Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Tentamen i Fördjupningskurs i Analys, 7,5/6 hp

MA059G/MA060G

Datum: 2009-10-26
Skrivtid: 5 timmar
Lärare: Andreas Lind (070-6890822) och Per Edström (073-7602151)
NAT
Hjälpmedel: Formelsamling (Gymnasieformelsamling, Ekbom Tabeller och formler för NV-programmet, Natur & Kultur eller Tefyma), skriv och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

Den obligatoriska delen av denna tenta omfattar 8 frågor. Därutöver innehållar skrivningen en frivillig uppgift. Den obligatoriska delen kan maximalt ge betyget B. Tillsammans med betyget B på den obligatoriska delen kan lösningen på den frivilliga uppgiften ge kursbetyget A. En god behandling av den frivilliga uppgiften kan även lyfta kursbetyget ett steg från ett skrivningsbetyg C, D eller E på den obligatoriska delen. Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge avdrag även om slutresultatet är rätt! Behandla högst en uppgift på varje papper! Glöm ej att skriva kod på varje sida.

LYCKA TILL!!

1. **(Obligatorisk)**
   Visa med definitionen att $\lim_{x\to 3} 4x + 1 = 13$.

2. **(Obligatorisk)**
   Visa att varje deriverbar funktion är kontinuerlig. Gäller det omvända påståendet? Om inte, ge ett motexempel.

3. **(Obligatorisk)**
   Bestäm de reella konstanterna a, b och c så att

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-a}{x-1} & , \ x > 1 \\ bx^c & , \ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

   blir kontinuerlig och deriverbar i $x = 1$. Motivera väl!

4. **(Obligatorisk)**
   Formulera medelvärdessatsen, och använd den sen för att bevisa att $e^x \geqslant 1 + x$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

5. **(Obligatorisk)**
   Låt ABC vara en rätvinklig triangel med rät vinkel vid hörnet C. Finn maximal area för en rektangel som är inskriven i triangeln och har ett hörn i C och ett hörn på sträckan AB.

6. **(Obligatorisk)**
   Använd valfri numerisk metod i fyra steg för att approximera $\sqrt{2}$. Motivera väl.

7. **(Obligatorisk)**
   Ta fram en allmän lösning till differentialekvationen $y'' - y = x^2 e^x$.

8. **(Obligatorisk)**
   Visa att x^2+1 är integrerbar på $[0, 1]$. Du får använda dig av $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ och $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ej! ~~9.~~ **(Frivillig)**
Bevisa medelvärdessatsen, dvs den sats som du formulerade i uppgift 4.

LÖSNINGAR TILL OMTENTAN 2009-10-26

[Lösningar av Jens Persson (2011-11-21)]

1. Visa med definitionen att $\lim_{x \to 3} (4x+1) = 13$.

Lösning: Låt $f(x) = 4x+1$, $a = 3$ och $L = 13$.

Vill nu visa påståendet

> För varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att
>
> $$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \qquad (*)$$

Antag $\varepsilon > 0$. Betrakta

$$|f(x) - L| = |(4x+1) - 13| =$$

$$= |4x - 12| = 4|x-3| \qquad (**)$$

Detta är mindre än ε omm $4|x-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < \varepsilon/4$

Välj $\delta = \varepsilon/4$. Då gäller

$$0 < |x-a| < \delta \underset{\delta=\varepsilon/4}{\overset{a=3}{\Longrightarrow}} |x-3| < \varepsilon/4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4|x-3| < \varepsilon \underset{(**)}{\Longrightarrow} |f(x) - L| < \varepsilon$$

vilket är implikationen $(*)$.

---

2. Visa f deriverbar $\Rightarrow$ f kontinuerlig.
Gäller f kontinuerlig $\Rightarrow$ f deriverbar?
Om inte, ge motexempel.

Lösning: Att f deriverbar i punkt a innebär

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{R}\text{, och detta tal}$$

kallar man $f'(a)$. Sätt $x=a+h$, då kan definitionen skrivas:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Eftersom $x-a \to 0$ då $x \to a$ så måste $f(x)-f(a) \to 0$ vara ett nödvändigt villkor, d.v.s. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, vilket innebär kontinuitet i $x=a$.

Motexempel: Välj $f(x)=|x|$, $x \in \mathbb{R}$.

f kontinuerlig i $x=0$ ty $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0$
$= |0| = f(0)$.

Däremot så gäller:

$$\begin{cases} \lim_{h\to 0_+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \dfrac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0_+} \dfrac{h}{h} = 1 \\ \lim_{h\to 0_-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \dfrac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0_-} \dfrac{-h}{h} = -1 \end{cases}$$

d.v.s. vänster- och högergränsvärden olika

$\Longrightarrow f$ ej deriverbar i $x=0$. ξ

③ 3. Bestäm a, b, c så att

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1} - a}{x-1}, & x > 1 \\ bx^c, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

blir kontinuerlig och deriverbar i $x = 1$.

Lösning: Börja med kontinuiteten; vänster- och högergränsvärden ska vara lika i $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1_-} f(x) = \lim_{x \to 1_-} bx^c = \begin{cases} \lim_{x \to 1_-} bx^0, & c = 0 \\ \lim_{x \to 1_-} bx^c, & c \neq 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{x \to 1_-} b \cdot 1 \\ b \cdot 1 \end{cases} = \begin{cases} b \\ b \end{cases} = b \quad \begin{bmatrix} \leftarrow c = 0 \\ \leftarrow c \neq 0 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{x \to 1_+} f(x) = \lim_{x \to 1_+} \frac{\sqrt{x+1} - a}{x-1} = \left[\begin{array}{l} x-1 \to 0 \text{ då } x \to 1_+ \\ \Rightarrow \sqrt{x+1} - a \to 0 \text{ då } \\ x \to 1_+, \text{ d.v.s. } \\ \boxed{a = \sqrt{2}} \text{ ty } b \in \mathbb{R} \end{array} \right] = \lim_{x \to 1_+} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1_+} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{x \to 1_+} \frac{(x+1) - 2}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \to 1_+} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = 1/2\sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{b = 1/2\sqrt{2}}$$

Återstår bestämma c genom deriverbarheten.

Vänster- och högerderivator ska vara lika: ④

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0_-} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+h)^c - \frac{1}{2\sqrt{2}}1^c}{h} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}x^c\right)\Big|_{x=1} =$$

$$= \begin{cases} 0, & c=0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} c x^{c-1}\Big|_{x=1}, & c\neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & c=0 \\ \frac{c}{2\sqrt{2}}, & c\neq 0 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0_+} \frac{\frac{\sqrt{(1+h)+1}-\sqrt{2}}{(1+h)-1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}1^c}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\left(\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\left(\frac{(\sqrt{2+h}-\sqrt{2})(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\left(\frac{(2+h)-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h} \frac{2\sqrt{2} - (\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2+h}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+h}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h} \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{2+h})(\sqrt{2}+\sqrt{2+h})}{(\sqrt{2}+\sqrt{2+h})(\sqrt{2}+\sqrt{2+h})} =$$

⑤
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\, \frac{2-(2+h)}{(\sqrt{2}+\sqrt{2+h})^2} =$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{2+h})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\, \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2} =$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\, \frac{1}{(2\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\, \frac{1}{4\cdot 2} = -\frac{1}{16\sqrt{2}}$$

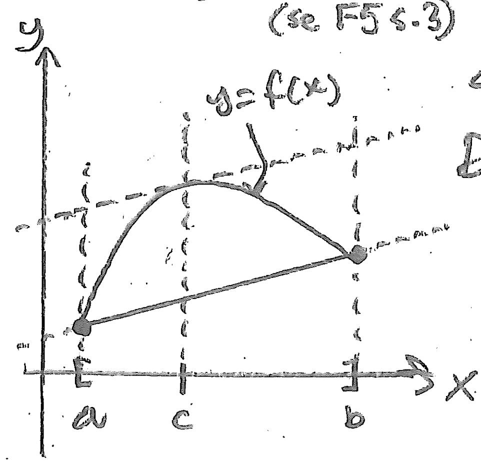
Vi får då ekvationen:
$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{1}{16\sqrt{2}},\ c\neq 0 \ ↯ \\ \dfrac{c}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{16\sqrt{2}},\ c \neq 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow c = -\frac{2\sqrt{2}}{16\sqrt{2}} = -1/8, \text{ d.v.s. } \boxed{c = -1/8}.$$

---

4. Formulera medelvärdessatsen och bevisa m.h.a. den $e^x \geq 1+x$ för alla $x \in \mathbb{R}$

<u>Lösning:</u> <u>MVS</u>: (se F5 s.3) Antag f kontinuerlig på $[a,b]$ och att den är deriverbar på (a,b). Då finns $c \in (a,b)$ s.a.



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Bevisa nu olikheten. Vi väljer $f(x)=e^x$ ty denna del är mest komplicerad (läs: icke-linjär). Tillämpa MVS på $[x,0]$ i fallet $x<0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c) \quad \text{f.n. } c \in (x,0).$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x - e^0}{x} = e^c < 1 \quad \text{ty } c<0.$$

$$\Rightarrow \frac{e^x-1}{x} < 1 \underset{x<0}{\Leftrightarrow} e^x - 1 > x \Leftrightarrow e^x > 1+x$$

MVS på $[0, x]$, $x>0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c), \quad c \in (0,x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x - e^0}{x} = e^c > 1 \quad \text{ty } c>0$$

$$\Rightarrow \frac{e^x-1}{x} > 1 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} e^x - 1 > x \Leftrightarrow e^x > 1+x$$

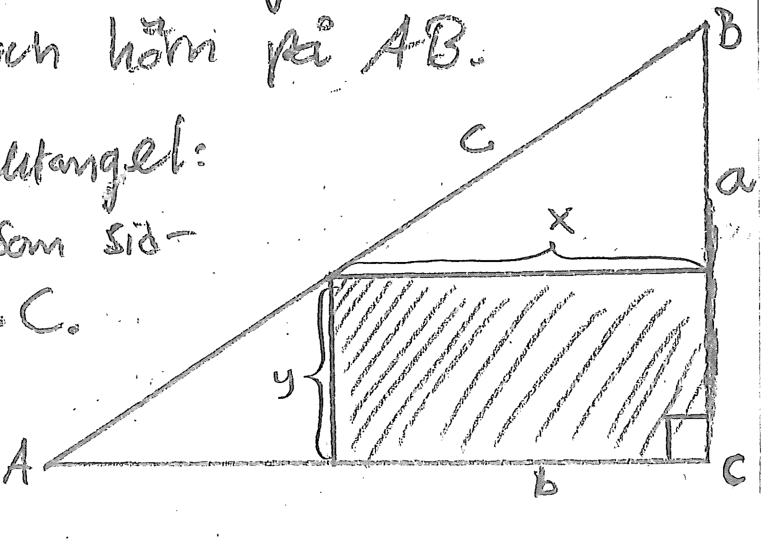
I fallet $x=0$ gäller $e^x = e^0 = 1 = 1+x$

$\Rightarrow e^x \geq 1+x$ för <u>alla</u> $x \in \mathbb{R}$

(med strikt olikhet omm $x \neq 0$).

---

5. ABC rätvinklig triangel, rät vinkel i C. Maximal area för rektangel inskriven i ABC med hörn i C och hörn på AB.



<u>Lösning:</u> Triangel+rektangel:
Vi har infört a, b, c som sidlängd motsatt A, B resp. C.
(Notera Pythagoras: $a^2+b^2+c^2$)

⑦ Rektangelns sidor kallar vi x ($/\!/ AC$) och y ($/\!/ BC$). Arean A ges av $A = xy$.

Likformighet: $\dfrac{y}{b-x} = \dfrac{a}{b} \Leftrightarrow y = \dfrac{a}{b}(b-x) =$

$= a\left(1 - \dfrac{x}{b}\right)$

$$\Rightarrow A(x) = x \cdot a\left(1 - \frac{x}{b}\right)$$

$$= a\left(x - \frac{1}{b}x^2\right), \quad 0 \leq x \leq b$$

Vill hitta största värdet för $A(x)$ på $[0, b]$:

- Kritiska punkter: $A'(x) = a\left(1 - \dfrac{2}{b}x\right)$

  $A'(x) = 0 \Leftrightarrow a\left(1 - \dfrac{2}{b}x\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{2}{b}x = 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x = b/2 \quad (\in [0, b])$

- Singulära punkter: Saknas.
- Ändpunkter: $x = 0$ och b

Största (och minsta) värde bland dessa:

$$\begin{cases} A(0) = a\left(0 - \frac{1}{b}0^2\right) = 0 \\ A(b/2) = a\left(\frac{b}{2} - \frac{1}{b}(b/2)^2\right) = a\left(\frac{b}{2} - \frac{b}{4}\right) = \\ \quad = a\frac{b}{4} = ab/4 \\ A(b) = a\left(b - \frac{1}{b}b^2\right) = a(b-b) = 0 \end{cases}$$

Största värdet är $ab/4$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Rektangelns största area är } \dfrac{ab}{4}.}$

⑧

6. Approximera $\sqrt{2}$ med numerisk metod i fyra steg.

Lösning: Möjliga numeriska metoder i kursen:

- Numerisk ekvationslösning
  - → Bisektionsmetoden (1)
  - → Fixpunktsmetoden (2)
  - → Newtons metod (3)
- Numerisk integrering
  - → Trapetsformeln (4)
  - → Mittpunktsformeln (5)
  - → Simpsons formel (6)
- Numerisk lösning av DE:er
  - → Eulers stegmetod (7)
  - → Eulers förbättrade stegmetod (8)

Dessutom kan man även tänka sig Taylors sats. (9)

Vi vill välja någon av (1)–(9) samt konstruera ett till-lämpbart problem vars lösning är $\sqrt{2}$. Låt välja Newtons metod (3) där vill hitta rot $\sqrt{2}$ till ekvationen $f(x)=0$ för lämpligt $f(x)$. Allra enklast är förstås att välja $f(x) = x^2-2$ ty $x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$. Newtons metod innebär att vi itererar (givet start x_0)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2-2}{2x_n} =$$

$$= x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}$$

Eftersom $1.4^2 = 1.96 \approx 2$ så är $x_0 = 1.4$

⑨ lämpligt startvärde. Vi får de fyra stegen

$$x_1 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{x_0} = \frac{1}{2}\cdot 1.4 + \frac{1}{1.4} = 1.4142857\ldots$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{2}\cdot 1.4142857 + \frac{1}{1.4142857} = $$
$$= 1.414213561$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}\cdot 1.4142356 + \frac{1}{1.4142356} =$$
$$= 1.414213562\ldots$$

$$\Rightarrow x_4 = \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2}\cdot 1.414213562\ldots + \frac{1}{1.414213562\ldots} =$$
$$= 1.414213562\ldots$$

Eftersom x_3 och x_4 stämmer till 9:e decimalen så verkar det vara så att

$$\boxed{\sqrt{2} \approx 1.414213562}$$

är en rimlig approximation.

<u>Notera:</u> Till 9 decimaler gäller verkligen att $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$

---

7. Allmän lösning till

$$y'' - y = x^2 e^x \qquad (*)$$

<u>Lösning:</u> Allmän lösning till $(*)$ kan skrivas $y = y_p + y_h$ där y_p partikulärlösning till $(*)$ och y_h lösning till motsvarande homogena ekvation.

- Homogen version av (*): $y''-y=0$ (**) 10

Karakteristisk ekvation: $r^2-1=0 \Leftrightarrow r^2=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r=\pm 1$

$$\Longrightarrow y_h(x) = Ce^{-x}+De^{x}$$

- Partikulärlösning till (*): $HL_{(*)} = x^2e^x$

Pröva därför med (Se s. 964 i kursbok):

$$y_p(x) = x^m(A_1+A_2x+A_3x^2)e^x$$

$m=0 \Rightarrow A_1$-termen löser homogena ekv. (**)

$m=1 \Rightarrow$ Denna borde fungera

$$\Longrightarrow y_p(x) = x(A_1+A_2x+A_3x^2)e^x = (A_1x+A_2x^2+A_3x^3)e^x$$

$$\Longrightarrow y_p'(x) = (A_1+2A_2x+3A_3x^2)e^x+(A_1x+A_2x^2+A_3x^3)e^x$$

$$= \left(A_1+(A_1+2A_2)x+(A_2+3A_3)x^2+A_3x^3\right)e^x$$

$$\Longrightarrow y_p''(x) = \left((A_1+2A_2)+2(A_2+3A_3)x+3A_3x^2\right)e^x+$$
$$+\left(A_1+(A_1+2A_2)x+(A_2+3A_3)x^2+A_3x^3\right)e^x$$

$$= \left(2(A_1+A_2)+(A_1+4A_2+6A_3)x+(A_2+6A_3)x^2+A_3x^3\right)e^x$$

Sätt in y_p och y_p'' i (*):

$$\left(2(A_1+A_2)+(A_1+4A_2+6A_3)x+(A_2+6A_3)x^2+A_3x^3\right)e^x-$$
$$-(A_1x+A_2x^2+A_3x^3)e^x = x^2e^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(A_1+A_2)+(4A_2+6A_3)x+6A_3x^2 = x^2 \Leftrightarrow$$

(11)
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A_1 + 2A_2 = 0 \\ 4A_2 + 6A_3 = 0 \\ 6A_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ 4A_2 + 6\cdot\frac{1}{6} = 0 \\ A_3 = 1/6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 - \frac{1}{4} = 0 \\ A_2 = -1/4 \\ A_3 = 1/6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 1/4 \\ A_2 = -1/4 \\ A_3 = 1/6 \end{cases} \Longrightarrow y_p(x) = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right)e^x$$

$$\Longrightarrow y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right)e^x + Ce^{-x} + De^x$$

d.v.s. $\boxed{y(x) = Ce^{-x} + \left(D + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right)e^x}$ är den allmänna lösningen.

8.

Visa att $f(x) = x^2 + 1$ integrerbar på $[0,1]$.

Lösning: Enligt Def. 3 på sid. 301 i kursboken är f integrerbar på $[0,1]$ om det finns precis ett tal I s.a. för varje partition P av $[0,1]$ så gäller $L(f,P) \leq I \leq U(f,P)$. (*)

Antag att det finns en följd partitioner $\{P_n\}$ s.a.
$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n)$ då måste f vara integrerbar eftersom dessa två gränsvärden kommer definiera ett unikt I som uppfyller (*).
(I måste vara större än varje undersumma ty $\lim_n U_n$ och mindre än varje översumma ty $\lim_n L_n$.)

Vi låter $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ där $x_i = \frac{i}{n}$ (12)
för $i = 0, 1, \dots, n$. Vi får $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = 1/n$
för $i = 1, 2, \dots, n$ (n st lika långa delintervall).
Detta ger undersumman:

$$L(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(l_i^2+1) = [f \text{ växande}]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1}^2+1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{i-1}{n}\right)^2+1\right) =$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i^2-2i+1) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1 =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n}i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}i + \sum_{i=1}^{n}1\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1 =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + n\right) + \frac{1}{n}n =$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) - \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + 1$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 0 + 0 + 1 = 4/3$$

Översumman blir:

$$U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i^2+1) = [f \text{ växande}] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{i}{n}\right)^2+1\right) =$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n}n$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + 1$$

(13) $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 + 1 = 4/3$

d.v.s. $\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = 4/3$,

Så f är integrerbar på $[0, 1]$ (och integralen $\int_0^1 f(x)\,dx$ är $4/3$).