Mittuniversitetet Svenska
NAT, Stefan Borell

Tentamen i matematik
Fördjupningskurs i analys (MA092G/MA093G)
24 oktober 2011
Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Godkänd miniräknare samt bifogad formelsamling

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida.

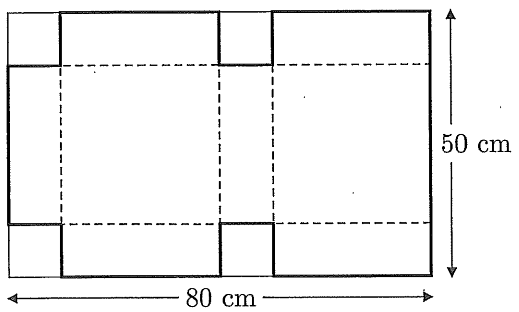
Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärde för betygen är: A 22p, B 18p, C 14p, D 10p, E 9p.

1. Betrakta $f(x) = e^{-x}$. Använd Taylors formel i punkten $a = 0$ för att approximera talet $1/e$ med ett fel som är mindre än $0{,}5 \cdot 10^{-3}$. Lösningen får inte bero av en jämförelse med värdet $1/e$ från en miniräknare. (3p)

2. Använd Medelvärdessatsen för att bevisa att $\tan x > x$ för $0 < x < \pi/2$. (2p)

   Medelvärdessatsen. Antag att funktionen f är kontinuerlig på det slutna, begränsade intervallet $[a, b]$ och att den är deriverbar på det öppna intervallet (a, b). Då finns det en punkt c i det öppna intervallet (a, b) sådan att
   $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

3. Fyra kvadrater skärs ut ur en rektangel i papp av storlek $50\,\text{cm} \times 80\,\text{cm}$ och den återstående biten viks till en sluten rektangulär låda med två överlappande flikar. Hitta den största möjliga volymen av en sådan låda.



(3p)

4. Avgör om integralen
   $$\int_0^1 \frac{x}{1 - x^2}\,dx$$
   är konvergent eller divergent. Bestäm dess värde om den är konvergent. (3p)

5. Låt $a > 0$ och antag att vi vill beräkna $\ln a$. Hur kan man göra det om miniräknaren saknar knappar för logaritmer? Följande gränsvärden kommer till användning.

   (a) Visa att
   $$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \qquad \text{(2p)}$$
   Tips: Använd det faktum att $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$.

   (b) Använd gränsvärdet i (a) och bevisa att
   $$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a. \qquad \text{(1p)}$$

[De flesta miniräknare har en kvadratrots-knapp. Det följer från (b) att värdet $\ln a$ kan approximeras som följer: Om n är en potens av 2, säg $n = 2^k$, så kan $\sqrt[n]{a}$ beräknas genom att mata in talet a och trycka k gånger på kvadratrots-knappen, dvs

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/2^k} = \sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{a}}} \qquad (k \text{ kvadratrötter}).$$

Efteråt subtraherar man 1 från resultatet och multiplicerar med n för att approximera talet $\ln a$.]

Kuriosa!

6. (a) Ge den formella definitionen av påståendet "funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i punkten $x = a$". (1p)

   (b) Låt a och b vara reella tal och betrakta funktionen
   $$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{om } x < -2, \\ b - ax - x^2 & \text{om } -2 \le x < 1, \\ -3 + bx & \text{om } x \ge 1. \end{cases}$$
   För vilka värden på a och b är funktionen f kontinuerlig? (2p)

7. Betrakta polynomet $p(x) = x^3 - x - 1$. Den enda reella roten till detta polynom är ett irrationellt tal. Beskriv en metod för att approximera värden på denna rot (utan att använda miniräknare). Använd metoden för att approximera roten med ett fel som är mindre än 0,1. (3p)

8. Betrakta initialvärdesproblemet $x^2y' = (1 + x^2)y^2$, $y(2) = 2$.

   (a) Hitta lösningen $y(x)$ till detta initialvärdesproblem. (2p)

   (b) Använd Eulers metod med initialvärden $x_0 = 1$, $y_0 = 1/2$ och steglängd $h = 0{,}5$ för att approximera värdet $y(2)$ till en lösning av differentialekvationen $x^2y' = (1 + x^2)y^2$. Kom ihåg att det iterativa steget i Eulers metod ges av
   $$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h, \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot F(x_n, y_n), \end{cases} \qquad n \ge 0, \qquad n \in \mathbb{Z},$$
   när man betraktar differentialekvationen $y' = F(x, y)$. (1p)

Mid Sweden University
NAT, Stefan Borell

Engelska

Mathematics Examination
Calculus II (MA092G/MA093G)
October 24, 2011
Duration: 5 hours
Aids permitted: An approved calculator and the formula collection attached

Working must be shown in full in order to obtain full credit for an exercise. Do one question per page and write on one side of the paper only.

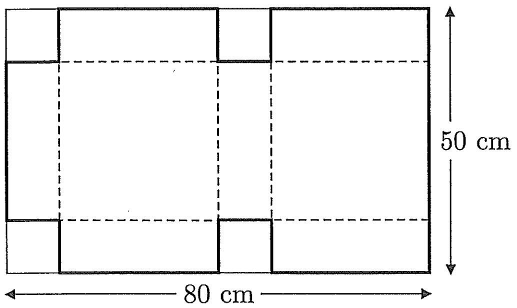
The grade is determined by the extent to which a candidate demonstrates that the learning outcomes of the course have been met. Guide values for grades are: A 22p, B 18p, C 14p, D 10p, E 9p.

1. Consider $f(x) = e^{-x}$. Use Taylor's formula at the point $a = 0$ in order to approximate the number $1/e$ with an error smaller than $0.5 \cdot 10^{-3}$. The solution may not depend on a comparison with the value $1/e$ given by a calculator. (3p)

2. Use the Mean-Value Theorem to prove that $\tan x > x$ for $0 < x < \pi/2$. (2p)

   The Mean-Value Theorem. Suppose that the function f is continuous on the closed, bounded interval $[a, b]$ and that it is differentiable on the open interval (a, b). Then there exists a point c in the open interval (a, b) such that
   $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

3. Four squares are cut out of a rectangle of cardboard of size 50 cm $\times$ 80 cm, and the remaining piece is folded into a closed, rectangular box, with two extra flaps tucked in. Find the largest possible volume for such a box.



(3p)

4. Determine whether the integral
   $$\int_0^1 \frac{x}{1 - x^2}\, dx$$
   is convergent or divergent. Find its value if it is convergent. (3p)

5. Let $a > 0$ and suppose that we wish to calculate $\ln a$. How to do this if your calculator does not have buttons for logarithms? The following limits can be put to use.

   (a) Show that
   $$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \qquad (2p)$$
   Hint: Use the fact that $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$.

   (b) Use the limit in (a) and prove that
   $$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a. \qquad (1p)$$

Most calculators have a square root key. It follows from (b) that the value $\ln a$ can be approximated as follows: If n is a power of 2, say $n = 2^k$, then $\sqrt[n]{a}$ can be calculated by entering a and hitting the square root key k times, that is,
$$\sqrt[n]{a} = a^{1/2^k} = \sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{a}}} \qquad (k \text{ square roots}).$$
Next, you subtract 1 and multiply by n to get an approximation for $\ln a$.

Kuriosa!

6. (a) Give the formal definition of the statement "the function $f(x)$ is continuous at the point $x = a$." (1p)

   (b) Let a and b be real numbers and consider the function
   $$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{if } x < -2, \\ b - ax - x^2 & \text{if } -2 \le x < 1, \\ -3 + bx & \text{if } x \ge 1. \end{cases}$$
   For which values of a and b is the function f continuous? (2p)

7. Consider the polynomial $p(x) = x^3 - x - 1$. The only real root of this polynomial is an irrational number. Describe a method for finding an approximate value of this root (without using a calculator). Apply this method to approximate the root with an error smaller than 0.1. (3p)

8. Consider the initial value problem $x^2y' = (1 + x^2)y^2$, $y(2) = 2$.

   (a) Find the solution $y(x)$ of the initial value problem. (2p)

   (b) Use Euler's Method with initial values $x_0 = 1$, $y_0 = 1/2$, and step size $h = 0.5$ to approximate the value $y(2)$ for a solution of the differential equation $x^2y' = (1+x^2)y^2$. Recall that the iterative step in Euler's Method is given by
   $$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h, \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot F(x_n, y_n), \end{cases} \qquad n \ge 0, \qquad n \in \mathbb{Z},$$
   when considering the differential equation $y' = F(x, y)$. (1p)

LÖSNINGAR TILL OMTENTAN 2011-10-24

(Lösningar av Jens Persson 2011-11-23)

1. Taylors formel i $a=0$ för $f(x)=e^{-x}$ för att approximera $1/e$ med fel mindre än $0.5\cdot 10^{-3}$.

Lösning: $f(1)=e^{-1}=1/e$, d.v.s. vi ska approximera $f(1)$ genom Taylorpolynom $P_n(x)$ kring $x=a=0$.
Det gäller i allmänhet (om f uppfyller Taylors sats och $x>a$)

$$f(x)=P_n(x)+E_n(x)$$

där
$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

och
$$E_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(s)(x-a)^{n+1},\quad s\in(a,x)$$

Vi vill att $|E_n(1)|<0.5\cdot 10^{-3}$. Man inser lätt att $f^{(k)}(x)=(-1)^k e^{-x}$ så felet är till beloppet

$$|E_n(1)|=\left|\frac{1}{(n+1)!}(-1)^{n+1}e^{-s}(1-0)^{n+1}\right|=$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}e^{-s}\le\frac{1}{(n+1)!}\underbrace{\max_{s\in(0,1)}e^{-s}}_{=e^{-0}=1}=\frac{1}{(n+1)!}$$

Men $\frac{1}{(n+1)!}<0.5\cdot 10^{-3}=\frac{1}{2000}\Leftrightarrow(n+1)!>2000\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[6!=720,\ 7!=5040]\quad n+1\ge 7\Leftrightarrow n\ge 6$

Vi väljer förstås $n=6$. Vi vet nu att $f(1)\approx P_6(1)$ med ett fel mindre än $0.5\cdot 10^{-3}$. Det gäller att:

$$P_6(1)=f(0)+f'(0)(1-0)+\frac{1}{2!}f''(0)(1-0)^2+\frac{1}{3!}f'''(0)(1-0)^3$$
$$+\frac{1}{4!}f^{(4)}(0)(1-0)^4+\frac{1}{5!}f^{(5)}(0)(1-0)^5+\frac{1}{6!}f^{(6)}(0)(1-0)^6=$$

$$= f(0) + f'(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{6}f'''(0) + \frac{1}{24}f^{(4)}(0) + \frac{1}{120}f^{(5)}(0) + \frac{1}{720}f^{(6)}(0) =$$

$$= (-1)^0 e^{-0} + (-1)^1 e^{-0} + \frac{1}{2}(-1)^2 e^{-0} + \frac{1}{6}(-1)^3 e^{-0} + \frac{1}{24}(-1)^4 e^{-0} + \frac{1}{120}(-1)^5 e^{-0} + \frac{1}{720}(-1)^6 e^{-0} =$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} =$$

$$= \frac{360 - 120 + 30 - 6 + 1}{720} = \frac{265}{720} = \frac{5 \cdot 53}{5 \cdot 144} =$$

$$= \frac{53}{144} = 0.3608\overline{5} \quad (= 0.3608555555\ldots)$$

$$\boxed{\text{Vi har approximationen } 1/e \approx 0.3608\overline{5} \text{ med ett fel på mindre än } 0.5 \cdot 10^{-3}.}$$

Notera: $E_6(1) = -0.176114\ldots \cdot 10^{-3}$

---

2. Bevisa $\tan x > x$ för $0 < x < \pi/2$ med hjälp av Medelvärdessatsen.

Lösning: Använd MVS på $[0, x]$ med $f(x) = \tan x$ (eftersom x behövs i nämnaren) för $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \quad \text{f.n. } c \in (0, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\tan x - \tan 0}{x} = \frac{1}{\cos^2 c} \qquad \left(\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\tan x = \frac{1}{\cos^2 c} x \qquad (*)$$

Men $|\cos c| \leq 1 \Rightarrow \cos^2 c \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 c} \geq 1$

med likhet omm $\cos c = \pm 1 \Leftrightarrow c = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

③ Men $c \in (0,x) \subset (0,\pi/2)$ så $\cos c = \pm 1 \Leftrightarrow$
$c = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ är ej möjligt $\Rightarrow$ Olikheten strikt

$$\Longrightarrow \quad \tan x = \frac{1}{\cos^2 c} x > 1 \cdot x = x, \quad 0 < x < \pi/2$$

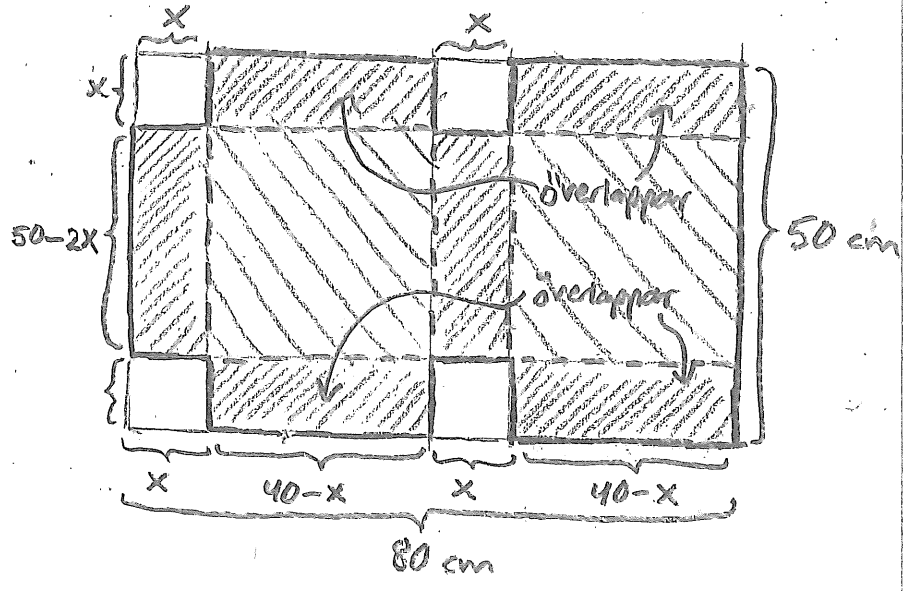
Vi har bevisat den påstådda olikheten.

---

3. Rektangel 50 cm × 80 cm, fyra kvadrater skärs ut och återstående bit viks ihop till en låda. Hitta största volymen.

Lösning: Se figur:

Notera att $\boxed{x \geq 0}$ (trivialt) och att $50-2x \geq 0$, $40-x \geq 0$
$x \leq 25$, $x \leq 40$
d.v.s. $\boxed{x \leq 25}$.



Vi kallar kvadraternas sidlängd x (cm), då får man mått enligt figur. Volymen $V(x)$ blir:

$$V(x) = \text{höjd} \times \underset{\longleftrightarrow}{\text{bredd}} \times \text{längd}_{\updownarrow} =$$

$$= x \cdot (40-x) \cdot (50-2x) =$$

$$= 2x(40-x)(25-x), \quad x \in [0,25]$$

• Kritiska punkter: $V'(x) = 2(40-x)(25-x) +$
$+ 2x(-1)(25-x) +$
$+ 2x(40-x)(-1) =$

$$= 2(40-x)(25-x) - 2x(25-x) - 2x(40-x) =$$ 4

$$= 2(1000 - 65x + x^2) - 50x + 2x^2 - 80x + 2x^2 =$$

$$= 2000 - 130x + 2x^2 - 130x + 4x^2 =$$

$$= 6x^2 - 260x + 2000$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 260x + 2000 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{130}{3}x + \frac{1000}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{65}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{65}{3}\right)^2 - \frac{1000}{3}} =$$

$$= \frac{65}{3} \pm \sqrt{\frac{4225 - 3000}{9}} = \frac{65}{3} \pm \frac{\sqrt{1225}}{3} =$$

$$= \frac{65}{3} \pm \frac{35}{3} = \begin{cases} 100/3 \\ 30/3 \end{cases} = \begin{cases} 100/3 > 25 \text{ ⚡} \\ 10 \end{cases}$$

d.v.s. kritisk punkt $x = 10$ (cm).

- Singulära punkter: saknas.
- Ändpunkter: $x = 0$ och $x = 25$.

Största värdet bland dessa punkter (3 st):

$$\begin{cases} V(0) = 2 \cdot 0 \cdot (40-0) \cdot (25-0) = 0 \quad (\text{cm}^3) \\ V(10) = 2 \cdot 10 \cdot (40-10) \cdot (25-10) = \\ \quad = 20 \cdot 30 \cdot 15 = 9000 \quad (\text{cm}^3) \\ V(25) = 2 \cdot 25 \cdot (40-25)(25-25) = 0 \quad (\text{cm}^3) \end{cases}$$

Största värdet är 9000 (cm^3).

$$\boxed{\text{Lådans största möjliga volym är } 9000 \text{ cm}^3 \text{ (d.v.s. } 9 \text{ dm}^3 = 9 \text{ liter).}}$$

⑤ **4.** Avgör om $\int_0^1 \frac{x}{1-x^2}\,dx$ konvergent eller divergent och bestäm värdet om konvergent.

Lösning: Detta är en generaliserad integral av Typ II (se sid. 2 i F9) ty integranden $\frac{x}{1-x^2}$ obegränsad då $x \to 1_-$. Per definition gäller:

$$\int_0^1 \frac{x}{1-x^2}\,dx = \lim_{c \to 1_-} \int_0^c \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

Vi kan antingen variabelsubstituera eller partialbråksuppdela, vi gör båda för fullständighetens skull!

• Variabelsubstitution: $(0<c<1)$
$$\int_0^c \frac{x}{1-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} u=1-x^2 \\ du=-2x\,dx \end{array},\ \begin{cases} x=c \Rightarrow u=1-c^2 \\ x=0 \Rightarrow u=1 \end{cases}\right]$$
$$= \int_1^{1-c^2} \frac{1}{u}\left(-\frac{1}{2}\right)du = \frac{1}{2}\int_{1-c^2}^1 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\Big[\ln|u|\Big]_{1-c^2}^1 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \ln(1-c^2)\right) = -\frac{1}{2}\ln(1-c^2)$$

• Partialbråksuppdelning: $(0<c<1)$
$$\frac{x}{1-x^2} = \frac{x}{(1-x)(1+x)} = [\text{ansätt}] =$$
$$= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A+Ax+B-Bx}{(1-x)(1+x)} =$$
$$= \frac{(A+B)+(A-B)x}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+(A-1)=0 \\ B=A-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A=1 \\ B=A-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1/2 \\ B=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^c \frac{x}{1-x^2}\,dx = \int_0^c \left(\frac{1/2}{1-x} - \frac{1/2}{1+x}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^c \left(-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = -\frac{1}{2}\Big[\ln|x-1| + \ln(x+1)\Big]_0^c =$$

⑥

$$= -\frac{1}{2}\left[\ln(1-x)(1+x)\right]_0^c = -\frac{1}{2}\left[\ln(1-x^2)\right]_0^c =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\ln(1-c^2) - \ln 1\right) = -\frac{1}{2}\ln(1-c^2)$$

Det gäller därför att:

$$\int_0^1 \frac{x}{1-x^2}\,dx = \lim_{c\to 1-}\left(-\frac{1}{2}\ln(1-c^2)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{c\to 1-}\underbrace{\ln(1-c^2)}_{\to -\infty} = +\infty$$

d.v.s. vi har <u>divergens mot $+\infty$</u>.

---

5. a) Visa $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$, $a>0$.

<u>Lösning:</u> $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{\ln a})^x-1}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x} = \begin{bmatrix} t = x\ln a \Leftrightarrow x = t/\ln a \\ x\to 0 \Leftrightarrow t\to 0,\ a\neq 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t/\ln a}, & a\neq 1 \\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 1}-1}{x}, & a=1 \end{cases} = \begin{cases} (\ln a)\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}, & a\neq 1 \\ \lim_{x\to 0}\frac{e^0-1}{x}, & a=1 \end{cases} =$$

$$= [\text{Tipset}] = \begin{cases} (\ln a)\cdot 1, & a\neq 1 \\ \lim_{x\to 0} 0, & a=1 \end{cases} = \begin{cases} \ln a, & a\neq 1 \\ 0, & a=1 \end{cases} =$$

$$= \ln a, \quad a>0 \quad (\text{ty } \ln a = \ln 1 = 0, a=1)$$

b) Visa $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \ln a$

⑦ Lösning: $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \lim_{n\to\infty} n(a^{1/n}-1) =$

$= \begin{bmatrix} n = 1/t \Leftrightarrow t = 1/n \\ n\to\infty \Leftrightarrow t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(a^t-1) =$

$= \lim_{t\to 0} \frac{a^t-1}{t} = [\text{uppg. (a)}] = \ln a$

---

6. a) Definition av "$f(x)$ kontinuerlig i $x=a$".

Lösning: f är kontinuerlig i (inre) punkt c till dess definitionsmängd om

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

(Se, t. ex., sid. 1 i F3.)

b) $a, b \in \mathbb{R}$ och definiera funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & , \ x < -2 \\ b - ax - x^2 & , \ -2 \le x < 1 \\ -3 + bx & , \ x \geq 1 \end{cases}$$

Vilka a, b ger kontinuitet?

Lösning: Potentiella diskontinuiteter i $x=-2$ och 1.
Vänster- och högergränsvärden ska vara lika i dessa och detta gränsvärde ska vara lika med funktionsvärdet.

• $x=-2$: Vänster: $\lim_{x\to -2-} f(x) = \lim_{x\to -2-} (1-x) = 3$

Höger: $\lim_{x\to -2+} f(x) = \lim_{x\to -2+} (b - ax - x^2) =$

$= b + 2a - 4$

Vänster-g.v. = Höger-g.v. $\Leftrightarrow$ $3 = b + 2a - 4$ (1)
Om detta uppfylls så fås kontinuitet i $x=-2$ ty

$f(-2) = b+2a-4$

• $\underline{x=1}$: Vänster: $\lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_-} (b-ax-x^2) =$

$= b-a-1$

Höger: $\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} (-3+bx) = -3+b$

V-g.v. = H-g.v. $\Leftrightarrow b-a-1 = -3+b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+1 = 3 \Leftrightarrow a=2$ (2)

Om detta uppfylls så fås kontinuitet i $x=1$ ty
$f(1) = -3+b$

Om (2) sätts in i (1) fås: $3 = b+2\cdot 2-4 \Leftrightarrow b=3$

Alltså, $\boxed{f \text{ är kontinuerlig omm } a=2, b=3.}$

---

7. Beskriv metod för att approximera det (irrationella) reella nollstället till $p(x) = x^3-x-1$ och använd för att ta fram nollstället med fel < 0.1. Ingen miniräknare!

Lösning: Rimligen bör man använda bisektionsmetoden; se sid. 1 i F13. Detta eftersom fixpunktsmetoden ej fungerar och Newtons metod kräver miniräknare. Notera först det uppenbara att:

$p(1) = 1^3-1-1 = -1 < 0$

$p(2) = 2^3-2-1 = 8-3 = 5 > 0$

"SMV"

Enligt Satsen om mellanliggande värde finns nollställe i $(1,2)$. Mittpunkten är $\frac{1+2}{2} = 3/2$.

⑨ $\Rightarrow p(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^3 - \frac{3}{2} - 1 = \frac{27}{8} - \frac{12}{8} - \frac{8}{8} = \frac{7}{8} > 0$

SMV $\Rightarrow$ Nollställe i $(1, 3/2)$, längd $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0.1 \Rightarrow$

Beräkna mittpunkt: $\frac{1 + 3/2}{2} = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow p(\frac{5}{4}) = (\frac{5}{4})^3 - \frac{5}{4} - 1 = \frac{125}{64} - \frac{80}{64} - \frac{64}{64} = -\frac{19}{64} < 0$

SMV $\Rightarrow$ Nollställe i $(5/4, 3/2)$, längd $\frac{3}{2} - \frac{5}{4} = \frac{1}{4} > 0.1 \Rightarrow$

Beräkna mittpunkt: $\frac{5/4 + 3/2}{2} = \frac{11}{8}$

$\Rightarrow p(\frac{11}{8}) = (\frac{11}{8})^3 - \frac{11}{8} - 1 = \frac{1331}{512} - \frac{704}{512} - \frac{512}{512} = \frac{115}{512} > 0$

SMV $\Rightarrow$ Nollställe i $(\frac{5}{4}, \frac{11}{8})$, längd $\frac{11}{8} - \frac{5}{4} = \frac{1}{8} > 0.1 \Rightarrow$

Beräkna mittpunkt: $\frac{5/4 + 11/8}{2} = \frac{21}{16}$

$\Rightarrow p(\frac{21}{16}) = (\frac{21}{16})^3 - \frac{21}{16} - 1 = \frac{9261}{4096} - \frac{5376}{4096} - \frac{4096}{4096} =$

$$= \frac{9261 - 9472}{4096} = -\frac{211}{4096} < 0$$

SMV $\Rightarrow$ Nollställe i $(\frac{21}{16}, \frac{11}{8})$, längd $\frac{11}{8} - \frac{21}{16} = \frac{1}{16} < 0.1$

Vi kan garantera att vilket tal som helst i $(21/16, 11/8)$ approximerar nollstället med ett fel < 0.1, så tag t.ex. mittpunkten $\frac{21/16 + 11/8}{2} = \frac{43}{32}$.

> Polynomets nollställe kan approximeras som $43/32$ till ett fel mindre än 0.1.

---

8. Initialvärdesproblem $\begin{cases} x^2 y' = (1+x^2) y^2 \\ y(2) = 2 \end{cases}$ $(*)$

a) Lös IVP:et $(*)$.

Lösning: Differentialekvationen är separabel ty (10)

$$x^2y' = (1+x^2)y^2 \iff \frac{y'}{y^2} = \frac{1+x^2}{x^2} \iff$$

$$\iff \frac{dy}{y^2} = \left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx$$

Integrera båda sidorna: $\int \frac{dy}{y^2} = \int\left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx \iff$

$$\iff -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x}+x+C \iff y(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}-x-C}$$

Dessutom: $y(2) = 2 \iff \dfrac{1}{\frac{1}{2}-2-C} = 2 \iff$

$$\iff \frac{1}{2}-2-C = \frac{1}{2} \iff C = -2$$

$$\implies y(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}-x-(-2)} = \frac{1}{\frac{1}{x}-x+2} = \frac{x}{1-x^2+2x}$$

d.v.s. $\boxed{\text{lösningen till IVP:et } (*) \text{ är } y(x) = \frac{x}{1+2x-x^2}}$.

b) Använd Eulers (steg-)metod med initialvärden $x_0 = 1$, $y_0 = 1/2$ och steglängd $h = 0,5$ för att approximera $y(2)$ där y löser IVP:et $(*)$.

Lösning: $x^2y' = (1+x^2)y^2 \iff \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x^2}+1\right)y^2$

d.v.s. $F(x,y) = \left(\frac{1}{x^2}+1\right)y^2$. Iterationsregeln blir:

$$\begin{cases} x_n = x_0 + hn = 1+0.5\cdot n & (\text{ty } x_{n+1} = x_n + h) \\ y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n) = y_n + 0.5\cdot\left(\frac{1}{x_n^2}+1\right)y_n^2 \end{cases}$$

Vi itererar:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + 0.5\cdot 1 = 1+0.5 = 1.5 \\ y_1 = y_0 + 0.5\cdot\left(\frac{1}{x_0^2}+1\right)y_0^2 = \frac{1}{2}+0.5\cdot\left(\frac{1}{1^2}+1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.75 \end{cases}$$

(11) $n=2$
$$\begin{cases} x_2 = x_0 + 0.5\cdot 2 = 1+1 = 2 & \leftarrow \text{slutsteg!} \\ y_2 = y_1 + 0.5\cdot\left(\frac{1}{x_1^2}+1\right)y_1^2 = 0.75 + 0.5\cdot\left(\frac{1}{1.5^2}+1\right)0.75^2 = \\ = 1.15625 \end{cases}$$

Vi approximerar alltså $\boxed{y(2) \approx 1.15625}$.

Notera: IVP:et (*) med $y(1)=1/2$ istf. $y(2)=2$ ger samma lösning (sätt in $x=1$ i lösningen framtagen i (a), då fås $y=1/2$; unikhet betyder att det blir samma lösning). Därför vet vi att $y(2)=2$ vilket är nästan dubbelt så stort som vår approximation! Detta beror på att h är väldigt stort.