①

Rekonstruerad

# Tentamen i Fördjupningskurs i analys, 7,5 hp
## MA059G

Datum: 2009-08-17

Skrivtid: 5 timmar

Lärare: Andreas Lind och Per Edström

[övrig info: Se t.ex. Tentamen 2009-06-01.]

---

1. (i) Formulera definitionen, d.v.s. med $\varepsilon$–$\delta$-formalism, för $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

   (ii) Bevisa att om $\lim_{x\to a} f(x) = L$ och $\lim_{x\to a} g(x) = M$ så gäller $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = L+M$

2. Derivera $k(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt$ där f och g antas deriverbara.

3. För vilka värden på b är $f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & x \geq 0 \\ x^2+3bx+1, & x<0 \end{cases}$

   (i) kontinuerlig?

   (ii) deriverbar?

4. Formulera definitionen av den bestämda integralen av f på [a,b] betecknad $I = \int_a^b f(x)\,dx$

5. Ett lagringsmedium i form av en cirkulär skiva med radien 5 cm innehåller datamängdstätheten $e^r$ Mb/cm$^2$ ($1$ Mb $= 2^{20}$ bitar, d.v.s. 0:or och 1:or) på avståndet $r$ cm från skivans mittpunkt. Hur stor datamängd rymmer skivan?

6. Använd Newtons metod med startvärdet $x_0 = 0.5$ för att lösa ekvationen $\sin x + \cos x - 1 = 0$.

7. Lös differentialekvationen $y'' + 4y' + 3y = x^2 e^x$.

8. Formulera Satsen om största och minsta värde samt ge ett exempel på när den inte är tillämpbar.

---

Lycka till!

Tentan rekonstruerad av Jens Persson

Lösningar av Abtin Daghighi

0908 17

① (i) $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon < \infty, \exists \delta > 0, \delta \in \mathbb{R}, \delta < \infty$

sådan att

$$|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

(ii) Låt $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $\lim_{x \to a} g(x) = M$.

$$\lim_{x \to a} \left| [f(x) + g(x)] - (L + M) \right| =$$

$$\lim_{x \to a} \left| (f(x) - L) + (g(x) - M) \right| \underset{\substack{\text{triangel} \\ \text{olikheten}}}{\leq}$$

$$\lim_{x \to a} \left( |f(x) - L| + |g(x) - M| \right)$$

d.v.s. vi kan välja $\delta$ s.a. $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ och $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$ (detta går eftersom $L$ och $M$ per def. är gränsvärdena till $f$ resp. $g$ i $x = a$).

då fås $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta$ s.a.

$$|x - a| < \delta \Rightarrow \left| (f(x) + g(x)) - (L + M) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

2009-08-17

(2) derivera

$$k(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt, \quad f, g \in C^1.$$

$h$ - integrerbar $\Rightarrow$ fix'x

H är en prim. funktion till h

$$\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt = H(g(x)) - H(f(x)) = k(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(k(x)) = \frac{d}{dx}\left(H(g(x))\right) - \frac{d}{dx}\left(H(f(x))\right) \overset{\text{kedjeregeln}}{=}$$

$$h(g(x)) \cdot \frac{dg(x)}{dx} - h(f(x)) \cdot \frac{d}{dx}(f(x))$$

090817

3.

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & , x \geq 0 \\ x^2 + 3bx + 1 & , x < 0 \end{cases}$$

(i) kontinuitet kräver

$$\underbrace{\lim_{x \to 0+} \cos(\pi x)}_{=1} = \underbrace{\lim_{x \to 0-} x^2 + 3b\,x + 1}_{=1} \Rightarrow \text{ok}$$

d.v.s. den är kontinuerlig $\forall |b| < \infty, b \in \mathbb{R}$.

(ii) deriverbarhet i $0 = x_0$:

Motivera att utanför 0 så är funktionen deriverbar ty cos(x) och polynom är det ...

$$* \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\cos(\pi x_0 + h\pi) - 1}{h}$$

$$\underset{x_0=0}{=} \lim_{h \to 0+} \frac{\cos(h\pi) - 1}{h} = \left\{ \cos(x) \underset{\text{Taylor}}{\overset{\text{nära } 0}{\approx}} 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{-\frac{(h\pi)^2}{2!} + O(h^4)}{h} = \lim_{h \to 0+} -\frac{h\pi^2}{2!} + O(h^4) = 0.$$

$$* \lim_{h \to 0-} \frac{(x+h)^2 + 3b(x+h) + 1 - (x^2 + 3bx + 1)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0h + h^2 + \cancel{3bx_0} + 3bh + \cancel{1} - \cancel{x_0^2} - \cancel{3bx_0} - \cancel{1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} (2x_0 + h + 3b) \underset{x_0=0}{=} 3b$$

$\Rightarrow$ Välj $\boxed{b = 0}$

090817

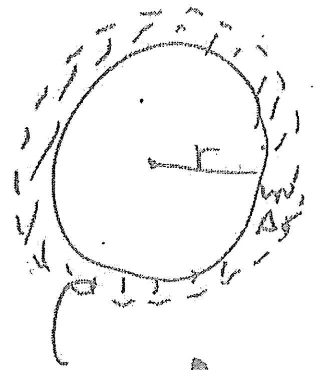
(4.) man räknar ut gränsvärdet av Riemann översumman och sen gränsvärdet av Riemann undersumman och verifierar att de är ändliga och sammanfaller (om funktion är integrerbar).

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} \Delta x_{j+1}\, \tilde{f}_j\right), \text{ där } \tilde{f}_j = \begin{cases} \max\limits_{x\in[x_j,\, x_{j+1}]} f(x), & \text{för översumman} \\ \min\limits_{x\in[x_j,\, x_{j+1}]} f(x), & \text{för undersumman} \end{cases}$$

5. 090817

$$D(r) = e^r \quad Mb/cm^2$$

$$\text{Data} = 2\pi \int_{r=1}^{r=5} r \cdot e^r \, dr$$




$dA = 2r\pi \Delta r$

$$= 2\pi \left[ r \cdot e^r \right]_1^5 - 2\pi \underbrace{\int_1^5 e^r}_{\left[ e^r \right]_1^5}$$

$$= 2\pi \left( (5e^5 - e^5) \underbrace{- e^1 - (-e^1)}_{=0} \right) = e^5 \cdot 8\pi \quad Mb$$

090817

(6.) Newton Raphson

$f(x) = (\sin(x) + \cos(x) - 1)$ letar efter nollställena.

$x_0 = 0{,}5, \quad f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0{,}5 - \frac{\sin(\frac{1}{2}) + \cos(\frac{1}{2}) - 1}{\cos(\frac{1}{2}) - \sin(\frac{1}{2})}$$

$= -0{,}3967$
miniräknare

$x_2 = \dots \doteq -0{,}0421$

$x_3 = \dots \doteq -0{,}0008$

$x_4 = \dots \doteq 0$

Testa

$\sin(0) + \cos(0) - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$

OK!

090817

(7) $y'' + 4y' + 3y = x^2 e^x$

$y_h$: $r^2 + 4r + 3 = 0 \Rightarrow (r+2)^2 - 4 + 3 = 0$

$\Rightarrow r = -2 \pm \sqrt{1} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow y_h = Ae^{-x} + Be^{-3x}$

---

$$\begin{cases} y_p = (ax^2 + bx + c)e^x \\ y_p' = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x \\ y_p'' = 2ae^x + (2ax+b)e^x + (2ax+b)e^x + (ax^2+bx+c)e^x \end{cases}$$

$$\frac{1}{e^x}(y_p'' + 4y_p' + 3y_p) = (2a + 2ax + b + 2ax + b + ax^2 + bx + c$$

$$+ 8ax + 4b + 4ax^2 + 4bx + 4c + (3ax^2 + 3bx + 3c)$$

$$= 8ax^2 + x \cdot (8b + 12a) + (2a + 6b + 8c)$$

HL $= x^2 e^x \Rightarrow$ Behöver:

$$\begin{cases} * \ 8a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{8} \\ * \ 8b + 12a \Rightarrow b = -\frac{12}{8} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{3}{16} \\ * \ 2a + 6b + 8c = \frac{1}{4} + \frac{(-18)}{16} + 8c \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8c = \frac{18}{16} - \frac{4}{16} = \frac{14}{16} \Rightarrow c = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{7}{64}$$

$$\Rightarrow y_p = \left(\frac{1}{8}x^2 + \left(-\frac{3}{16}\right)x + \frac{7}{64}\right)e^x \Rightarrow y = y_h + y_p$$ är den allmänna lösningen

09.08.17

8.

Sats: Låt f vara en kontinuerlig reellvärd funktion på intervallet $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $|a|,|b|<\infty$, $a<b$. Då antar f maximum och minimum på $[a,b]$.

Exempel på fall där satsen inte gäller:

$f(x) = \frac{1}{x}$ på $(0,\infty)$.