Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Tentamen i Fördjupningskurs i Analys, 7,5/6 hp

MA059G/MA060G

Datum: 2009-08-17
Skrivtid: 5 timmar
Lärare: Andreas Lind (070-6890822) och Per Edström (073-7602151)
NAT
Hjälpmedel: Formelsamling (Gymnasieformelsamling, Ekbom Tabeller och formler för NV-programmet, Natur & Kultur eller Tefyma), skriv och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

Den obligatoriska delen av denna tenta omfattar 8 frågor. Därutöver innehållar skrivningen en frivillig uppgift. Den obligatoriska delen kan maximalt ge betyget B. Tillsammans med betyget B på den obligatoriska delen kan lösningen på den frivilliga uppgiften ge kursbetyget A. En god behandling av den frivilliga uppgiften kan även lyfta kursbetyget ett steg från ett skrivningsbetyg C, D eller E på den obligatoriska delen. Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge avdrag även om slutresultatet är rätt! Behandla högst en uppgift på varje papper! Glöm ej att skriva kod på varje sida.

LYCKA TILL!!

1. **(Obligatorisk)**
   Ange den formella definition av att $\lim_{x \to a} f(x)$. Visa sedan att om $\lim_{x \to a} f(x) = L$ och $\lim_{x \to a} g(x) = M$ så är $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = L + M$.

2. **(Obligatorisk)**
   Formulera integralkalkylens huvudsats, dvs den sats som uttalar sig om ett visst förhållande mellan integralen av en funktion och dess primitiva funktion. Glöm inte att ta med alla antaganden. Om f och g är deriverbara funktioner, derivera då följande funktion:

$$k(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt.$$

3. **(Obligatorisk)**
   Bestäm de reella konstanterna a och b så att

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & , x > 0 \\ x^2 + 3bx + 1 & , x < 0 \end{cases}$$

   blir kontinuerlig och deriverbar. Motivera väl!

4. **(Obligatorisk)**
   Förklara med ord hur man avgör hur en funktion f är integrerbar på ett intervall $[a, b]$.

5. **(Obligatorisk)**
   Ett nytt datalagringsformat för CD-liknande skivor ger en lagringsdensitet på $D(r) = e^r$ megabyte$/cm^2$, där r är radien från skivans centrum. Hur mycket data får plats på en skiva om man lagrar mellan radierna 1 och 5 cm?

6. **(Obligatorisk)**
   Använd valfri numerisk metod i fyra steg för att lösa $\sin(x) + \cos(x) = 1$ med startvärde $x_0 = 0.5$

7. **(Obligatorisk)**
   Ta fram en allmän lösning till differentialekvationen $y'' + 4y' + 3y = x^2 e^x$.

8. **(Obligatorisk)**
   Formulera satsen om existens av största och minsta värde för en funktion f. Ange också en funktion som saknar största och minsta värde.

A. **(Frivillig)**
   Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats, och redovisa därvid tydligt var och på vilket sätt förutsättningen att funktionen är kontinuerlig används i beviset.

Lösningar av Abtin Daghighi

<u>090814</u>

① (i) $\forall\, \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon < \infty,\ \exists\, \delta > 0,\ \delta \in \mathbb{R},\ \delta < \infty$ sådan att

$$|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

(ii) Låt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$.

$$\lim_{x \to a} \left| \left[f(x) + g(x) \right] - (L + M) \right| =$$

$$\lim_{x \to a} \left| \left(f(x) - L \right) + \left(g(x) - M \right) \right| \underset{\text{triangel olikheten}}{\leq}$$

$$\lim_{x \to a} \left(|f(x) - L| + |g(x) - M| \right)$$

dvs. vi kan välja δ s.a. $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ och $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$ (detta går eftersom L och M resp. är gränsvärdena till f resp. g i $x = a$).

då gäller $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta$ s.a.

$$|x - a| < \delta \Rightarrow \left| (f(x) + g(x)) - (L + M) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

2009-08-17

(2) derivera $k(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt, \quad f, g \in C^1.$

h - integrerbar $\Rightarrow$ $\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt = H(g(x)) - H(f(x)) = k(x)$

fix'x

H är en prim. funktion till h

kedjeregeln

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(k(x)) = \frac{d}{dx}\left(H(g(x))\right) - \frac{d}{dx}\left(H(f(x))\right) =$

$h(g(x)) \cdot \frac{dg(x)}{dx} - h(f(x)) \cdot \frac{d}{dx}(f(x))$

(3) 090817

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & , x \geq 0 \\ x^2 + 3bx + 1 & , x < 0 \end{cases}$$

(i) kontinuitet prover

$$\underbrace{\lim_{x \to 0+} \cos(\pi x)}_{=1} = \underbrace{\lim_{x \to 0-} x^2 + 3b x + 1}_{=1} \Rightarrow \text{ok}$$

dvs. den är kontinuerlig $\forall |b| < \infty, b \in \mathbb{R}$.

(ii) deriverbarhet i $0 = x_0$:

$$* \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\cos(\pi x_0 + h\pi) - 1}{h}$$

$$\underset{x_0=0}{=} \lim_{h \to 0+} \frac{\cos(h\pi) - 1}{h} = \left\{ \underset{\text{Taylor}}{\cos(x) \overset{\text{nära } 0}{\approx} 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots} \right\}$$

Notera att utom för 0 så är funktioner deriverbar ty $\cos(x)$ och polynom är det ...

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{-\frac{(h\pi)^2}{2!} + O(h^4)}{h} = \lim_{h \to 0+} -\frac{h\pi^2}{2!} + O(h^4) = 0.$$

$$* \lim_{h \to 0-} \frac{(x+h)^2 + 3b(x+h) + 1 - (x^2 + 3bx + 1)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0h + h^2 + \cancel{3bx_0} + 3bh + \cancel{1} - \cancel{x_0^2} - \cancel{3bx_0} - \cancel{1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}}(2x_0 + h + 3b) \underset{x_0=0}{=} 3b$$

$$\Rightarrow \text{Välj } \boxed{b = 0}$$

090817

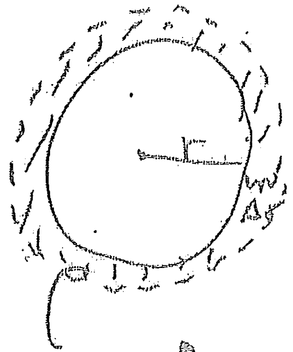
9. man räknar ut gränsvärdet av Riemann översumman och sen gränsvärdet av Riemann undersumman och verifierar att de är ändliga och sammanfaller (om punkten är integrerbar).

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \Delta x_{j+1} \tilde{f}_j \right), \text{ där } \tilde{f}_j = \begin{cases} \max\limits_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x), & \text{för översumman} \\ \min\limits_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x), & \text{för undersumman} \end{cases}$$

5. 090817

$$D(r) = e^r \quad Mb/cm^2$$

$$Data = 2\pi \int_{r=1}^{r=5} r\cdot e^r \, dr$$



$dA = 2r\pi \Delta r$

$$= 2\pi \left[r\cdot e^r\right]_1^5 - 2\pi \underbrace{\int_1^5 e^r}_{\left[e^r\right]_1^5}$$

$$= 2\pi\left(\left(5e^5 - e^5\right) - \underbrace{e^1 - (-e^1)}_{=0}\right) = e^5 \cdot 8\pi \quad Mb$$

090817

(6.) Newton Raphson

$f(x) = (\sin(x) + \cos(x) - 1)$ letar efter nollställena.

$x_0 = 0{,}5, \quad f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0{,}5 - \frac{\sin(\frac{1}{2}) + \cos(\frac{1}{2}) - 1}{\cos(\frac{1}{2}) - \sin(\frac{1}{2})} \approx -0{,}3967$$

miniräknare

$x_2 = \ldots \approx -0{,}0421$

$x_3 = \ldots \approx -0{,}0008$

$x_4 = \ldots \approx 0$

Testa

$\sin(0) + \cos(0) - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$

OK!

090817

(7) $y'' + 4y' + 3y = x^2 e^x$

y_h: $r^2 + 4r + 3 = 0 \Rightarrow (r+2)^2 - 4 + 3 = 0$

$\Rightarrow r = -2 \pm \sqrt{1} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow y_h = Ae^{-x} + Be^{-3x}$

$$\begin{cases} y_p = (ax^2 + bx + c)e^x \\ y_p' = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x \\ y_p'' = 2ae^x + (2ax+b)e^x + (2ax+b)e^x + (ax^2+bx+c)e^x \end{cases}$$

$$\frac{1}{e^x}(y_p'' + 4y_p' + 3y_p) = (2a + 2ax + b + 2ax + b + ax^2 + bx + c)$$

$$+ (8ax + 4b + 4ax^2 + 4bx + 4c) + (3ax^2 + 3bx + 3c)$$

$$= 8ax^2 + x\cdot(8b + 12a) + (2a + 6b + 8c)$$

HL $= x^2 e^x \Rightarrow$ Behöver:

$$\begin{cases} * \ 8a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{8} \\ * \ 8b + 12a \Rightarrow b = -\frac{12}{8}\cdot\frac{1}{8} = -\frac{3}{16} \\ * \ 2a + 6b + 8c = \frac{1}{4} + \frac{(-18)}{16} + 8c \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8c = \frac{18}{16} - \frac{4}{16} = \frac{14}{16} \Rightarrow c = \frac{2\cdot 7}{2\cdot 8\cdot 8} = \frac{7}{64}$$

$\Rightarrow y_p = \left(\frac{1}{8}x^2 + \left(\frac{-3}{16}\right)x + \frac{7}{64}\right)e^x \Rightarrow y = y_h + y_p$ är den allmänna lösningen

090817

8.

Sats: Låt f vara en kontinuerlig reellvärd funktion på intervallet [a, b], $a, b \in \mathbb{R}$, $|a|, |b| < \infty$, $a < b$. Då antar f maximum och minimum på [a, b].

Exempel på fall där satsen inte gäller:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ på } (0, \infty)$$