Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Omtentamen 2011-04-28 kl. 08:00–13:00

Miniräknare: Ej symbolhanterande. Formelsamling: Tabeller och formler för NV- och TE-programmen; Formler och tabeller i fysik, matematik och kemi för gymnasieskolan; TEFYMA; eller Formler och tabeller (Natur och Kultur).

Lösningarna bör vara så pass fullständigt dokumenterade att en läsare kan följa alla moment utan att behöva fylla i saknade steg.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är: A 22p, B 18p, C 14p, D 10p, E 9p. (Max: 24p. exkl. bonuspoäng.) Till tentamensskrivningspoängen adderas erhållna bonuspoäng. (Max: +3p.)

1. a) Visa med hjälp av den formella gränsvärdesdefinitionen (d.v.s. med ε–δ-formalism) att $\lim_{x\to 2}(2x-3)=1$. (1p)

b) Låt f vara definierad på $[-1,2]$ och ges enligt grafen i Figur 1(a). Vilken av diskontinuiterna $x=0$ och $x=1$ är hävbar? Hur ska f definieras i den hävbara diskontinuiteten för att få kontinuitet där? (1p)

c) Beräkna $f'(4)$ med hjälp av derivatans definition då $f(x)=\sqrt{x}$. (1p)

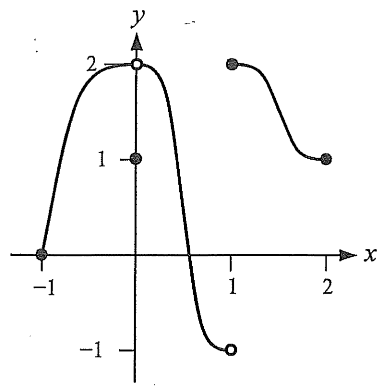
2. Skissera grafen till $f(x)=\dfrac{x}{(x+3)^2}$ och ange eventuella asymptoter, lokala maxima och lokala minima samt inflexionspunkter. (3p)

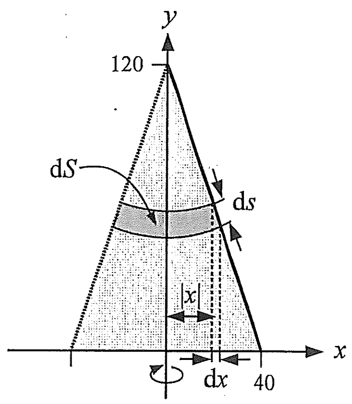
3. Bestäm andra ordningens Taylorpolynom $P_2(x)$ till $f(x)=\sqrt{x}$ kring $x=25$ och approximera m.h.a. detta $\sqrt{26}$ samt uppskatta $|E_2(26)|$, d.v.s. absolutbeloppet av felet för approximationen. (3p)

4. a) Beräkna den bestämda integralen $\displaystyle\int_{1/2}^{5} x\sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x$. (1p)

b) Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. (1p)

c) Beräkna den obestämda integralen $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}\,\mathrm{d}x$. (1p)





Figur 1. (a) Grafen till f i Uppgift 1 b). (b) Det konformade föremålet i Uppgift 5.

5. Ett föremål format som en rät kon ska täckas med ett lager bladguld på den krökta ytan. Hur mycket guld mätt i cm^3 kommer gå åt om föremålet är 120 cm högt och har en basradie på 40 cm; se Figur 1(b). Antag att bladguldet är 10^{-4} cm tjockt och att volymen ges som kon-ytarean multiplicerat med bladguldstjockleken.
(Obs.: Du får ej använda formelsamlingens formel för konytarean!) (3p)

6. Bestäm de värden på x för vilka serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n\sqrt{n}}$ absolutkonvergerar, konvergerar betingat resp. divergerar. (3p)

7. Lös den inhomogena linjära ODE:n $y'' + 2y' + 2y = 2\mathrm{e}^{-x}\cos x$. (3p)

8. Bestäm T_6, M_6 och S_6 för integralen $\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$ samt uppskatta felen. (Ledtråd: Felen för approximationerna T_n, M_n och S_n för integralen $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ kan uppskattas enligt formlerna $|I - T_n| \leqslant \frac{K_2(b-a)}{12}h^2$, $|I - M_n| \leqslant \frac{K_2(b-a)}{24}h^2$ resp. $|I - S_n| \leqslant \frac{K_4(b-a)}{180}h^4$ där $h = \frac{b-a}{n}$ samt $|f''(x)| \leqslant K_2$ på $[a,b]$ och $|f^{(4)}(x)| \leqslant K_4$ på $[a,b]$.) (3p)

Lycka till!

LÖSNINGAR TILL OMTENTAN 2011-04-28

1.

a) Visa $\lim_{x \to 2} (2x-3) = 1$ formellt.

Lösning: Låt $f(x) = 2x-3$, $a=2$, $L=1$.
Vill visa påståendet

För varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ s.a.
$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$ (*)

Antag $\varepsilon > 0$ givet:

$$|f(x)-L| = |(2x-3)-1| = |2x-4| =$$
$$= 2|x-2| \qquad (**)$$

Detta är $< \varepsilon$ omm $2|x-2| < \varepsilon$
$$\Leftrightarrow |x-2| < \varepsilon/2$$

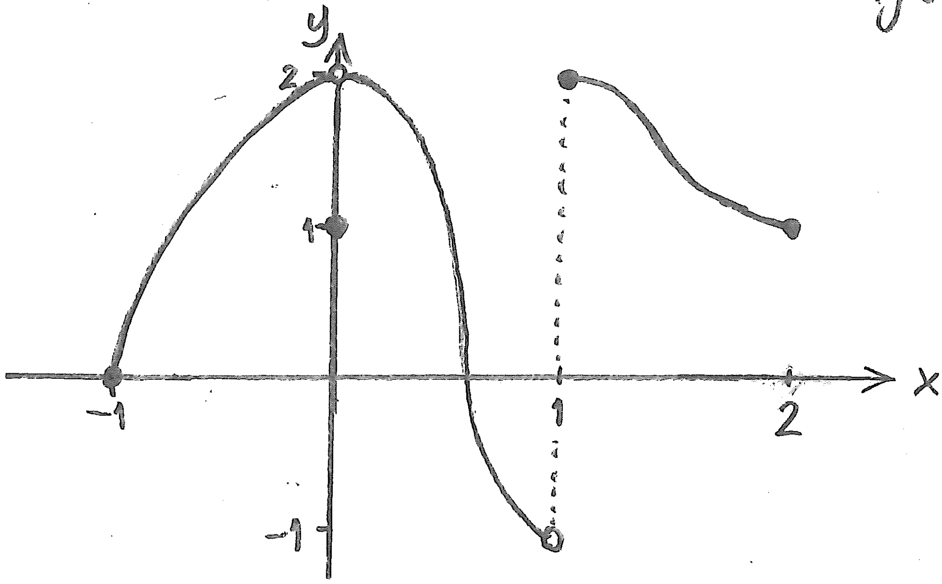
Välj $\delta = \varepsilon/2$. Då gäller implikationen

$$0 < |x-a| < \delta \underset{\delta=\varepsilon/2}{\Longrightarrow} 0 < |x-2| < \varepsilon/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2|x-2| < \varepsilon \underset{(**)}{\Longrightarrow} |f(x)-L| < \varepsilon$$

Vilket precis är implikationen (*).

b) $f : [-1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definierad enligt



Vilken av $x=0$ och $x=1$ är hävbar, och hur ska f definieras i den punkten för kontinuitet där?

Lösning: Den hävbara diskontinuiteten är $\boxed{x=0}$ och för att få kontinuitet där ska man omdefiniera enligt

$$\boxed{f(0)=2}.$$

c) $f(x)=\sqrt{x}$, $f'(4)$ m.h.a. definitionen.

Lösning: Derivatans definition ger

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} =$$

③
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(4+h)-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{\sqrt{4+0}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} =$$

$$= \frac{1}{2+2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

---

2. Skissera $f(x) = \dfrac{x}{(x+3)^2}$ och ange asymptoter, lok max & min och inflexionspkter.

Lösning: Vi följer receptet från Föreläsning 6:

① $f(x) = x(x+3)^{-2} = \dfrac{x}{(x+3)^2}$

$$f'(x) = (x+3)^{-2} + x(-2)(x+3)^{-3} =$$
$$= ((x+3)-2x)(x+3)^{-3} =$$
$$= (3-x)(x+3)^{-3} = \frac{3-x}{(x+3)^3}$$

$$f''(x) = (-1)(x+3)^{-3} + (3-x)(-3)(x+3)^{-4} =$$
$$= ((-1)(x+3) + (-3)(3-x))(x+3)^{-4} =$$
$$= (2x-12)(x+3)^{-4} = 2\frac{x-6}{(x+3)^4}$$

② (a) $\lim_{x\to -3_-} f(x) = \lim_{x\to -3_-} \frac{x}{(x+3)^2} = -\infty$

$\lim_{x\to -3_+} f(x) = \lim_{x\to -3_+} \frac{x}{(x+3)^2} = -\infty$

d.v.s. dubbelsidig vertikal asymptot i $x=-3$.

(b) $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x}{(x+3)^2} =$

$= \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1/x}{(1+3/x)^2} = \frac{0}{1+0} = 0$

d.v.s. en dubbelsidig horisontell asymptot $y=0$.

(c) $f(-x) = \frac{(-x)}{((-x)+3)^2} = -\frac{x}{(x-3)^2} \neq \pm f(x)$

d.v.s. varken udda eller jämn funktion.

(d) • Skärning y-axel: $f(0) = \frac{0}{(0+3)^2} = 0$,

d.v.s. $(0,0)$.

• Skärning x-axel: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$, d.v.s. $(0,0)$.

③ (a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3-x}{(x+3)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$f(3) = \frac{3}{(3+3)^2} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

d.v.s. $(3, 1/12)$ kritiskt punkt.

⑤ (b) f' ej definierad i $\underline{x=-3}$.

(c) $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{3-x}{(x+3)^3}>0 \Leftrightarrow \begin{cases}3-x>0\\x+3>0\end{cases}$ eller

eller $\begin{cases}3-x<0\\x+3<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<3\\x>-3\end{cases}$ eller $\underbrace{\begin{cases}x>3\\x<-3\end{cases}}_{\text{omöjligt!}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{x\in(-3,3)}$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \begin{cases}3-x>0\\x+3<0\end{cases}$ eller $\begin{cases}3-x<0\\x+3>0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x<3\\x<-3\end{cases}$ eller $\begin{cases}x>3\\x>-3\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<-3$ eller $x>3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{x\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)}$.

④ (a) $f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\dfrac{x-6}{(x+3)^4}=0 \Leftrightarrow x=6$

$f(6)=\dfrac{6}{(6+3)^2}=\dfrac{6}{81}=\dfrac{2}{27}$

d.v.s. $\underline{(6,\ 2/27)}$.

(b) f'' ej definierad i $\underline{x=-3}$.

(c) $f''(x)>0 \Leftrightarrow 2\dfrac{x-6}{(x+3)^4}>0 \Leftrightarrow \begin{cases}x-6>0\\x+3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x>6 \Leftrightarrow \underline{x\in(6,\infty)}$.

$f''(x)<0 \Leftrightarrow \begin{cases}x-6<0\\x+3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<6\\x\neq -3\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{x\in(-\infty,-3)\cup(-3,6)}$.

(d) f'' växlar tecken för $x=6$, d.v.s. ⑥

$(6, 2/27)$ inflexionspunkt.

Dessutom: Behöver en punkt vänstra komponenten (d.v.s. $x<-3$) av grafen. Tag $x=-6$:

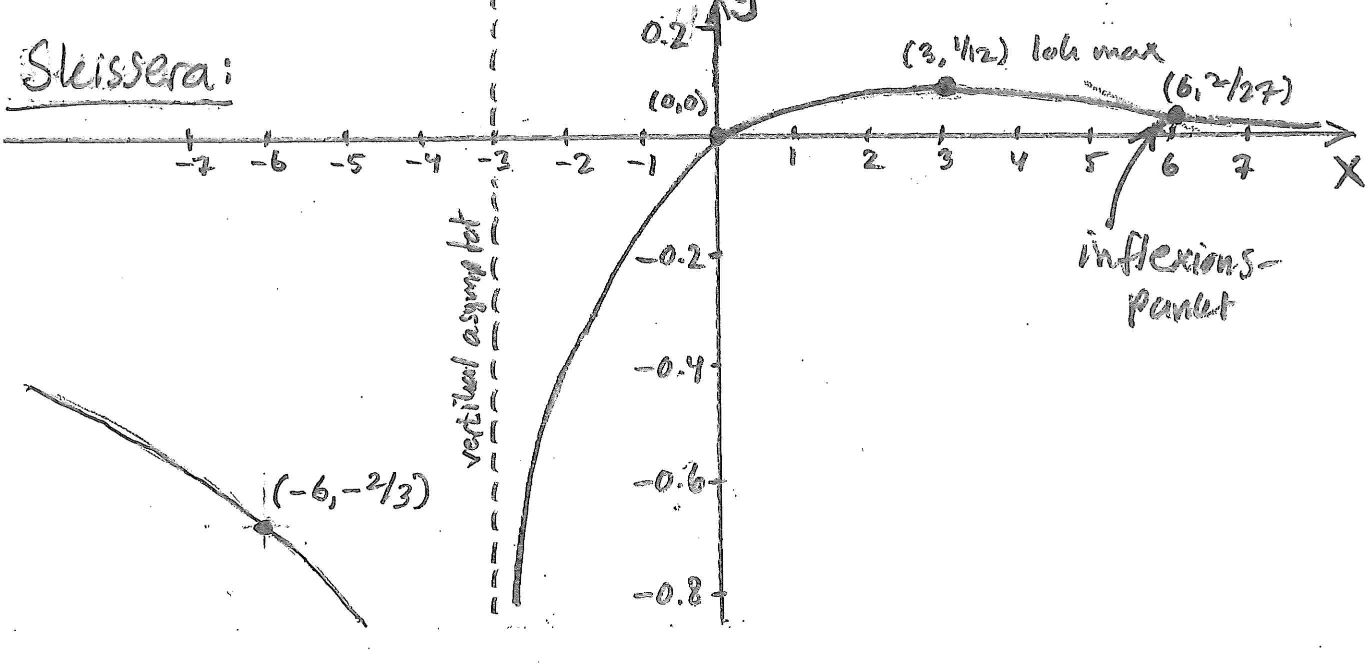
$$f(-6) = \frac{-6}{(-6+3)^2} = \frac{-6}{(-3)^2} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$$

d.v.s. $(-6, -2/3)$.

Tabell:

x		-3		3		6	
f'	$-$ $-$ $-$ $-$		$+$ $+$ $+$ $+$	0	$-$ $-$ $-$ $-$	$-$	$-$ $-$ $-$
f''	$-$ $-$ $-$ $-$ $-$		$-$ $-$ $-$ $-$	$-$	$-$ $-$ $-$ $-$	0	$+$ $+$ $+$ $+$
f	↘	vert. asympt.	↗	lok max	↘	infl.-punkt	↘

Skissera:



⑦ Vi sammanfattar resultaten:

- **Asymptoter:** Vertikal $x=-3$
  Horisontell $y=0$
- **Lokala extrempunkter:**
  Lok max $(3, 1/12)$
- **Inflexionspunkter:** $(6, 2/27)$

---

3. $P_2(x)$ till $f(x)=\sqrt{x}$ kring $x=25$, approximera $\sqrt{26}$, uppskatta $|E_2(26)|$.

Lösning: Taylorpolynom av andra ordningen i $x=25$:

$$P_2(x) = f(25) + f'(25)(x-25) + \frac{1}{2!}f''(25)(x-25)^2$$

Enligt Taylors sats blir felet

$$E_2(x) = \frac{1}{3!}f'''(s)(x-25)^3, \quad s\in(25,x)$$

(om $x>25$)

Vi får för $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$:

$$f(x)=x^{1/2} \Rightarrow f(25)=25^{1/2}=5$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2} \Rightarrow f'(25)=\frac{1}{2}\cdot 25^{-1/2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{5} = 1/10$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$$

$$\Rightarrow f''(25) = -\frac{1}{4} 25^{-3/2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{5\cdot 25} = -\frac{1}{500}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-5/2} = \frac{3}{8}x^{-5/2}$$

Detta ger:

$$P_2(x) = 5 + \frac{1}{10}(x-25) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{500}\right)(x-25)^2$$

$$\boxed{P_2(x) = 5 + \frac{1}{10}(x-25) - \frac{1}{1000}(x-25)^2}$$

Vi får approximationen

$$\sqrt{26} = f(26) \approx P_2(26) =$$

$$= 5 + \frac{1}{10}(26-25) - \frac{1}{1000}(26-25)^2 =$$

$$= 5 + \frac{1}{10} - \frac{1}{1000} = 5.099$$

d.v.s. $\boxed{\sqrt{26} \approx 5.099}$

Felet ges av

$$E_2(x) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}s^{-5/2}\cdot(x-25)^3 = \frac{1}{16}s^{-5/2}(x-25)^3$$

där $s \in (25, x)$ om $x > 25$.

$$\Longrightarrow |E_2(26)| = \left|\frac{1}{16}s^{-5/2}(26-25)^3\right| = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)^5$$

$$< \left[s > 25 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{s}} < \frac{1}{5}\right] \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\right)^5 =$$

$$= \frac{1}{16}\,\frac{1}{3125} = \frac{1}{50\,000} = 0.00002$$

9

d.v.s. $\boxed{|E_2(26)| < 0.00002}$

<u>Notera:</u> Miniräknare ger $\sqrt{26} = 5.0990195\ldots$

$$\Rightarrow |E_2(26)| = |\sqrt{26} - P_2(26)| =$$

$$= |5.0990195\ldots - 5.099| =$$

$$= 0.0000195\ldots < 0.00002,$$

så allt verkar stämma.

4. a) $$\int_{1/2}^{5} x\sqrt{2x-1}\,dx = \left[\begin{cases} u = 2x-1 \\ du = 2\,dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u+1}{2} \\ dx = \frac{1}{2}du \end{cases}, \quad \begin{cases} x=5 \Leftrightarrow u=9 \\ x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow u=0 \end{cases}\right] =$$

$$= \int_0^9 \frac{u+1}{2}\sqrt{u}\,\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{4}\int_0^9 (u^{3/2}+u^{1/2})\,du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_0^9 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}9^{5/2} + \frac{2}{3}9^{3/2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}3^5 + \frac{2}{3}3^3\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\cdot 243 + \frac{2}{3}\cdot 27\right) = \frac{243}{10} + \frac{9}{2} =$$

$$= \frac{243+45}{10} = \frac{288}{10} = \boxed{\frac{144}{5}}$$

b) $$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \underbrace{(\ln x)}_{\downarrow}\,\underbrace{x^{-2}\,dx}_{\uparrow} =$$

$$= \left[\begin{cases} U = \ln x \\ dU = \dfrac{dx}{x} \end{cases}, \begin{cases} dV = x^{-2}\,dx \\ V = -x^{-1} \end{cases} \right] =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left((\ln x)(-x^{-1}) \Big|_1^R - \int_1^R (-x^{-1}) \frac{dx}{x} \right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} \Big|_1^R + \int_1^R x^{-2}\,dx \right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} \Big|_1^R + (-x^{-1}) \Big|_1^R \right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1+\ln x}{x} \right) \Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1+\ln R}{R} + \frac{1+\ln 1}{1} \right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{R} - \frac{\ln R}{R} \right) + 1 = (0+0)+1 = \underline{\underline{1}}$$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}\,dx = (*)$

Ansätt integrand som partialbråk:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} =$$

$$= \frac{A(x^2-1) + Bx + B + C(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+1)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C)}{(x-1)^2(x+1)}$$

(11)

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C = 1 \\ B-2C = 0 \\ -A+B+C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1-C \\ B = 2C \\ -(1-C)+2C+C=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=1-C \\ B=2C \\ 4C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1-1/4 = 3/4 \\ B = 2\cdot(1/4) = 1/2 \\ C = 1/4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (*) = \int \left(\frac{3/4}{x-1} + \frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{1/4}{x+1} \right) dx =$$

$$= \boxed{\frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\ln|x+1| + C}$$

---

5. Rät kon 120 cm hög och 40 cm basradie täcks med 10^{-4} cm bladguld, hur stor volym guld?

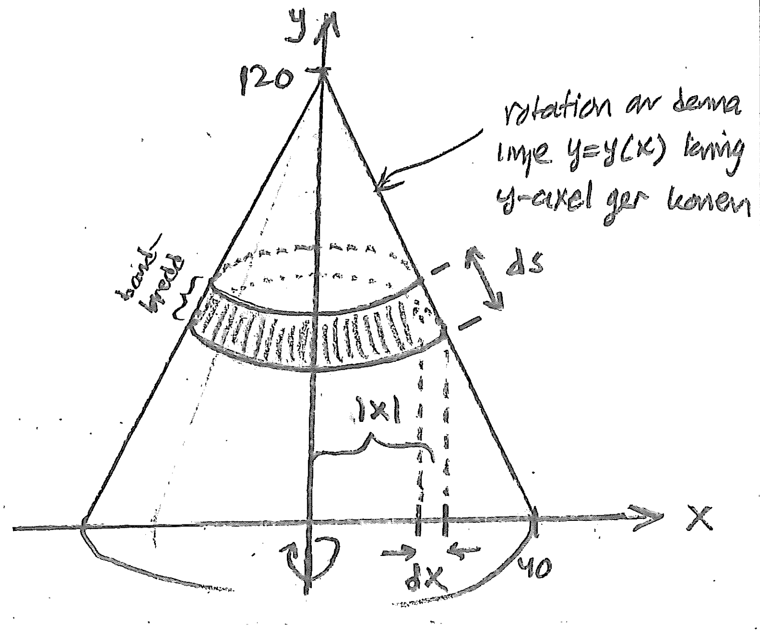
Lösning: $\text{Volym} = \overbrace{\text{ytarea}}^{S} \times \overbrace{\text{tjocklek}}^{=10^{-4}\text{ cm}}$

Låt oss beräkna ytarean S hos konen.

Se figur:

$$S = \int_{x=0}^{x=40} dS$$

d.v.s. total area hos kon är summan hos areorna hos band



(12)

med areorna dS. Varje band har enligt figur arean

$$dS = \text{omkrets} \times \text{bredd} =$$
$$= 2\pi|x| \cdot ds = [\text{Pythagoras}]$$
$$= 2\pi|x| \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} = [x, dx > 0]$$
$$= 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{40} 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Eftersom $y = y(x) = 120 - 3x$ så fås

$$S = \int_0^{40} 2\pi x \sqrt{1 + (-3)^2}\, dx =$$
$$= 2\pi \int_0^{40} x \sqrt{1+9}\, dx = 2\sqrt{10}\,\pi \int_0^{40} x\, dx =$$
$$= 2\sqrt{10}\,\pi \left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^{40} = 2\sqrt{10}\,\pi\, \frac{1}{2} 40^2 =$$
$$= 1600\sqrt{10}\,\pi \text{ cm}^2 \qquad (= 15895.34\ldots \text{ cm}^2)$$

$$\Rightarrow \text{guldvolym} = 1600\sqrt{10}\,\pi \cdot 10^{-4} =$$
$$= \frac{16}{100}\sqrt{10}\,\pi = \boxed{\frac{4\pi}{25}\sqrt{10} \text{ cm}^3}$$
$$(= 1.589\ldots \text{ cm}^3)$$

---

6. Värden på x för vilka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{n}}$ absolutkonvergerar, konvergerar betingat resp. divergerar.

(13) <u>Lösning:</u> Serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ där $a_n = \frac{x^n}{3^n \sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$.

- <u>**Absolutkonvergens:**</u> $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ betraktas.

Kvotkriteriet ger:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}/(3^{n+1}\sqrt{n+1})|}{|x^n/(3^n\sqrt{n})|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| \frac{3^n \sqrt{n}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x| \frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \left|\frac{x}{3}\right| \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+1/n}} =$$

$$= \left|\frac{x}{3}\right| \sqrt{\frac{1}{1+0}} = \left|\frac{x}{3}\right|$$

$\rho < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow x \in (-3,3)$

ger konvergens för $\sum_n |a_n|$

$\rho > 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{3}\right| > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty)$

ger divergens för $\sum_n |a_n|$

$\rho = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{3}\right| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 3$

kvotkriteriet ger inget

$x = \pm 3$: $|a_n| = \left|\frac{(\pm 3)^n}{3^n\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{(\pm 1)^n 3^n}{3^n \sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$

ger divergens för $\sum_n |a_n|$ ty $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ är en divergent serie

$$\boxed{\text{Serien är absolutkonvergent för } x \in (-3,3).}$$

- **Betingad konvergens:** $\sum_n a_n$ betraktas, och vi vet redan att $x \in (-3,3)$ ger abs.-konv.

$x < -3$: $a_n = \dfrac{x^n}{3^n\sqrt{n}} = \dfrac{(-|x|)^n}{3^n\sqrt{n}} =$

$$= \underbrace{(-1)^n \underbrace{\left(\frac{|x|}{3}\right)^n}_{>1} \frac{1}{\sqrt{n}}}_{\to\infty \text{ då } n\to\infty}$$

d.v.s. a_n går ej mot 0

$\Longrightarrow \sum_n a_n$ div.

$x = -3$: $a_n = \dfrac{(-3)^n}{3^n\sqrt{n}} = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Enligt Kriterium för alternerande serier måste $\sum_n a_n$ konv.

$x = 3$: $a_n = \dfrac{3^n}{3^n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Vet att $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ div., så $\sum_n a_n$ div.

$x > 3$: $a_n = \dfrac{x^n}{3^n\sqrt{n}} = \underbrace{\left(\frac{x}{3}\right)}_{>1}^n \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to \infty, n\to\infty$

d.v.s. a_n går ej mot 0

$\Longrightarrow \sum_n a_n$ div. (mot ∞)

Serien är betingat konvergent för $x=-3$ och divergent för $x<-3$ och $x \geq 3$.

15

7. Lös inhomog. linj. ODE

$$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x}\cos x \qquad (*)$$

<u>Lösning:</u> • Notera först att de allmänna lösningarna kan skrivas $y = y_p + y_h$ där y_p är någon lösning till $(*)$ och y_h allmän lösning till $(*)$:s homogena ekvation.

• <u>Homogen version av $(*)$:</u> $y'' + 2y' + 2y = 0$

Karaktäristisk ekv. $r^2 + 2r + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 2} = -1 \pm i$$

$$\Longrightarrow y_h(x) = Ce^{-x}\cos x + De^{-x}\sin x$$

• <u>Partikulärlösning till $(*)$:</u> $HL_{(*)} = 2e^{-x}\cos x$

Pröva därför med (se s. 964 i boken):

$$y_p(x) = x^m e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$$

$m=0 \Rightarrow y_p$ löser homogena ODE:n och ingår isåfall redan i y_h

$m=1$ väljs därför, d.v.s.

$$y_p(x) = xe^{-x}(A\cos x + B\sin x)$$

$$\Longrightarrow y_p'(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) -$$
$$- xe^{-x}(A\cos x + B\sin x) +$$
$$+ xe^{-x}(-A\sin x + B\cos x) =$$

$$= e^{-x}\Big((A - Ax + Bx)\cos x +$$
$$+ (B - Bx - Ax)\sin x\Big) =$$

$$= e^{-x}\Big((A + (B-A)x)\cos x +$$
$$+ (B - (A+B)x)\sin x\Big)$$

$$\Rightarrow y_p''(x) = -e^{-x}\Big((A + (B-A)x)\cos x +$$
$$+ (B - (A+B)x)\sin x\Big) +$$
$$+ e^{-x}\Big((B-A)\cos x - (A+B)\sin x -$$
$$- (A + (B-A)x)\sin x + (B - (A+B)x)\cos x\Big)$$

$$= e^{-x}\Big(\big(-(A + (B-A)x) + (B-A) +$$
$$+ (B - (A+B)x)\big)\cos x +$$
$$+ \big(-(B - (A+B)x) - (A+B) -$$
$$- (A + (B-A)x)\big)\sin x\Big) =$$

$$= e^{-x}\Big(((-2A+2B) - 2Bx)\cos x +$$
$$+ ((-2B-2A) + 2Ax)\sin x\Big) =$$

$$= 2e^{-x}\Big(((B-A) - Bx)\cos x +$$
$$+ (-(A+B) + Ax)\sin x\Big)$$

Sätt in y_p, y_p' och y_p'' i $(*)$:

$$2e^{-x}\Big(((B-A) - Bx)\cos x + (-(A+B) + Ax)\sin x\Big) +$$
$$+ 2e^{-x}\Big((A + (B-A)x)\cos x + (B - (A+B)x)\sin x\Big) +$$
$$+ 2e^{-x}\Big(Ax\cos x + Bx\sin x\Big) \quad = \quad 2e^{-x}\cos x$$

$$\Longleftrightarrow$$

(17) $$\Big(\big((B-A)-Bx\big)+\big(A+(B-A)x\big)+Ax\Big)\cos x +$$
$$+\Big(\big(-(A+B)+Ax\big)+\big(B-(A+B)x\big)+Bx\Big)\sin x = \cos x$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$B\cos x - A\sin x = \cos x$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$B=1 \quad \text{och} \quad -A=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$A=0,\ B=1$$

$$\Longrightarrow \quad y_p(x) = x e^{-x}\sin x$$
$$\Longrightarrow \quad y(x) = y_p(x)+y_h(x) =$$
$$= xe^{-x}\sin x + Ce^{-x}\cos x + De^{-x}\sin x$$

d.v.s. $\boxed{y(x) = Ce^{-x}\cos x + (D+x)e^{-x}\sin x}$ är de allmänna lösningarna.

---

8. T_6, M_6, S_6 för $\int_0^3 \frac{dx}{x+1}$ och uppskatta felen.

Lösning: Delintervallängd $h = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$ för $n=6$.

- $$T_6 = h\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+\frac{1}{2}y_6\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{0+1}+\frac{1}{1/2+1}+\frac{1}{1+1}+\frac{1}{3/2+1}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2+1}+\frac{1}{5/2+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{3+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{1+2}+\frac{2}{2+2}\ \frac{2}{3+2}+\frac{2}{4+2}+\frac{2}{5+2}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{2}{6}+\frac{2}{7}+\frac{1}{8}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{16} = \underline{\underline{1.4053571\ldots}}$$

- $$M_6 = h\big(f(m_1)+f(m_2)+f(m_3)+ + f(m_4)+f(m_5)+f(m_6)\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1/4+1}+\frac{1}{1/2+1/4+1}+\frac{1}{1+1/4+1}+ + \frac{1}{3/2+1/4+1}+\frac{1}{2+1/4+1}+\frac{1}{5/2+1/4+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{1+4}+\frac{4}{2+1+4}+\frac{4}{4+1+4}+ + \frac{4}{6+1+4}+\frac{4}{8+1+4}+\frac{4}{10+1+4}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right) = \underline{\underline{1.3769341\ldots}}$$

- $$S_6 = \frac{h}{3}\left(\sum y_{\text{ändpkter}} + 4\sum y_{\text{udda}} + 2\sum y_{\text{jämna}}\right) =$$

$$= \frac{1/2}{3}\big((y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)\big) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\left(1+\frac{1}{4}\right)+4\left(\frac{1}{1/2+1}+\frac{1}{3/2+1}+\frac{1}{5/2+1}\right)+ + 2\left(\frac{1}{2/2+1}+\frac{1}{4/2+1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{4}+4\left(\frac{2}{1+2}+\frac{2}{3+2}+\frac{2}{5+2}\right)+2\left(\frac{2}{2+2}+\frac{2}{4+2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{4}+4\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}\right)+2\left(\frac{2}{4}+\frac{2}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{5}{24}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{1.3876984\ldots}}$$

(19)

- Uppskattning av felen: $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \Rightarrow f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5}$$

Detta ger:

$$\begin{cases} |f''(x)| = \left|\frac{2}{(x+1)^3}\right| = \frac{2}{(x+1)^3} \leq \frac{2}{(0+1)^3} = 2 \\ |f^{(4)}(x)| = \left|\frac{24}{(x+1)^5}\right| = \frac{24}{(x+1)^5} \leq \frac{24}{(0+1)^5} = 24 \end{cases}$$

på intervallet $[0,3]$.

$\Longrightarrow$ Man kan välja $K_2 = 2$, $K_4 = 24$

Vi får då feluppskattningarna

$$\left|\int_0^3 \frac{dx}{x+1} - T_6\right| \leq \frac{K_2(3-0)}{12} h^2 =$$

$$= \frac{2 \cdot 3}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \underline{\underline{0.125}}$$

$$\left|\int_0^3 \frac{dx}{x+1} - M_6\right| \leq \frac{K_2(3-0)}{24} h^2 =$$

$$= \frac{2 \cdot 3}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = \underline{\underline{0.0625}}$$

$$\left|\int_0^3 \frac{dx}{x+1} - S_6\right| \leq \frac{K_4(3-0)}{180} h^4 =$$

$$= \frac{24 \cdot 3}{180}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{40} = \underline{\underline{0.025}}$$

Notera: De exakta felen är ($\int_0^3 \frac{dx}{x+1} = \ln 4 = 1.3862943\ldots$):

$$\left|\int_0^3 \frac{dx}{x+1} - T_6\right| = |1.3862943\ldots - 1.4053571\ldots| = 0.0190628\ldots < 0.125, \text{ ok}$$

$$\left|\int_0^3 \frac{dx}{x+1} - M_6\right| = |1.3862943\ldots - 1.3769341\ldots| = 0.0093602\ldots < 0.0625, \text{ ok}$$

$$\left|\int_0^3 \frac{dx}{x+1} - S_6\right| = |1.3862943\ldots - 1.3876984\ldots| = 0.0014041\ldots < 0.025$$