x_n^2+6} =$$

$$= \frac{2x_n^3+6}{3x_n^2+6} = \frac{2}{3}\,\frac{x_n^3+3}{x_n^2+2}, \quad x_0 = 1.$$

Detta ger:

$$x_1 = \frac{2}{3}\,\frac{x_0^3+3}{x_0^2+2} = \frac{2}{3}\,\frac{1^3+3}{1^2+2} = \frac{8}{9} = 0.\underbrace{8888888}_{7\ \text{decimaler}}88\ldots$$

$$x_2 = \frac{2}{3}\,\frac{x_1^3+3}{x_1^2+2} = \frac{2}{3}\,\frac{(8/9)^3+3}{(8/9)^2+2} = \frac{2}{3}\,\frac{2699}{2034} =$$

$$= \frac{2699}{3051} = 0.\underline{8846279}90\ldots$$

$$x_3 = \frac{2}{3}\,\frac{x_2^3+3}{x_2^2+2} = \frac{2}{3}\,\frac{0.884627990\ldots^3+3}{0.884627990\ldots^2+2} = 0.\underline{8846222}00\ldots$$

$$x_4 = \frac{2}{3}\,\frac{x_3^3+3}{x_2^2+2} = \frac{2}{3}\,\frac{0.884622200\ldots^3+3}{0.884622200\ldots^2+2} = 0.\underline{8846222}00\ldots$$

$$x_5 = \frac{2}{3}\,\frac{x_4^3+3}{x_4^2+2} = \frac{2}{3}\,\frac{0.884622200\ldots^3+3}{0.884622200\ldots^2+2} = 0.\underline{8846222}00\ldots$$

etc. Det verkar som att lösningen till sju decimaler är $\underline{\underline{0.8846222}}$ (avrundat nedåt).