Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Omtentamen 2011-08-25

Miniräknare: Ej symbolhanterande. Formelsamling: Tabeller och formler för NV- och TE-programmen; Formler och tabeller i fysik, matematik och kemi för gymnasieskolan; TEFYMA; eller Formler och tabeller (Natur och Kultur).

Lösningarna bör vara så pass fullständigt dokumenterade att en läsare kan följa alla moment utan att behöva fylla i saknade steg.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är: A 22p, B 18p, C 14p, D 10p, E 9p. (Max: 24p. exkl. bonuspoäng.) Till tentamensskrivningspoängen adderas erhållna bonuspoäng. (Max: +3p.)

1. **a)** Visa med hjälp av den formella gränsvärdesdefinitionen (d.v.s. med ε–δ-formalism) att $\lim_{x\to 1}(3x-1)=2$. (1.5p)

b) Använd *Satsen om mellanliggande värden* för att visa att ekvationen $x^4-\frac{15}{2}x^3+14x^2+\frac{9}{2}x-18=0$ har en lösning på intervallet $[0,2]$. (1.5p)

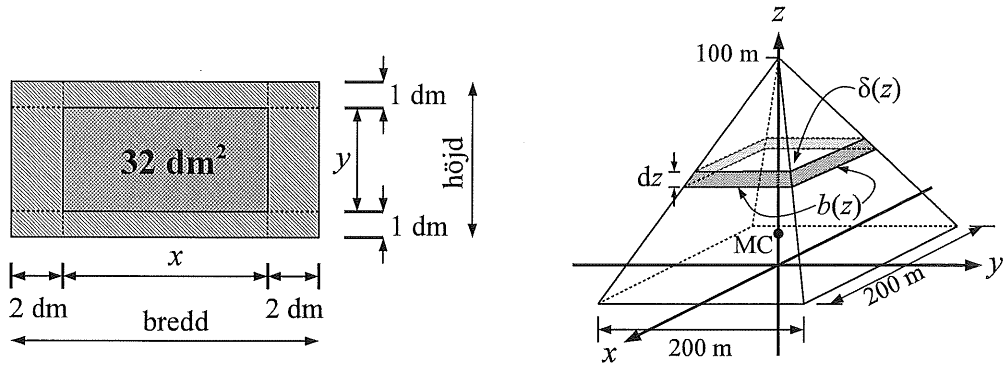
2. Man vill tillverka en affisch som ska innehålla 32 dm^2 tryckt text och grafik, vänster- och högermarginaler på 2 dm vardera samt topp- och bottenmarginaler på 1 dm vardera; se Figur 1(a). Hur hög och bred ska affischen vara för att minimera dess totala area? (3p)

3. Bestäm andra ordningens Taylorpolynom $P_2(x)$ till $\cos x$, e^x och $\ln(1+x)$ kring $x=0$ samt skriv dessa funktioner på formen $f(x)=P_2(x)+O(x^3)$. Beräkna med hjälp av detta gränsvärdet $\lim_{x\to 0}\dfrac{x(\mathrm{e}^x-\cos x)}{x-\ln(1+x)}$. (3p)

4. **a)** Beräkna den bestämda integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$. (1p)

b) Beräkna den obestämda integralen $\displaystyle\int\frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$ (1p)

c) Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{4x^2+9}}$. (Ledtråd: Gör invers substitution $x=\frac{3}{2}\tan\theta$ och uttryck integral enbart med $\cos\theta$ och $\sin\theta$ genom att $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ & $\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$. Notera slutligen att $\frac{1}{\sin\theta}=\sqrt{\frac{9}{4x^2}+1}$ för byte tillbaka till x.) (1p)



(a) (b)

Figur 1. **(a)** Affischen i Uppgift 2. **(b)** Pyramiden i Uppgift 5.

5. En pyramid har en höjd på 100 m, en kvadratisk bas med sidorna 200 m och en masstäthet $\delta(z) = 10\big(1 - \frac{z}{100}\big)$ ton/m^3 på höjden z m från markplanet; se Figur 1(b). På vilken höjd från markplanet ligger pyramidens masscentrum? (Ledtråd: En skiva med höjd $\mathrm{d}z$ vid höjden z från markplanet har massan $\mathrm{d}m = \delta(z)\big(b(z)\big)^2\mathrm{d}z$ där $b(z)$ är sidlängden hos pyramiden vid höjden z.) (3p)

6. Är den alternerande serien $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+\sqrt{n}}{3+n}$ absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent? (3p)

7. **a)** Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' + (\ln x)y = x^{-x}, \\ y(1) = -1. \end{cases}$ (1.5p)

b) Lös Eulerekvationen $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{9}{x^2}y = 0$.
(Ledtråd: Utför bytet $x \rightsquigarrow \ln|x|$ i lösningen för $y'' + ay' + cy = 0$ med samma rötter till motsvarande karaktäristiska ekvation.) (1.5p)

8. Ekvationen $xe^x = 1$ har exakt en reell lösning. Finn denna med hjälp av

a) Fixpunktsmetoden, $x_0 = 0.5$, och 3 decimalers noggrannhet; (1.5p)

b) Newtons metod, $x_0 = 0.5$, och 9 decimalers noggrannhet. (1.5p)

Lycka till!

LÖSNINGAR TILL OMTENTAN 2011-08-25

1. a) Visa $\lim_{x\to 1}(3x-1)=2$ formellt.

Lösning: Låt $f(x)=3x-1$, $a=1$ och $L=2$.

Vill nu visa påståendet

> För varje $\varepsilon>0$ finns $\delta>0$ sådant att
>
> $0<|x-a|<\delta \implies |f(x)-L|<\varepsilon$ (*)

Antag $\varepsilon>0$. Betrakta

$$|f(x)-L|=|(3x-1)-2|=$$

$$=|3x-3| = 3|x-1| \qquad (**)$$

Detta är mindre än ε omm $3|x-1|<\varepsilon$

$$\Updownarrow \quad |x-1|<\varepsilon/3$$

Välj $\delta=\varepsilon/3$. Då gäller implikationen

$$0<|x-a|<\delta \underset{\delta=\varepsilon/3}{\implies} |x-1|<\varepsilon/3 \implies$$

$$\implies 3|x-1|<\varepsilon \underset{(**)}{\implies} |f(x)-L|<\varepsilon$$

vilket precis är implikationen (*).

b) Ekvation $x^4-\frac{15}{2}x^3+14x^2+\frac{9}{2}x-18=0$,

Visa m.h.a. "Satsen om mellanliggande värden" (2)
att det finns lösning på $[0,2]$.

<u>Lösning:</u> Satsen om mellanliggande värden (SMV):

(se s.7ff i F3.)

f kontinuerlig på $[a,b]$ och s ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$
$\Longrightarrow$ Finns $c \in [a,b]$ s.a. $f(c) = s$

Här: $f(x) = x^4 - \frac{15}{2}x^3 + 14x^2 + \frac{9}{2}x - 18$

Det gäller att: $f(0) = 0^4 - \frac{15}{2}\cdot 0^3 + 14\cdot 0^2 + \frac{9}{2}\cdot 0 - 18 =$
$= -18 < 0$

$f(2) = 2^4 - \frac{15}{2}\cdot 2^3 + 14\cdot 2^2 + \frac{9}{2}\cdot 2 - 18 =$
$= 16 - \frac{15}{2}\cdot 8 + 14\cdot 4 + \frac{9}{2}\cdot 2 - 18 =$
$= 16 - 60 + 56 + 9 - 18 =$
$= 3 > 0$

Enligt SMV så finns $c \in [0,2]$ s.a.
$f(c) = 0$ eftersom f kont. på $[0,2]$ och
$f(0) = -18 < \underset{\text{vårt } s}{0} < 3 = f(2)$

---

2. Affisch med 32 dm^2 text & grafik,
vänster- & högermarginaler 2 dm, topp- & botten-
marginaler 1 dm. Höjd & bredd för

③ minimal area hos affisch?

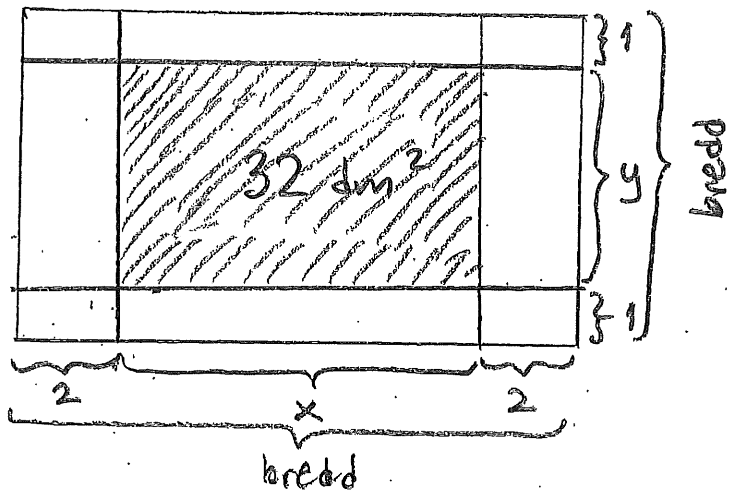
<u>Lösning:</u> Rita figur:

Enhet: dm

x: text- & grafikbredd

y: —— " —— höjd

$xy = 32$ dm^2



Total area A: $A =$ bredd $\times$ höjd $=$

$$= (2+x+2)(1+y+1) =$$

$$= (x+4)(y+2)$$

Men $xy = 32$ ty detta är arean hos fältet med text & grafik.

$$\Longrightarrow \quad y = 32/x$$

$$\Longrightarrow \quad A(x) = (x+4)(32/x + 2), \quad x > 0$$

är affischens totala area

Vill minimera $A(x)$ på intervall $(0, \infty)$.

$$A(x) = (x+4)(32/x + 2) = 32 + 2x + 128/x + 8 =$$

$$= 2x + 40 + 128/x$$

$$\Longrightarrow A'(x) = 2 - 128/x^2$$

Detta ger kritisk punkt:

$$A'(x)=0 \Leftrightarrow 2-128/x^2=0 \Leftrightarrow 2=\frac{128}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=64 \Leftrightarrow x=(\pm)8$$

- Om $x<8$ så gäller: $x^2<64 \Rightarrow 1/x^2 > 1/64 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 128/x^2 > 2 \Rightarrow -128/x^2 < -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-128/x^2 < 2-2 = 0$$

d.v.s. $A'(x)<0$ om $x<8$

- Om $x>8$ så gäller: $x^2>64 \Rightarrow \ldots \Rightarrow 2-128/x^2>0$

d.v.s. $A'(x)>0$ om $x>8$

Teckentabell:

x		8	
A'	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$
A	$\searrow$	$A(8)$	$\nearrow$

$\Rightarrow$ Vi har ett minimum i $x=8$.

$$\Big(A(8) = (x+4)(32/x+2)\Big|_{x=8} =$$

$$= (8+4)(32/8+2) = 12\cdot(4+2) =$$

$$= 12\cdot 6 = 72,$$

d.v.s. minsta möjliga affischarea är $72\ dm^2$. $\Big)$

Minimerande bredd $= (x+4)\big|_{x=8} = 8+4 = \underline{12\ dm}$

— " — höjd $= (\frac{32}{x}+2)\big|_{x=8} = 4+2 = \underline{6\ dm}$

⑤ **3.** $P_2(x)$ för $\cos x$, e^x, $\ln(1+x)$ i $x=0$, skriv på formen $P_2(x)+O(x^3)$, beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x - \cos x)}{x - \ln(1+x)}.$$

<u>Lösning:</u> Taylorpolynom av andra ordningen i $x=0$:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2 =$$
$$= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

$\Longrightarrow$ [Taylors sats] $f(x) = P_2(x) + O(x^3) =$
$$= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + O(x^3)$$

<u>$\cos x$:</u>
$$\begin{cases} f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = \cos 0 = 1 \\ f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(0) = -\sin 0 = 0 \\ f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -\cos 0 = -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow P_2(x) = 1 + 0\cdot x + \frac{1}{2}(-1)x^2 = \boxed{1 - \frac{1}{2}x^2}$$

$$\Longrightarrow \cos x = \boxed{1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)}$$

<u>e^x:</u>
$$\begin{cases} f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = e^0 = 1 \\ f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1 \\ f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow P_2(x) = 1 + 1\cdot x + \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot x^2 = \boxed{1 + x + \frac{1}{2}x^2}$$

$$\Longrightarrow e^x = \boxed{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)}$$ ⑥

ln(1+x):

$$\begin{cases} f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f(0) = \ln(1+0) = \\ \qquad = \ln 1 = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1 \\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow P_2(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{1}{2}(-1)x^2 =$$

$$= \boxed{x - \frac{1}{2}x^2}$$

$$\Longrightarrow \ln(1+x) = \boxed{x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)}$$

Gränsvärdet kan nu beräknas: (Se F6 Egenskaper (i) — (iii) s.13 för räkneregler)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(e^x - \cos x)}{x - \ln(1+x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right)\right)}{x - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) - 1 + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right)}{x - x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(x + x^2 + O(x^3)\right)}{\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x^3 + O(x^4)}{\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)} =$$

⑦

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+x^3+O(x^4))/x^2}{(\frac{1}{2}x^2+O(x^3))/x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x+O(x^2)}{\frac{1}{2}+O(x)} =$$

$$= \frac{1+0+0}{\frac{1}{2}+0} = \frac{1}{1/2} = \underline{\underline{2}}$$

---

4. a) $$\int_0^{\pi/4} \underbrace{e^x}_{\downarrow} \underbrace{\sin x\, dx}_{\uparrow} = \left[\begin{cases} U = e^x \\ dU = e^x dx \end{cases}, \begin{cases} dV = \sin x\, dx \\ V = -\cos x \end{cases}\right] =$$

$$= e^x(-\cos x)\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (-\cos x) e^x dx =$$

$$= (-e^x\cos x)\Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \underbrace{e^x}_{\downarrow} \underbrace{\cos x\, dx}_{\uparrow} =$$

$$= \left[\begin{cases} U = e^x \\ dU = e^x dx \end{cases}, \begin{cases} dV = \cos x\, dx \\ V = \sin x \end{cases}\right] =$$

$$= (-e^x\cos x)\Big|_0^{\pi/4} + \left[(e^x \sin x)\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (\sin x) e^x dx\right] =$$

$$= e^x(\sin x - \cos x)\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} e^x \sin x\, dx$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{\pi/4} e^x \sin x\, dx = e^x(\sin x - \cos x)\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= e^{\pi/4}\left(\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}\right) - e^0(\sin 0 - \cos 0) =$$ (8)

$$= e^{\pi/4}\left(1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}\right) - 1\cdot(0-1) =$$

$$= e^{\pi/4}\cdot 0 - 1\cdot(-1) = 0 + 1 = 1$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\pi/4} e^x \sin x \, dx = \underline{\underline{1/2}}$$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = (*)$

Nämnare: $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} =$

$$= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} =$$

$$= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} =$$ [Partialbråksuppd.]

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} =$$

$$= \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{(A+B)x + (-2A-B)}{x^2-3x+2}$$

Identifiera: $\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ B=-2A \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+(-2A)=1 \\ B=-2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A=1 \\ B=-2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$$

⑨

$$\Rightarrow (*) = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2} \right) dx =$$

$$= -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + C =$$

$$= -\ln|x-1| + \ln\left((x-2)^2\right) + C =$$

$$= \boxed{\ln \frac{(x-2)^2}{|x-1|} + C}$$

c) $$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2+9}} = \lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2+9}} =$$

$$= \left[\begin{cases} x = \frac{3}{2}\tan\theta \\ dx = \frac{3}{2}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \end{cases}, \begin{cases} \text{Vi sätter ej in} \\ \text{nya gränser} \end{cases} \right] =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{x=2}^{x=R} \frac{\frac{3}{2}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\left(\frac{3}{2}\tan\theta\right)^2\sqrt{9\tan^2\theta+9}} =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{x=2}^{x=R} \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta}{\frac{3}{2}\tan^2\theta \cdot 3\sqrt{\tan^2\theta+1}} =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{2}{9} \int_{x=2}^{x=R} \frac{d\theta}{\cos^2\theta \cdot \tan^2\theta \cdot \sqrt{\tan^2\theta+1}} =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{2}{9} \int_{x=2}^{x=R} \frac{d\theta}{\cos^2\theta \cdot \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1}} =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{2}{9} \int_{x=2}^{x=R} \frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}} =$$

(10)

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{2}{9} \int_{x=2}^{x=R} \frac{d\theta}{\sin^2\theta \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}} =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{2}{9} \int_{x=2}^{x=R} \frac{d\theta}{\sin^2\theta / |\cos\theta|} =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{2}{9} \int_{x=2}^{x=R} \frac{|\cos\theta|}{\sin^2\theta} d\theta = (*)$$

Notera: $x = \frac{3}{2}\tan\theta \Leftrightarrow \theta = \arctan \frac{2x}{3}$

$\Rightarrow x=2$ ger $\theta = \arctan \frac{2\cdot 2}{3} = \arctan \frac{4}{3} =$
$(= 0.927295\ldots)$

$x \to \infty$ ger $\theta = \arctan \frac{2x}{3} \to \frac{\pi}{2}$ $(=1.570796\ldots)$

För $\cos\theta$ gäller för $\theta \in [\arctan \frac{4}{3}, \frac{\pi}{2})$
$(= [0.927295\ldots, 1.570796\ldots))$

att $\cos\theta \geq 0$ ty $[\arctan \frac{4}{3}, \frac{\pi}{2}) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow |\cos\theta| = \cos\theta$ för våra θ

$$\Rightarrow (*) = \lim_{R\to\infty} \frac{2}{9} \int_{x=2}^{x=R} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} d\theta =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{\sin\theta}\right)\Bigg|_{x=2}^{x=R} =$$

$$= -\frac{2}{9}\left(\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sin\theta}\Bigg|_{x=R} - \frac{1}{\sin\theta}\Bigg|_{x=2}\right) =$$

$$= [R \to \infty \Rightarrow \theta \to \pi/2] =$$

$$= -\frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\sin\theta}\bigg|_{x=2}\right) = \left[\sin\frac{\pi}{2} = 1\right] =$$

$$= -\frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{\sin\theta}\bigg|_{x=2}\right) = (**)$$

Notera att: $\tan^2\theta = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} =$

$$= \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{1/\sin^2\theta - 1}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sin^2\theta} - 1 = \frac{1}{\tan^2\theta} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\tan^2\theta} + 1 \Rightarrow$$

$$\underset{(\sin\theta>0)}{\Longrightarrow} \frac{1}{\sin\theta} = \sqrt{\frac{1}{\tan^2\theta}+1} = \left[x = \frac{3}{2}\tan\theta\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}x\right)^2}+1} = \sqrt{\frac{9}{4x^2}+1}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sin\theta}\bigg|_{x=2} = \sqrt{\frac{9}{4\cdot 2^2}+1} = \sqrt{\frac{9}{16}+1} = \sqrt{\frac{9+16}{16}} =$$

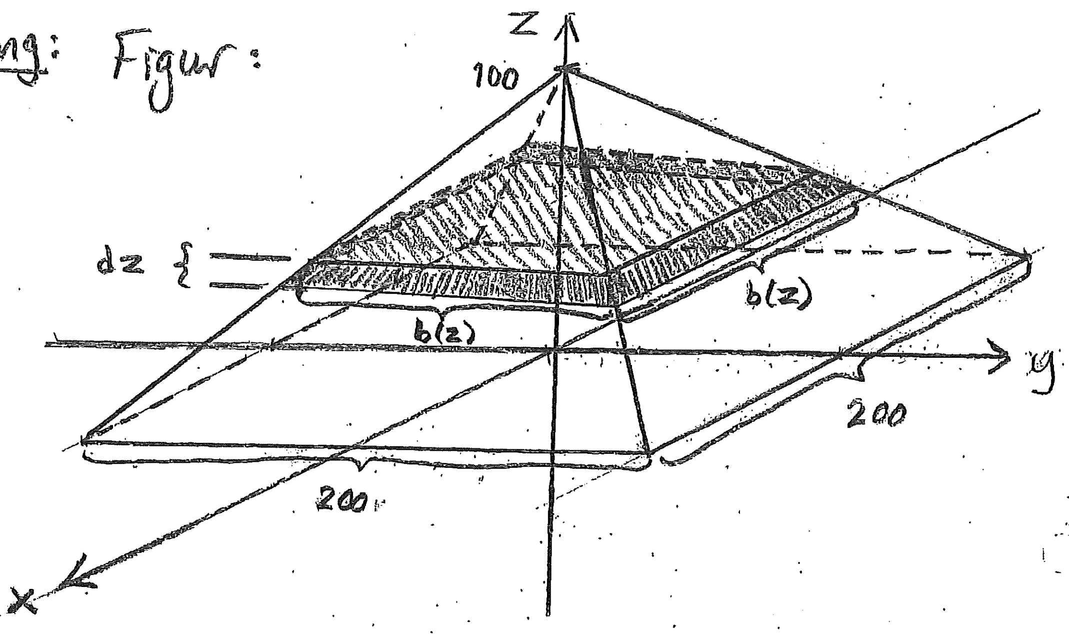
$$= \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

$$\Longrightarrow (**) = -\frac{2}{9}\left(1-\frac{5}{4}\right) = -\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{1/18}}$$

---

5. Masscentrum hos pyramid 100 m hög, kvadratisk bas m. sidor 200 m samt masstäthet $\delta(z) = 10\left(1-\frac{z}{100}\right)$ ton/m^3 vid höjd z m.

Lösning: Figur:



P.g.a. symmetri måste $\bar{x} = \bar{y} = 0$ i koordinatsystemet ovan, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ är MC:s koordinater.

För $\bar{z}$ gäller: $\bar{z} = \dfrac{M_{z=0}}{m}$ där

$M_{z=0}$ = momentet kring $z=0$, m = massan.

Vi betraktar en skiva vid höjd z med tjocklek dz och area $(b(z))^2$ där

$b(z)$ = skivans längd och bredd

$$\Longrightarrow \quad dm = \delta(z)(b(z))^2 dz$$

för skivans massa, $\delta(z) = 10\left(1 - \frac{z}{100}\right)$.

$\underline{b(z)}$: Vet: $b(0) = 200$, $b(100) = 0$

$$\Longrightarrow \quad b(z) = 200 - 2z$$

(ty $b(z)$ är en rät linje m.a.p. z)

(13)

$$\Rightarrow dm = 10\left(1-\frac{z}{100}\right)(200-2z)^2\,dz =$$

$$= \frac{10}{100}(100-z)\left(2(100-z)\right)^2 dz =$$

$$= \frac{40}{100}(100-z)(100-z)^2\,dz = \frac{2}{5}(100-z)^3\,dz$$

$$\Rightarrow \underline{m} = \int_{z=0}^{z=100} dm = \int_0^{100} \frac{2}{5}(100-z)^3\,dz =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}(100-z)^4(-1)\right)\Big|_0^{100} =$$

$$= -\frac{1}{10}\left((100-z)^4\right)\Big|_0^{100} = -\frac{1}{10}\left(0^4-100^4\right) =$$

$$= \frac{100^4}{10} = \frac{(10^2)^4}{10} = \frac{10^8}{10} = \underline{10^7 \text{ ton}}$$

(d.v.s. pyramiden väger 10 miljoner ton!)

och $\underline{M_{z=0}} = \int_{z=0}^{z=100} z\,dm = \int_0^{100} z\cdot\frac{2}{5}(100-z)^3\,dz =$

$$= \frac{2}{5}\int_0^{100} z\,(100-z)^3\,dz =$$

$$= \left[\begin{cases} u = z \\ du = dz \end{cases},\ \begin{cases} dV = (100-z)^3\,dz \\ V = -\frac{1}{4}(100-z)^4 \end{cases}\right] =$$

$$= \frac{2}{5}\left(z\left(-\frac{1}{4}\right)(100-z)^4\Big|_0^{100} - \int_0^{100}\left(-\frac{1}{4}\right)(100-z)^4\,dz\right) =$$

$$= \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)\left(z(100-z)^4\Big|_0^{100} - \left(-\frac{1}{5}(100-z)^5\right)\Big|_0^{100}\right) =$$

$$= -\frac{1}{10}\left(z(100-z)^4 + \frac{1}{5}(100-z)^5\right)\Big|_0^{100} =$$

$$= -\frac{1}{50}\left(5z\cdot(100-z)^4 + (100-z)^5\right)\Big|_0^{100} =$$

$$= -\frac{1}{50}\left((5z + (100-z))(100-z)^4\right)\Big|_0^{100} =$$

$$= -\frac{1}{50}\left((4z+100)(100-z)^4\right)\Big|_0^{100} =$$

$$= -\frac{2}{25}\left((z+25)(100-z)^4\right)\Big|_0^{100} =$$

$$= -\frac{2}{25}\left(125\cdot 0^4 - 25\cdot 100^4\right) =$$

$$= 2\cdot 100^4 = 2\cdot(10^2)^4 = 2\cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{ton}$$

(d.v.s. momentet är 200 miljoner m·ton i $z=0$!)

Detta ger masscentrumkoordinaten i z-led:

$$\bar{z} = \frac{M_{z=0}}{m} = \frac{2\cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{ton}}{10^7 \text{ ton}} = 20 \text{ m}$$

$$\boxed{\text{d.v.s. masscentrum ligger på höjden 20 m ovanför markplanet.}}$$

---

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+\sqrt{n}}{3+n}$ abs.-konv., betingat konv. eller div.?

Lösning: Vi betraktar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = (-1)^n \frac{1+\sqrt{n}}{3+n}$.

(15) • <u>Absolutkonvergent?</u> Betrakta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $|a_n| = \frac{1+\sqrt{n}}{3+n}$

Vi ser att $|a_n| = \frac{1+\sqrt{n}}{3+n} \propto \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

då n är stort, så vi misstänker divergens hos $\sum_n |a_n|$. Jämför med serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n = 1/\sqrt{n}$.

Vi får gränsvärdet

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\sqrt{n}}{3+n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{3+n}\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+n}{3+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n}+n)/n}{(3+n)/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n}+1}{3/n+1} =$$

$$= \frac{0+1}{0+1} = 1 > 0$$

$\Longrightarrow$ Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergerar (mot ∞) och $L > 0$ så gäller enligt Jämförelsekriterium #2 (se F10 s.9) att även $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergerar (mot ∞).

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Serien ej absolutkonvergent.}}$

16

• Betingat konvergent? Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

$a_n = (-1)^n \frac{1+\sqrt{n}}{3+n}$, uppfyller villkoren

(i) Serien är alternerande (ty

$$a_n a_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{1+\sqrt{n+1}}{3+(n+1)} \cdot (-1)^n \frac{1+\sqrt{n}}{3+n} =$$

$$= -\frac{1+\sqrt{n+1}}{4+n} \frac{1+\sqrt{n}}{3+n} < 0)$$

(ii) Serien har avtagande belopp (ty

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{1+\sqrt{n+1}}{3+(n+1)}}{(-1)^n \frac{1+\sqrt{n}}{3+n}} \right| =$$

$$= \underbrace{\frac{3+n}{4+n}}_{<1} \underbrace{\frac{1+\sqrt{n+1}}{1+\sqrt{n}}}_{<1} < 1 \Rightarrow |a_{n+1}| <$$
$$< |a_n|)$$

(iii) Seriens termer går mot noll (ty

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1+\sqrt{n}}{3+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1/n + 1/\sqrt{n}}{3/n+1} =$$

$$= \frac{0+0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0)$$

Enligt kriteriet för alternerande serier gäller därför att serien är konvergent

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Serien är betingat konvergent.}}$

(17) **7.** a) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' + (\ln x)y = x^{-x} \\ y(1) = -1 \end{cases}$

Lösning: ODE:n $y' + (\ln x)y = x^{-x}$ (*)

löser vi med integrerande faktor (IF):

$$M = \int \underbrace{\ln x}_{\downarrow}\, \underbrace{dx}_{\uparrow} = \left[\begin{cases} U = \ln x \\ dU = \frac{dx}{x} \end{cases}, \begin{cases} dV = dx \\ V = x \end{cases} \right] =$$

$$= (\ln x)x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx =$$

$$= x \ln x - x$$

$$\Longrightarrow IF = e^{M} = e^{x \ln x - x} = x^x e^{-x}$$

Då blir (*) efter mult. m. IF:

$$x^x e^{-x} y' + x^x e^{-x} (\ln x) y = e^{-x}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^x e^{-x} y\right) = e^{-x}$$

$$\Updownarrow$$

$$x^x e^{-x} y = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$$

$$\Updownarrow$$

$$y(x) = x^{-x} e^{x} (C - e^{-x}) =$$

$$= x^{-x}(Ce^{x} - 1)$$

Begynnelsevillkor: $y(1) = -1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1^{-1}(Ce^{1} - 1) = -1 \Leftrightarrow Ce^{1} - 1 = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ce^{1} = 0 \Leftrightarrow C = 0$$

d.v.s. $y(x) = x^{-x}(0 \cdot e^{-x} - 1) =$
$= x^{-x}(0-1) = -x^{-x}$

Så att $\boxed{y(x) = -x^{-x}}$

b) Lös Eulerekvationen $y'' - \frac{5}{x} y' + \frac{9}{x^2} y = 0.$

Lösning: Låt oss först skriva Eulerekvationen på normalform:

$$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$$

Den karakteristiska ekvationen är

$$r(r-1) - 5r + 9 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$r^2 - 6r + 9 = 0 \qquad (*)$$
$$\Updownarrow$$
$$r = 3 \pm \sqrt{3^2 - 9} = 3 \pm 0 = 3 \quad \text{(dubbel)}$$

Detta ger allmänna lösningen

$$\boxed{y(x) = (A + B\ln|x|)|x|^3} \qquad (\dagger)$$

Notera: ODE:n $y'' - 6y' + 9y = 0$ har karakteristisk ekvation $(*)$ (se ovan) och har alltså samma dubbelrot $r = 3$. Dess allmänna lösning är $y(x) = (A + Bx)e^{3x}$. Gör bytet $x \rightsquigarrow \ln|x|$ och man får $y(x) = (A + B\ln|x|)|x|^3$, dvs $(\dagger)$.

(19) 8. Ekvation $xe^x=1$ har en reell lösning.

a) Finn den m.h.a Fixpunktsmetoden, $x_0=0.5$ och 3 decimalers noggrannhet.

Lösning: Skriv om ekvationen på formen $f(x)=x$ och bilda sedan följden $\{x_n\}$ genom $x_{n+1}=f(x_n)$ givet startvärdet x_0. Vi har:

$$xe^x=1 \Leftrightarrow x=e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x}=x$$

d.v.s. vi låter $f(x)=e^{-x}$

Vi har alltså $x_{n+1}=e^{-x_n}$, $x_0=0.5$:

$$x_1=e^{-x_0}=e^{-0.5}=0.60653\ldots$$
$$x_2=e^{-x_1}=e^{-0.60653\ldots}=0.54523\ldots$$
$$x_3=e^{-x_2}=e^{-0.54523\ldots}=0.57970\ldots$$
$$x_4=e^{-x_3}=e^{-0.57970\ldots}=0.56006\ldots$$
$$x_5=e^{-0.56006\ldots}=0.57117\ldots$$
$$x_6=e^{-0.57117\ldots}=0.56486\ldots$$
$$x_7=e^{-0.56486\ldots}=0.56843\ldots$$
$$x_8=e^{-0.56843\ldots}=0.56640\ldots$$
$$x_9=0.56755\ldots$$
$$x_{10}=0.56690\ldots$$
$$x_{11}=0.56727\ldots$$

$x_{12} = 0.56706\ldots$

$x_{13} = 0.56718\ldots$

Det verkar som att lösningen till tre decimaler är $\underline{0.567}$.

<u>Notera:</u> Man kan visa att Fixpunktssatsen är tillämplig för t.ex. $I = [0.4, 0.7]$. Man har:

(i) $x \in [0.4, 0.7] \Rightarrow f(x) = e^{-x} \in [e^{-0.7}, e^{-0.4}] =$
$= [0.496\ldots, 0.670\ldots] \subset$
$\subset [0.4, 0.7] = I$

(ii) $|f'(x)| = |-e^{-x}| = e^{-x} = f(x) \in I$

om $x \in I$ enl. (i)

$\Rightarrow \max_{x \in I} |f'(x)| < \sup I = 0.7$

$\Rightarrow \left| \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \right| \leq \max_{x \in I} |f'(x)| < 0.7$

d.v.s. $K = 0.7 < 1$ fungerar. □

(Fixpunktssatsen: Se F13 s. 3ff.

b) Finn den m.h.a. Newtons metod, $x_0 = 0.5$ och 9 decimalers noggrannhet.

<u>Lösning:</u> Skriv om ekvationen på formen $f(x) = 0$ och bilda sedan följden $\{x_n\}$ genom $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ givet startvärdet x_0. Vi har:

21

$$xe^x = 1 \Leftrightarrow xe^x - 1 = 0$$

d.v.s. vi låter $f(x) = xe^x - 1$.

$$\Longrightarrow f'(x) = 1 \cdot e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

$$\Longrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n e^{x_n} - 1}{(1+x_n)e^{x_n}} =$$

$$= \frac{x_n(1+x_n)e^{x_n} - (x_n e^{x_n} - 1)}{(1+x_n)e^{x_n}} =$$

$$= \frac{\cancel{x_n e^{x_n}} + x_n^2 e^{x_n} - \cancel{x_n e^{x_n}} + 1}{(1+x_n)e^{x_n}} =$$

$$= \frac{x_n^2 e^{x_n} + 1}{(1+x_n)e^{x_n}} = \frac{x_n^2 + e^{-x_n}}{1+x_n}$$

Vi har alltså $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + e^{-x_n}}{x_n + 1}$, $x_0 = 0.5$:

$$x_1 = \frac{x_0^2 + e^{-x_0}}{x_0 + 1} = \frac{0.5^2 + e^{-0.5}}{0.5 + 1} = 0.5710204398\ldots$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + e^{-x_1}}{x_1 + 1} = \frac{0.5710204398\ldots^2 + e^{-0.5710204398\ldots}}{0.5710204398\ldots + 1} =$$

$$= 0.5671555687\ldots$$

$$x_3 = \frac{0.5671555687\ldots^2 + e^{-0.5671555687\ldots}}{0.5671555687\ldots + 1} =$$

$$= 0.5671432905\ldots$$

$$x_4 = \frac{0.5671432905\ldots^2 + e^{-0.5671432905\ldots}}{0.5671432905\ldots + 1} =$$

$$= 0.5671432904\ldots$$

$$x_5 = 0.5671432904\ldots$$ (22)

Det verkar som att lösningen till nio decimaler är <u>$0.567\,143\,290$.</u>

<u>Notera:</u>	En ekvation av typen $we^w = z$ löses m.h.a. den s.k. Lamberts W-funktion enligt $W(z)e^{W(z)} = z$. För $z \geq 0$ har ekvationen $we^w = z$ entydig lösning, d.v.s. $W(z)$ är entydigt definierad där. Det vi har kommit fram till är alltså att $W(1) = 0.567\,143\,290\ldots$ ty vi har löst $we^w = 1$ $(z=1)$ numeriskt.