Mittuniversitetet
NAT
Björn Ivarsson, Abtin Daghighi

Tentamen i matematik.
Fördjupningskurs i analys / Calculus II (MA059G/MA060G).
25 Oktober 2010
Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Icke formelhanterande miniräknare, samt godkänd gymnasieformelsamling.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärde för betygen är: A 22 p, B 18 p, C 14p, D 10p, E 9p

(1) (a) Ange den formella definitionen av $\lim_{x\to a} f(x) = L$. (1p)
(b) Använd den formella definitionen för att verifiera att

$$\lim_{x\to 2} 3x + 1 = 7.$$

(2p)

(2) Konvergerar eller divergerar

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2 - x}\, dx?$$

Om integralen konvergerar beräkna dess värde. (3p)

(3) Undersök om funktionen $f(x) = xe^{-x}$ har något maximum eller minimum på intervallet $0 \leq x$. Beräkna maximum och minimum om de existerar. (3p)

(4) Hitta alla lösningar till

$$xy' - y = x^3 \ln x, \quad x > 0.$$

(3p)

(5) Beräkna Taylorpolynomen av tredje graden för $\sin x$ och $\sin(x^2)$ kring $x = 0$ och använd dem för att beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x \sin x}.$$

(3p)

(6) (a) Konvergerar eller divergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}?$$

(1p)

(b) Konvergerar eller divergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)?$$

(2p)

(7) Låt $y(x)$ vara lösningen till begynnelsevärdesproblemet $y' = e^{xy}$ där $y(0) = 0$. Använd Eulers metod med steglängd $h = 0.2$ för att approximera $y(1)$. (3p)

(8) (a) (Gör denna uppgift om du läser MA059G) Använd satsen om mellanliggande värde för att visa att $\cos x = x$ har en lösning i intervallet $0 < x < \pi/2$. (3p)

(b) (Gör denna uppgift om du läser MA060G) Approximera roten till $\cos x = x$ genom att göra 3 iterationer av fixpunktsmetoden, alltså beräkna x_3, då $x_0 = 0,75$. (3p)

Lycka till!

①

Lösningar till omtentan 2010-10-25

(Lösningar av Jens Persson)

---

1. a) Den formella definitionen av $\lim_{x\to a} f(x) = L$ är följande:

För varje $\varepsilon > 0$ ska det finnas ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sådant att

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \qquad (*)$$

b) Verifiering att $\lim_{x\to 2} (3x+1) = 7$.

Låt $\varepsilon > 0$ vara godtyckligt. Då gäller:

$$|(3x+1)-7| = |3x-6| = 3|x-2|$$

Välj $\delta = \varepsilon/3$. Vi har då

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow 3|x-2| < 3\delta = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$
$$\Rightarrow |(3x+1)-7| < \varepsilon$$

d.v.s. vi har implikationen $(*)$. $\square$

---

2. Generaliserad integral $\int_2^\infty \frac{1}{x^2-x}\,dx$. Per definition gäller $\int_2^\infty \frac{1}{x^2-x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{1}{x^2-x}\,dx$

Partialbråksuppdela integranden: ②

$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} =$$

$$= \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x-A}{x^2-x}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+B=0 \\ A=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=1 \\ A=-1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int_2^\infty \frac{1}{x^2-x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_2^R \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\ln|x| + \ln|x-1|\right)\Big|_2^R =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\ln \frac{x-1}{x}\right)\Big|_2^R =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)\Big|_2^R =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\ln\left(1-\frac{1}{R}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \ln\left(1-\frac{1}{R}\right) - \ln\frac{1}{2} =$$

$$= \ln(1-0) - (-\ln 2) = \underbrace{\ln 1}_{=0} + \ln 2$$

$$= \ln 2 < \infty$$

d.v.s. $\boxed{\text{generaliserade integralen konvergerar mot } \ln 2.}$

---

3. Har $f(x) = xe^{-x}$ största eller minsta värde för $x \geq 0$? Bestäm dem isåfall.

③ <u>Lösning:</u> $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$

$\Rightarrow$ Största och minsta värden antas i kritiska punkter, singulära punkter (finns ej här) eller i ändpunkter

• <u>Kritiska punkter:</u> $f'(x) = 1\cdot e^{-x} + x\cdot(-1)e^{-x} =$
$= (1-x)e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

• <u>Ändpunkter:</u> $x = 0$

Värden som antas: $\begin{cases} f(1) = 1\cdot e^{-1} = 1/e & (>0) \\ f(0) = 0\cdot e^{-0} = 0 & (< 1/e) \end{cases}$

Största värdet är $1/e$ (antas i $x=1$) och minsta värdet är 0 (antas i $x=0$).

4. Lös $xy' - y = x^3 \ln x$, $x > 0$.

<u>Lösning:</u> $xy' - y = x^3 \ln x$, kan skrivas:

$y' - \frac{1}{x}y' = x^2 \ln x$, integrerande faktor:

$IF = e^{\int(-\frac{1}{x})dx} = e^{-\ln x} = 1/x$

$\Rightarrow \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x\ln x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)y = x\ln x \Leftrightarrow$

④

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y\right) = x\ln x \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \int x \ln x \, dx \quad (*)$$

$$HL_{(*)} = \int x \ln x \, dx = \int (\ln x) \underbrace{x\,dx}_{} =$$

$$= \left[\begin{cases} U = \ln x \\ dU = \frac{1}{x}dx \end{cases}, \begin{cases} dV = x\,dx \\ V = \frac{1}{2}x^2 \end{cases} \right] =$$

$$= (\ln x)\frac{1}{2}x^2 - \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}x^2 + C =$$

$$= \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$$

$$\Longrightarrow (*) \text{ blir } \quad \frac{y}{x} = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{4}x^3(2\ln x - 1) + Cx}$$

---

5. Taylorpolynom av tredje graden för $\sin x$ och $\sin(x^2)$ kring $x=0$, beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x \sin x}$.

Lösning: För f gäller Taylorpolynom av n:te graden kring $x=a$: $\quad P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$

- $\sin x$:
$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = \sin 0 = 0$$
$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1$$
$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = -\sin 0 = 0$$

⑤ $f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -\cos 0 = -1$

$$\Rightarrow P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3$$

$$= 0 + 1\cdot x + \frac{1}{2}0\cdot x^2 + \frac{1}{6}(-1)x^3 =$$

$$= x - \frac{1}{6}x^3$$

d.v.s. $\boxed{P_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3 \text{ för } \sin x \text{ kring } x=0.}$

- $\sin(x^2)$: $f(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f(0) = \sin(0^2) = 0$

$$f'(x) = \cos(x^2)\cdot 2x = 2x\cos(x^2)$$

$$\Rightarrow f'(0) = 2\cdot 0\cdot \cos(0^2) = 0$$

$$f''(x) = 2\cos(x^2) - 2x\sin(x^2)\cdot 2x =$$

$$= 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$$

$$\Rightarrow f''(0) = 2\cos(0^2) - 4\cdot 0^2\sin(0^2) =$$

$$= 2\cdot 1 - 0 = 2$$

$$f'''(x) = -2\sin(x^2)\cdot 2x - 8x\sin(x^2) -$$

$$- 4x^2\cos(x^2)\cdot 2x =$$

$$= -12x\sin(x^2) - 8x^3\cos(x^2)$$

$$\Rightarrow f'''(0) = -12\cdot 0\sin(0^2) - 8\cdot 0^3\cos(0^2) = 0$$

$$\Rightarrow P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3$$

$$= 0 + 0\cdot x + \frac{1}{2}\cdot 2x^2 + \frac{1}{6}0x^3 = x^2$$

d.v.s. $\boxed{P_3(x) = x^2 \text{ för } \sin x \text{ kring } x=0.}$

Ur Taylors sats fås att $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$

$$\sin(x^2) = x^2 + O(x^3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+O(x^3)}{x(x-\frac{1}{6}x^3+O(x^4))} \overset{⑥}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+O(x^3)}{x^2-\frac{1}{6}x^4+O(x^5)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+O(x)}{1-\frac{1}{6}x^2+O(x^3)} =$$

$$= \frac{1+0}{1-\frac{1}{6}\cdot 0+0} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

---

6. a) Konv. eller div. serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$?

Lösning: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{n}{n^3+1} \approx \frac{1}{n^2}$ (n stort)

Jämför med $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, vilken

p-serie med $p=2>1$

konvergerar. Vi får:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n^3} =$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1 < \infty$$

Enligt Jämförelsekriterium #2 så

konvergerar serien,

d.v.s. serien konvergerar

⑦ b) Konv. eller div. serien $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$?

<u>Lösning:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \sin(1/n^2) \approx 1/n^2$

om n stort ty $\sin x = x + O(x^3)$
(se uppgift 5).

Jämför därför med $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n = 1/n^2$,

som konvergerar. (p-serie, $p = 2 > 1$.) Vi får:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n^2)}{1/n^2} = \left[\begin{array}{l} x = 1/n^2 \\ n\to\infty \Rightarrow x\to 0 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + O(x^3)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(1 + O(x^2)\right) = 1 + 0 = 1 < \infty$$

Enligt Jämförelsekriterium #2 så konvergerar serien,

d.v.s. <u>serien är konvergent.</u>

---

7. $y(x)$ lösningen till begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' = e^{xy}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$. Använd Eulers stegmetod steglängd $h = 0.2$ för att approximera $y(1)$.

<u>Lösning:</u> Eulers stegmetod: $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ger med steglängd h formlerna $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \Rightarrow x_n = x_0 + hn \\ y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \end{cases}$

Här: $f(x,y) = e^{xy}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $h = 0.2$ (8)

$$\begin{cases} x_n = 0 + 0.2 \cdot n = 0.2 \cdot n \\ y_{n+1} = y_n + 0.2 \cdot e^{x_n y_n} \end{cases}$$

Vi itererar och får:

$n=1$ $\begin{cases} x_1 = 0.2 \cdot 1 = 0.2 \\ y_1 = y_0 + 0.2 \cdot e^{x_0 y_0} = 0 + 0.2 \cdot e^{0 \cdot 0} = 0.2 \end{cases}$

$n=2$ $\begin{cases} x_2 = 0.2 \cdot 2 = 0.4 \\ y_2 = y_1 + 0.2 \cdot e^{x_1 y_1} = 0.2 + 0.2 \cdot e^{0.2 \cdot 0.2} = \\ = 0.4081621\ldots \end{cases}$

$n=3$ $\begin{cases} x_3 = 0.2 \cdot 3 = 0.6 \\ y_3 = y_2 + 0.2 \cdot e^{x_2 y_2} = 0.4081621\ldots + 0.2 e^{0.4 \cdot 0.4081621\ldots} = \\ = 0.6436318\ldots \end{cases}$

$n=4$ $\begin{cases} x_4 = 0.8 \\ y_5 = 0.6436318\ldots + 0.2 \cdot e^{0.6 \cdot 0.6436318\ldots} = 0.9379014\ldots \end{cases}$

$n=5$ $\begin{cases} x_5 = 1 \\ y_5 = 0.9379014\ldots + 0.2 e^{0.8 \cdot 0.9379014\ldots} = 1.3614375\ldots \end{cases}$

d.v.s $\underline{\underline{y(1) \approx 1.36144}}$

---

8. a) Visa att $\cos x = x$ har lösning på $(0, \frac{\pi}{2})$ genom att använda Satsen om mellanliggande värden.

Lösning: Låt $f(x) = \cos x - x$, då blir ekvationen $f(x) = 0$ $(\cos x - x = 0 \Leftrightarrow$

⑨ $\Leftrightarrow \cos x = x$)

Vi har att: $\begin{cases} f(0) = \cos 0 - 0 = 1 - 0 = 1 > 0 \\ f(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0 \end{cases}$

Enligt Satsen om mellanliggande värden måste det finnas (minst) ett $c \in [0, \frac{\pi}{2}]$ s.a. $f(c) = 0$ ty f kontinuerlig. Eftersom $f(0) \neq 0$ och $f(\frac{\pi}{2}) \neq 0$ så måste $c \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Vi har alltså att $\cos c - c = 0$ för något $c \in (0, \frac{\pi}{2})$. $\square$

b) Approximera roten till $\cos x = x$ genom 3 iterationer av fixpunktsmetoden för startvärdet $x_0 = 0.75$.

Lösning: Fixpunktsmetoden innebär att för att lösa $f(x) = x$ så itereras $x_{n+1} = f(x_n)$ för något lämpligt startvärde x_0.

Här: $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0.75$ och stoppa vid $n = 3$.

$\Longrightarrow$ $x_1 = f(x_0) = \cos x_0 =$

$= \cos 0.75 = 0.731\,688\,869\ldots$

$x_2 = \cos x_1 = \cos 0.731\,688\,869\ldots =$

$= 0.744\,047\,085\ldots$

$$x_3 = \cos x_2 = \cos 0.744\,047\,085\ldots =$$
$$= 0.735\,733\,618\ldots$$

Vi har utfört 3 iterationssteg.

En approximativ rot till ekvationen är <u>0.74.</u>

(Exakt rot är 0.739 085 133.... Om man inte orkar iterera fram detta exakta svar så kan man t.ex. skriva $\boxed{\text{solve } \cos(x) - x = 0}$ i Wolfram Alpha (www.wolframalpha.com).)