



Omtentamen 2010-08-26 kl. 08:00–13:00

Miniräknare: Ej symbolhanterande. Formelsamling: Tabeller och formler för NV- och TE-programmen; Formler och tabeller i fysik, matematik och kemi för gymnasieskolan; TEFYMA; eller Formler och tabeller (Natur och Kultur).

Lösningarna bör vara så pass fullständigt dokumenterade att en läsare kan följa alla moment utan att behöva fylla i saknade steg.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är: A 22p, B 18p, C 14p, D 10p, E 9p. (Max: 24p.) Aspektuppgiften markerad A kan höja betyget om den är löst tillräckligt väl.

ok! 1. a) Visa med hjälp av den formella gränsvärdesdefinitionen (d.v.s. med ε - δ -formalism) att $\lim_{x \rightarrow 2} 3x = 6$. (1p)

ok! b) Skissera funktionen $f(x) = \frac{1}{1-x} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)$. Avgör huruvida $x = 1$ är en hävbar diskontinuitet eller ej. (1p)

ok! 2. Bestäm integralerna nedan.

ok! a) $\int \arctan x \, dx$. (Ledtråd: Uppfatta integranden som en produkt.) (1p)

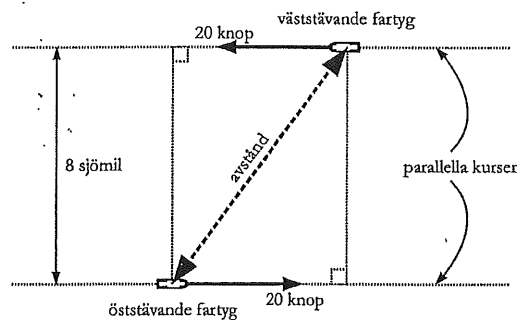
ok! b) $\int_{1/2}^2 \frac{x^2-1}{x^3+x} \, dx$. (1p)

ok! c) $\int_{4/\sqrt{3}}^4 \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$. (Ledtråd: Substituera $x = \frac{a}{\sin u}$ för något lämpligt a .) (1p)

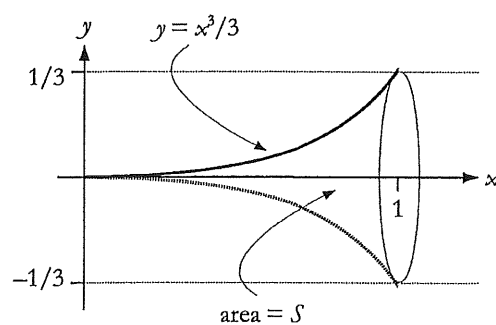
ok! 3. Konvergerar den generaliserade integralen $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^5}}$? Motivera! (3p)

Nej! X Två fartyg, det ena stävandes rakt västerut och det andra rakt österut, närmar sig varandra på parallella kurser som är 8 sjömil från varandra. Om båda fartygen håller farten 20 knop, med vilken hastighet minskar avståndet mellan dem när de är 10 sjömil från varandra? (Ledtrådar: Se Figur 1 samt notera att det per definition gäller att 1 knop = 1 sjömil/h.) (3p)

ok! 5. Bestäm arean S för den rotationsyta som bildas när man roterar kurvan $y = \frac{1}{3}x^3$, $0 \leq x \leq 1$, kring x -axeln. (Ledtråd: Se Figur 2.) (3p)



Figur 1. Fartygen i Uppgift 4.



Figur 2. Rotationsytan med arean S i Uppgift 5.

Nej!



Använd en Maclaurinserieutveckling för att bestämma $\sqrt{1.5}$ med ett fel på mindre än 5×10^{-3} . (Ledtråd: $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} x^n$ för $x \in (-1, 1)$. Denna serie är alternerande om man bortser från första termen.)

(3p)

ok!

7. Visa med induktion att $2n \leq 2^n$ för alla $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

(3p)

ok!

8. a) Bestäm lösningen till den "homogena" DE:n $y' = \frac{8x^2+y^2}{xy}$ givet att sidovillkoret $y(1) = 4$ uppfylls.

(2p)

ok!

b) Använd den förbättrade Eulerstegmetoden med steglängden $h = 0.25$ för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2}{1+x^2} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

på intervallet $[0, 1]$.

(2p)

Nej!



Formulera Analysens huvudsats (I) och (II) samt bevisa antingen (I) eller (II).

Sida 2 (av 2)

LÖSNINGAR TILL OMTENTAN 2010-08-26

1.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} 3x = 6$ betyder formelt:

För varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |3x-6| < \varepsilon \quad (*)$$

Låt oss ta en närmare titt på $HL(*)$:

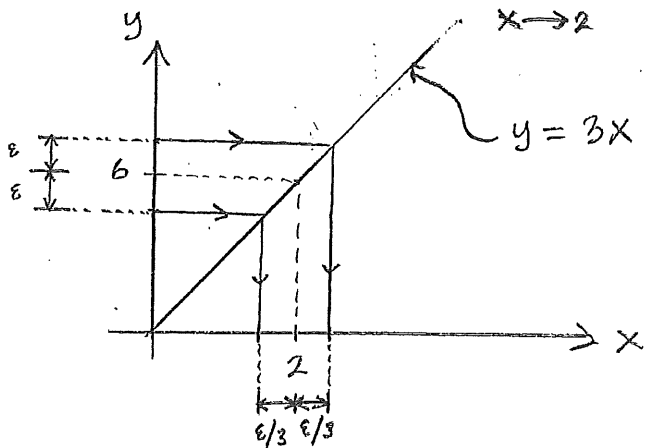
$$|3x-6| = |3(x-2)| = 3|x-2|$$

vilket är mindre än ett givet $\varepsilon > 0$ om

$$3|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \varepsilon/3$$

Valj $\delta = \epsilon/3$. Då gäller implikationen (*).

Vi har visat att LM $3x = 6$.

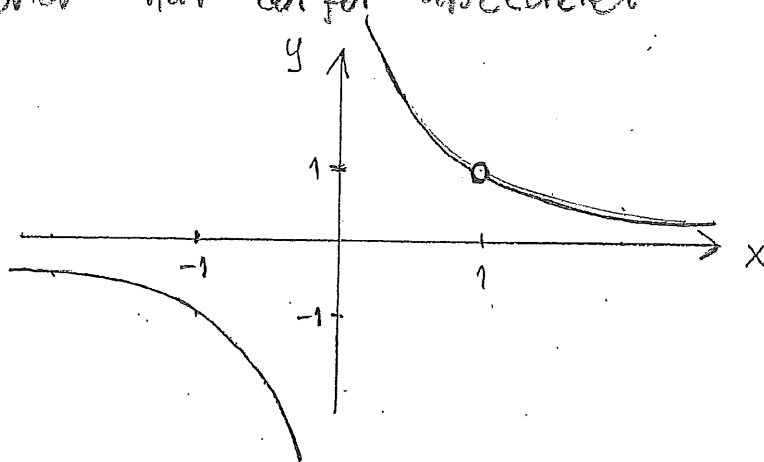


b) $f(x) = \frac{1}{1-x} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)$, odefinierad för $x=0$ och $x=1$

Vi har att

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} \quad (1)$$

Funktionerna har därför utseendet



Punkten $x=1$ är en diskontinuitet man kan "håra" eftersom

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1, \text{ d.v.s. finns}$$

(och den kontinuerliga utvidgningen F till f i $x=1$ är $F(x) = \frac{1}{x}$; notera dock att F inte är kontinuerlig i $x=0$, det är inte en hårbär diskontinuitet!).

2. a) $\int \arctan x \, dx = \int u \, dv \stackrel{\text{P.I.}}{=} uv - \int v \, du =$

$$= \left[\text{Låt } u = \arctan x, \, dv = dx \right.$$

$$\left. \text{d.v.s. } du = \frac{1}{1+x^2} dx, \, v = x \right] =$$

$$= \arctan x \cdot x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C =$$

$$= x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} + C$$

$$b) \int_{1/2}^2 \frac{x^2-1}{x^3+x} dx = \int_{1/2}^2 \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = (*)$$

$$\text{Ansätt } \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad (+)$$

$$\text{Vi vill ha } VL(+)=HL(+):$$

$$\begin{aligned} HL(+) &= \frac{A(x^2+1) + x(Bx+C)}{x(x^2+1)} = \\ &= \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(x^2+1)} = VL(+) \end{aligned}$$

Identifiering av likgradiga termer i täljaren:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ C=0 \\ A=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+B=1 \\ C=0 \\ A=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=2 \\ C=0 \\ A=-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (*) &= \int_{1/2}^2 \left(\frac{-1}{x} + \frac{2x}{1+x^2} \right) dx = \\ &= \left(-\ln|x| + \ln|1+x^2| \right) \Big|_{1/2}^2 = \\ &= \left(\ln\left(\frac{1+x^2}{x}\right) \right) \Big|_{1/2}^2 = \left(\ln\left(\frac{1}{x} + x\right) \right) \Big|_{1/2}^2 = \\ &= \ln\left(\frac{1}{2} + 2\right) - \ln\left(2 + \frac{1}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

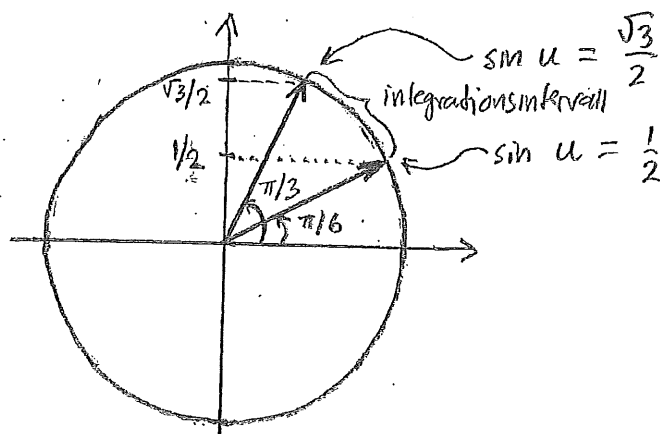
$$\begin{aligned} c) \int_{4/\sqrt{3}}^4 \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-4}} &= \left[\begin{cases} x = \frac{2}{\sin u} \\ dx = -\frac{2 \cos u}{\sin^2 u} du \end{cases} \right] \begin{cases} x=4 \Rightarrow \sin u = \frac{1}{2} \\ x=\frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin u = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ &= \int_{\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sin u = \frac{1}{2}} \frac{-2 \frac{\cos u}{\sin^2 u} du}{\left(\frac{2}{\sin u}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{2}{\sin u}\right)^2 - 4}} = \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int_{\sin u = \frac{1}{2}}^{\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\frac{1}{\sin^2 u} \cos u \, du}{\frac{1}{\sin^2 u} \sqrt{\frac{4}{\sin^2 u} - 4}} = \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\sin u = \frac{1}{2}}^{\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\cos u}{\sqrt{4\left(\frac{1}{\sin^2 u} - 1\right)}} \, du = \\
&= -\frac{1}{4} \int_{\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sin u = \frac{1}{2}} \frac{\cos u}{\sqrt{\frac{1 - \sin^2 u}{\sin^2 u}}} \, du = \\
&= \frac{1}{4} \int_{\sin u = \frac{1}{2}}^{\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\cos u}{\sqrt{\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}}} \, du = \text{[Utför integrationen i första kvadranten]} = \\
&= \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos u}{\frac{\cos u}{\sin u}} \, du = \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin u \, du = \\
&= \frac{1}{4} (-\cos u) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \right) = \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{8} \quad (\approx 0.0915)
\end{aligned}$$

Anmärkning: I första kvadranten gäller $\sin u, \cos u \geq 0$

så att $\sqrt{\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}} = \frac{|\cos u|}{|\sin u|} = \frac{\cos u}{\sin u}$



3.

Generaliserad integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Låt $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$. Vill jämföra detta med en p-integral. Inför $g(x) = x^{-3/2}$. Vi har att

$$0 \leq f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-3/2} = g(x)$$

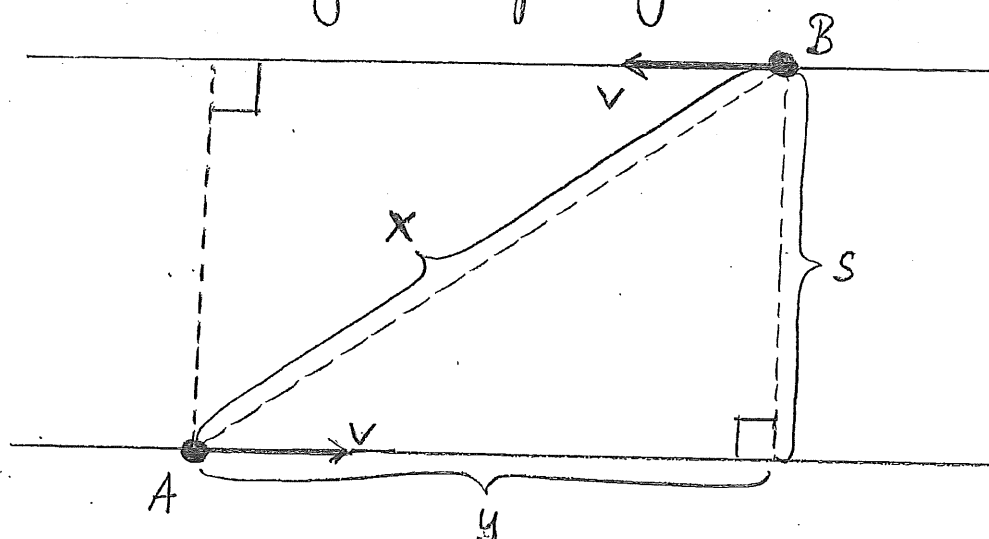
Enligt satsen på s. 3 i F7 så gäller att om $\int_1^{\infty} g(x) dx$ konvergerar så gör också $\int_1^{\infty} f(x) dx$ det. Vi har att

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} g(x) dx &= \int_1^{\infty} x^{-3/2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R x^{-3/2} dx = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-2x^{-1/2} \right) \Big|_1^R = \\ &= -2 \lim_{R \rightarrow \infty} \left(R^{-1/2} - 1^{-1/2} \right) = \\ &= -2 \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{R}} - 1 \right) = \\ &= -2(0 - 1) = 2 < \infty, \end{aligned}$$

d.v.s. $\int_1^{\infty} g(x) dx$ konvergerar, och därför måste även $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergera!

4.

Beteckningar enligt figuren nedan:



Det gäller att $s = 8$ sjömil

$v = 20$ knop $= 20$ sjömil/h

Vill veta $\frac{dx}{dt}$ då $x = 10$ sjömil.

Notera att $\frac{dy}{dt} = -2v = -40$ sjömil/h.

Pythagoras sats:

$$y^2 + s^2 = x^2$$

$$y^2 + 8^2 = x^2$$

$$y^2 + 64 = x^2 \quad (*)$$

Derivera implicit m.a.p. t :

$$2y \frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{x} \frac{dy}{dt} \quad (**)$$

Ur (*) fås: $y = \sqrt{x^2 - 64}$

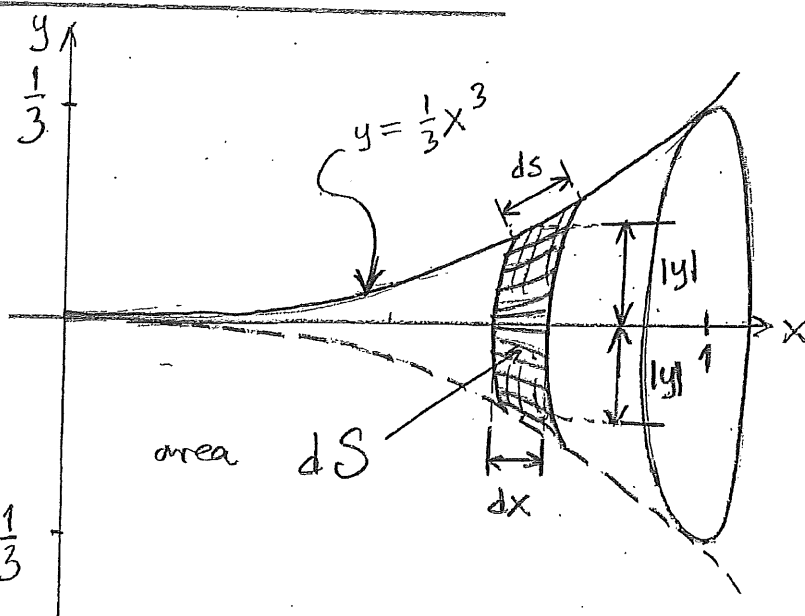
Sätt in detta i (**):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\sqrt{x^2 - 64}}{x} \frac{dy}{dt} = \left[\begin{array}{l} x = 10 \text{ sjömil} \\ \frac{dy}{dt} = -40 \text{ sjömil/h} \end{array} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{10^2 - 64}}{10} (-40) \text{ sjömil/h} = \\ &= -4\sqrt{36} \text{ sjömil/h} = -4 \cdot 6 \text{ sjömil/h} = \\ &= -24 \text{ sjömil/h} = -24 \text{ knop},\end{aligned}$$

d.v.s. avståndet mellan fartygen minskar
med hastigheten 24 knop när de är
10 sjömil från varandra.

5.

Figur:



Betrakta ett
band med bredden
 dx i x -led, en
ring med raden $-\frac{1}{3}$

$|y| = \frac{1}{3} x^3$ och

bredden $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$ längs glan.

Då är bandets area dS givet genom

$$dS = \underbrace{2\pi|y|}_{\text{omkrets}} \cdot \underbrace{ds}_{\text{bredd}} = 2\pi \frac{1}{3} x^3 \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (7)$$

Vi har all

$$\begin{aligned}\sqrt{1+(y')^2} &= \sqrt{1+\left(\frac{1}{3} \cdot 3x^2\right)^2} = \\ &= \sqrt{1+(x^2)^2} = \sqrt{1+x^4}\end{aligned}$$

Rotationsytans totala area S fås som

$$\begin{aligned}S &= \int_{x=0}^{x=1} dS = \int_0^1 2\pi \frac{1}{3} x^3 \sqrt{1+x^4} dx = \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^1 x^3 (1+x^4)^{1/2} dx = \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{4} \frac{2}{3} (1+x^4)^{3/2} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{\pi}{9} \left((1+x^4)^{3/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{9} (2^{3/2} - 1^{3/2}) = \\ &= \frac{\pi}{9} (2\sqrt{2} - 1) \text{ areenhet} \quad (\approx 0.638 \text{ a.e.})\end{aligned}$$

6.

Det gäller att

$$\begin{aligned}\sqrt{1.5} &= \sqrt{1+0.5} = [0.5 \in (-1, 1)] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} 0.5^n \quad (*)\end{aligned}$$

Vi vill ha ett fel $< 5 \times 10^{-3} = \frac{1}{200}$ vid
brukning av Maclaurinserien (*).

Detta är en alternerande serie (för $n \in \mathbb{Z}_+$)
och därför gäller att absolutbeloppet av felet
är som störst absolutbeloppet av den

⑧

första kända termen, d.v.s.

$$|f_{\text{ell}}| \leq \left| \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} 0.5^n \right| < \frac{1}{200} \quad (*)$$

Om $\frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} 0.5^n$ är första kända termen i Maclaurinutvecklingen. Olikheten i (*) kan skrivas som (om $n \in \mathbb{Z}_+$):

$$\frac{(2n)!}{(2n-1)(n!)^2 4^n} 0.5^n < \frac{1}{200}$$

$$\frac{(2n-1)(n!)^2 8^n}{(2n)!} > 200 \quad (**)$$

Vi testar $n=3$:

$$\begin{aligned} VL_{(**)}(n=3) &= \frac{5 \cdot (3!)^2 \cdot 8^3}{6!} = \frac{5 \cdot 6^2 \cdot 512}{720} = \\ &= \frac{5 \cdot 36 \cdot 512}{36 \cdot 20} = \frac{5 \cdot 512}{20} = \frac{512}{4} = 128, \end{aligned}$$

Vilket är $< 200 = HL_{(**)}$. Vi testar $n=4$:

$$\begin{aligned} VL_{(**)}(n=4) &= \frac{7 \cdot (4!)^2 \cdot 8^4}{8!} = \frac{7 \cdot 24^2 \cdot 8^4}{8 \cdot 7 \cdot 6!} = \\ &= \frac{724^2 \cdot 8^3}{720} = \frac{6^2 \cdot 4^2 \cdot 8^3}{36 \cdot 20} = \\ &= \frac{4^2 \cdot 8^3}{20} = \frac{4^2 \cdot 8^3}{4 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 8^3}{5} = \frac{8^4}{10} = \\ &= \frac{4096}{10} = 409.6, \end{aligned}$$

vilket är $> 200 = HL_{(**)}$. Vi kaster
alltså bort termerna $n=4, 5, 6, \dots$

Vi får alltså att

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} 0.5^n &= \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 8^n} = \\ &= \frac{(-1)^0 0!}{1 \cdot (0!)^2 8^0} + \frac{(-1)^1 2!}{(-1)(1!)^2 8^1} + \\ &\quad + \frac{(-1)^2 4!}{(-3)(2!)^2 8^2} + \frac{(-1)^3 6!}{(-5)(3!)^2 8^3} = \\ &= \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1^2 \cdot 1} + \frac{2}{1^2 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 24}{(-3) \cdot 2^2 \cdot 64} + \frac{720}{5 \cdot 6^2 \cdot 512} = \\ &= 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{128} = \frac{128 + 32 - 4 + 1}{128} = \\ &= \frac{157}{128} = 1.2265625, \end{aligned}$$

vilket ska jämföras med det exakta värdet

$$\sqrt{1.5} = 1.2247448\dots$$

d.v.s. felet är $0.0018176\dots < 5 \times 10^{-3}$.

7.

$$VL_n = 2n, HL_n = 2^n, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Ska visa $VL_n \leq HL_n$ för alla $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

Vi noterar först att

$$VL_0 = 2 \cdot 0 = 0 < 1 = 2^0 = HL_0,$$

så $VL_n \leq HL_n$ sant för $n=0$. Detta är dock ej vårt startsteg. Ska nu visa att

$VL_n \leq HL_n$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ genom induktion. (10)

- Startsteget ($n=1$): $VL_1 \leq HL_1$?

$$VL_1 = 2 \cdot 1 = 2 = 2^1 = HL_1,$$

startsteget verifierat.

- Induktionssteget: Gäller implikationen

$$VL_p \leq HL_p \Rightarrow VL_{p+1} \leq HL_{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+?$$

Antag $VL_p \leq HL_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$ (induktionsantagande).

Då gäller

$$\begin{aligned} VL_{p+1} &= 2(p+1) = \overset{=VL_p}{2p} + 2 = VL_p + 2 \leq \\ &\leq [\text{Induktionsantagandet}] \leq HL_p + 2 = \\ &= 2^p + 2 \stackrel{[p \geq 1]}{\leq} 2^p + 2^p = 2 \cdot 2^p = \\ &= 2^{p+1} = HL_{p+1}, \end{aligned}$$

d.v.s. induktionssteget verifierat.

Enligt induktionsprincipen gäller därför

$$VL_n \leq HL_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

och tillsammans med $VL_0 < HL_0$ så fås

$$\text{att } VL_n \leq HL_n \quad \forall n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

8.

a) "Homogen" DE $y' = \frac{8x^2 + y^2}{xy}$.

Vet då att HL kan skrivas som en funktion av y/x . Vi ser att

$$y' = \frac{8x^2 + y^2}{xy} = \frac{(8x^2 + y^2)/x^2}{(xy)/x^2} = \frac{8 + y^2/x^2}{y/x} = \frac{8}{y/x} + y/x \quad (*)$$

(Om $y' = f(y/x)$ så gäller alltså att funktionen ges av $f(t) = \frac{8}{t} + t$.)

Ansätt $v = y/x \Leftrightarrow y = xv \Rightarrow y' = 1 \cdot v + x \cdot v' = v + xv'$

Vi får då att (*) kan skrivas

$$v + xv' = \frac{8}{v} + v$$

$$xv' = \frac{8}{v}$$

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{8}{x} \quad (\text{separabel!})$$

$$\int v dv = 8 \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} v^2 = 8 \ln|x| + C$$

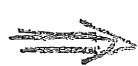
Sidovillkoret $y(1) = 4$ betyder i termer av v

att $v(1) = y(1)/1 = 4/1 = 4$, så att

$$\frac{1}{2} 4^2 = 8 \cdot \ln|1| + C$$

$$8 = 8 \cdot 0 + C$$

$$C = 8$$



$$\frac{1}{2} v^2 = 8 \ln|x| + 8$$

$$v^2 = 16(\ln|x| + 1)$$

$$v = 4 \sqrt{\ln|x| + 1}$$

$$y/x = 4 \sqrt{\ln|x|+1}$$

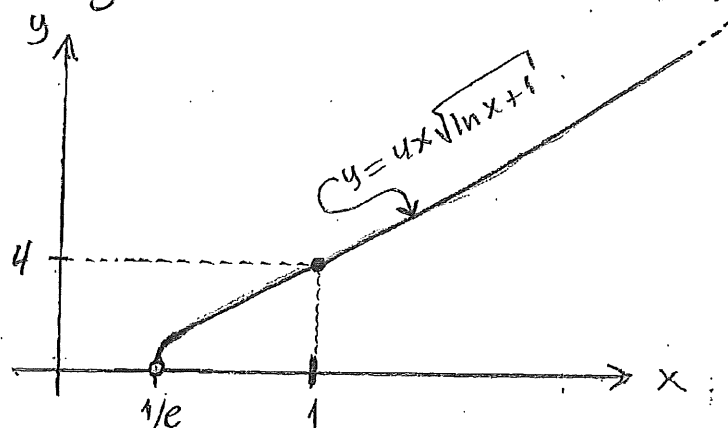
$$y = 4x \sqrt{\ln|x|+1}$$

Om vi noterar att $x > 0$ (+y $x=0$ kan ej passeras ty "ln 0" odefinierat) så fås

$$y = 4x \sqrt{\ln x + 1}$$

(Anmärkning: $\ln x + 1 > 0$ måste gälla, d.v.s. $\ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$. Lösningen gäller alltså för $x > 1/e$.)

$\ln x + 1 > 0$ ty
(1) $\ln x + 1 \geq 0$ i roten
(2) $y \neq 0$ i $D \setminus \{0\}$



b) Begynnelsevärdeproblem $\begin{cases} y' = \frac{y^2}{1+x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ och

steglängd $h=0.25$, lösa över $[0,1]$ med den förbättrade Eulermetoden.

Det gäller att $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ med

$$f(x,y) = \frac{y^2}{1+x^2}, \quad x_0 = 0 \text{ och } y_0 = 1.$$

Iterationsformler för den förbättrade Euler-

stegmetoden i detta fall:

$$\left\{ \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h = x_n + 0.25 \\ u_{n+1} &= y_n + h f(x_n, y_n) = y_n + 0.25 \cdot \frac{y_n^2}{1+x_n^2} = \\ &= y_n \left(1 + \frac{0.25 \cdot y_n}{1+x_n^2} \right) \\ y_{n+1} &= y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2} = \\ &= y_n + 0.125 \cdot \left(\frac{y_n^2}{1+x_n^2} + \frac{u_{n+1}^2}{1+x_{n+1}^2} \right) \end{aligned} \right.$$

Detta ger stegen:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= x_0 + 0.25 = 0 + 0.25 = 0.25 \\ u_1 &= y_0 \left(1 + \frac{0.25 \cdot y_0}{1+x_0^2} \right) = 1 \cdot \left(1 + \frac{0.25 \cdot 1}{1+0^2} \right) = \\ &= 1 + \frac{0.25}{1} = 1.25 \\ y_1 &= y_0 + 0.125 \cdot \left(\frac{y_0^2}{1+x_0^2} + \frac{u_1^2}{1+x_1^2} \right) = \\ &= 1 + 0.125 \cdot \left(\frac{1}{1+0} + \frac{1.25^2}{1+0.25^2} \right) = \\ &= 1 + 0.125 + 0.125 \cdot \frac{1.5625}{1.0625} \approx 1.3088 \\ x_2 &= x_1 + 0.25 = 0.5 \\ u_2 &= y_1 \left(1 + \frac{0.25 \cdot y_1}{1+x_1^2} \right) \approx 1.3088 \cdot \left(1 + \frac{0.25 \cdot 1.3088}{1+0.25^2} \right) \approx \\ &\approx 1.7119 \\ y_2 &= y_1 + 0.125 \cdot \left(\frac{y_1^2}{1+x_1^2} + \frac{u_2^2}{1+x_2^2} \right) \approx \\ &\approx 1.3088 + 0.125 \cdot \left(\frac{1.3088^2}{1+0.25^2} + \frac{1.7119^2}{1+0.5^2} \right) \approx \\ &\approx 1.8034 \end{aligned} \right.$$

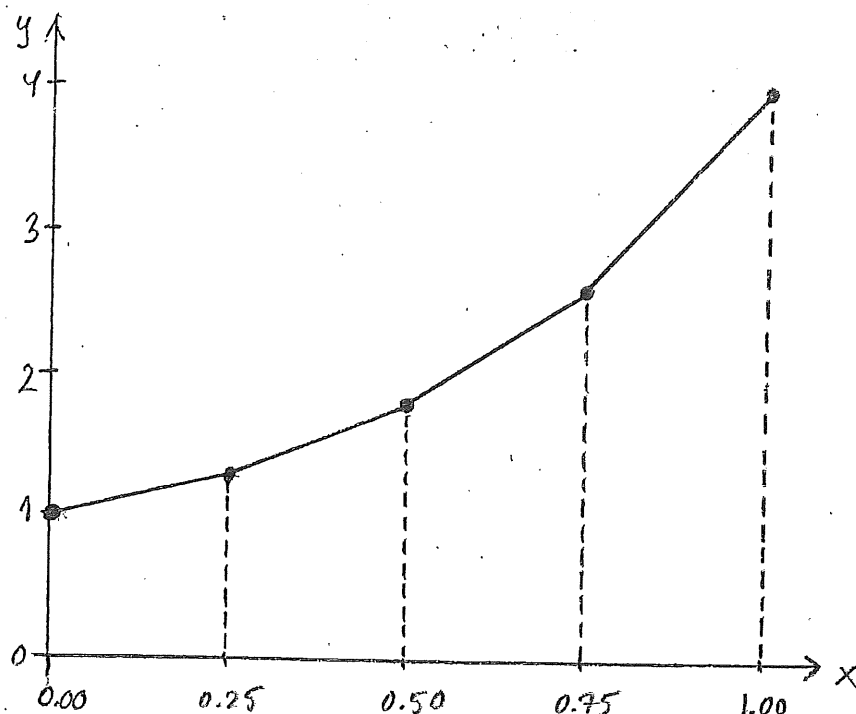
$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = x_2 + 0.25 = 0.75 \\ u_3 = y_2 \left(1 + \frac{0.25 \cdot y_2}{1 + x_2^2} \right) \approx 1.8034 \cdot \left(1 + \frac{0.25 \cdot 1.8034}{1 + 0.5^2} \right) \approx \\ \approx 2.4539 \\ y_3 = y_2 + 0.125 \cdot \left(\frac{y_2^2}{1 + x_2^2} + \frac{u_3^2}{1 + x_3^2} \right) \approx \\ \approx 1.8034 + 0.125 \cdot \left(\frac{1.8034^2}{1 + 0.5^2} + \frac{2.4539^2}{1 + 0.75^2} \right) \approx \\ \approx 2.6104 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_4 = x_3 + 0.25 = 1 \\ u_4 = y_3 \left(1 + \frac{0.25 \cdot y_3}{1 + x_3^2} \right) \approx 2.6104 \cdot \left(1 + \frac{0.25 \cdot 2.6104}{1 + 0.75^2} \right) \approx \\ \approx 3.7006 \\ y_4 = y_3 + 0.125 \cdot \left(\frac{y_3^2}{1 + x_3^2} + \frac{u_4^2}{1 + x_4^2} \right) \approx \\ \approx 2.6104 + 0.125 \cdot \left(\frac{2.6104^2}{1 + 0.75^2} + \frac{3.7006^2}{2} \right) \approx \\ \approx 4.0114 \end{array} \right.$$

Den numeriska lösningen ges enligt tabellen:

x	y
0.00	1.0000
0.25	1.3088
0.50	1.8034
0.75	2.6104
1.00	4.0114

Se figur:



(Notera att den exakta lösningen är

$$y = \frac{1}{1 - \arctan x}$$

vilket kan härledas genom att $y' = \frac{y^2}{1+x^2}$ är separabel. Felet $e_n = y_n - y(x_n)$ visar sig vara

$$\begin{cases} e_0 = 0 \\ e_1 \approx -0.0156 \\ e_2 \approx -0.0610 \\ e_3 \approx -0.1947 \\ e_4 \approx -0.6484 \end{cases}$$

Felet kommer i grafen ovan inte böja mätas förrän vid $x = 0.75$.)

A.

Se Föreläsning 6 sid. 1 & 2.