Mittuniversitetet

MID SWEDEN UNIVERSITY

Tentamen 2012-01-13

Miniräknare: Symbolhanterande är ej tillåten.

Formelsamling: Matematisk formelsamling (NAT, THU); se bifogat häfte.

Lösningarna bör vara så pass väldokumenterade att en läsare kan följa alla moment utan att behöva fylla i viktiga saknade steg.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är: A 22p, B 18p, C 14p, D 10p, E 9p. (Max: 24p. exkl. bonuspoäng.) Till tentamensskrivningspoängen adderas erhållna bonuspoäng. (Max: +3p.)

1. a) Ge den formella definitionen av $\lim_{x \to a} f(x) = L$. (1p)

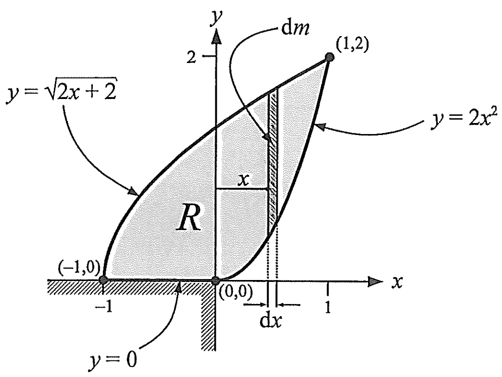
b) Avgör huruvida $x = 3$ är en hävbar diskontinuitet eller ej till funktionen $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x+10}-2}{(x-3)\sqrt{x+1}}$ samt definiera $f(3)$ för att få kontinuitet om hävbarhet gäller. (Tips: Förläng med lämplig faktor och utnyttja konjugeringsregeln. Du behöver faktorisera ett polynom också.) (2p)

2. Ange eventuella asymptoter, lokala extrempunkter och inflexionspunkter till funktionen $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ samt skissera dess graf. (3p)

3. Approximera $\sqrt{e}$ med ett fel på högst 0.0007 genom att bestämma Taylorpolynomet $P_n(x)$ till $f(x) = e^x$ kring $x = 0$ för tillräckligt stort n. Du får använda uppskattningen $\sqrt{e} < 2$ vid bestämningen av ett största möjliga absolutbelopp $|E_n(\frac{1}{2})|$ av felet. (Tips: Man har $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$ där $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$ och $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} x^{n+1}$ för något $s \in (0, x)$. (3p)

4. a) Bestäm de generaliserade integralerna $\displaystyle\int_3^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$ och $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x}\,dx$. (2p)

b) Bestäm integralen $\displaystyle\int \frac{2x^2+3}{x^3-2x^2+x}\,dx$. (Tips: Faktorisera nämnaren.) (1p)



Figur 1. Den homogena tunna plattan i Uppgift 5.

5. Antag att en homogen tunn platta balanserar på högkant vid änden av ett bord och att plattan definieras som området R begränsat uppåt av $y = \sqrt{2x+2}$ för $-1 \leqslant x \leqslant 1$ och nedåt av x-axeln för $-1 \leqslant x \leqslant 0$ och $y = 2x^2$ för $0 \leqslant x \leqslant 1$. Antag att bordsytan ligger längs den negativa delen av x-axeln fram till änden i $x = 0$. Se Figur 1. Kommer plattan välta över ända eller stå kvar och balansera på högkant? (Tips: Gäller $\bar{x} > 0$?) (3p)

6. **a)** Avgör huruvida serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$ är konvergent eller divergent. (1.5p)

b) Avgör huruvida den alternerande serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent. (1.5p)

7. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 8y = 2e^{-4x}, & (*) \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

(Tips: Ingen term i partikulärlösningen får lösa $(*)$:s homogena ekvation.) (3p)

8. Betrakta begynnelsevärdesproblemet $\frac{dy}{dx} = y \ln x$, $y(2) = 1$. Använd den förbättrade Eulers stegmetod för att approximera $y(3)$ med steglängden $h = 0.25$ samt bestäm det exakta felet $e_4 = y(x_4) - y_4$. (Tips: Beräkna i varje steg först $u_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ och sedan $y_{n+1} = y_n + h\frac{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},u_{n+1})}{2}$. Notera också att ODE:n är separabel.) (3p)

Lycka till!

LÖSNINGAR TILL TENTAN 2012-01-13

1. a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ betyder formellt:

För varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ (där δ i allmänhet beror på ε) sådant att om $0 < |x-a| < \delta$ så implicerar detta att $|f(x) - L| < \varepsilon$

b) Funktion $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-5x+10}-2}{(x-3)\sqrt{x+1}}$.

Hävbar diskontinuitet i $x=3$ innebär att $\lim_{x\to 3} f(x)$ finns, i vilket fall $f(3)$ definieras som detta gränsvärde:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-5x+10}-2}{(x-3)\sqrt{x+1}} = [\text{Förläng}] =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x^2-5x+10}-2)(\sqrt{x^2-5x+10}+2)}{(x-3)\sqrt{x+1}(\sqrt{x^2-5x+10}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x^2-5x+10)-4}{(x-3)\sqrt{x+1}(\sqrt{x^2-5x+10}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{(x-3)\sqrt{x+1}(\sqrt{x^2-5x+10}+2)} = (*)$$

Faktorisera polynomet i täljaren: Sätt till 0!

$$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-6}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25-24}{4}}=$$ ②

$$=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}=\begin{cases}3\\2\end{cases}$$

$$\Rightarrow (*)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x^2-5x+10}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x^2-5x+10}+2\right)}=\frac{3-2}{\sqrt{3+1}\left(\sqrt{9-15+10}+2\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}\left(\sqrt{4}+2\right)}=\frac{1}{2(2+2)}=\frac{1}{2\cdot 4}=1/8$$

Låt $f(3)=1/8$. Då gäller uppenbarligen att f är kontinuerlig i $x=3$, d.v.s. diskontinuiteten i $x=3$ är hävbar.

---

2. $$f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$$

Vi följer receptet från Föreläsning 6, då kommer asymptoter, lokala extrempunkter och inflexionspunkter kunna bestämmas om de finns.

① $$f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$$

$$f'(x)=\frac{(x^2-4)\frac{d}{dx}(x^3)-x^3\frac{d}{dx}(x^2-4)}{(x^2-4)^2}=$$

$$=\frac{(x^2-4)\cdot 3x^2-x^3\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{3x^4-12x^2-2x^4}{(x^2-4)^2}=$$

$$=\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

③
$$f''(x)=\frac{(x^2-4)^2\frac{d}{dx}(x^4-12x^2)-(x^4-12x^2)\frac{d}{dx}(x^2-4)^2}{(x^2-4)^4}=$$

$$=\frac{(x^2-4)^2(4x^3-24x)-(x^4-12x^2)\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=$$

$$=\frac{(x^2-4)(4x^3-24x)-4x(x^4-12x^2)}{(x^2-4)^3}=$$

$$=\frac{4x^5-24x^3-16x^3+96x-4x^5+48x^3}{(x^2-4)^3}=$$

$$=\frac{8x^3+96x}{(x^2-4)^3}=8x\frac{x^2+12}{(x^2-4)^3}$$

② (a)
$$\lim_{x\to -2-}\frac{x^3}{x^2-4}=\left[\begin{cases}x^3<0\\ x^2-4>0\end{cases}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2+}\frac{x^3}{x^2-4}=\left[\begin{cases}x^3<0\\ x^2-4<0\end{cases}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{x^3}{x^2-4}=\left[\begin{cases}x^3>0\\ x^2-4<0\end{cases}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{x^3}{x^2-4}=\left[\begin{cases}x^3>0\\ x^2-4>0\end{cases}\right]=+\infty$$

d.v.s. dubbelsidiga vertikala asymptoter i $x=\pm 2$.

(b₁)
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-4/x^2}=\pm\infty,$$

inga horisontella asymptoter.

(b₂) Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} \quad x \\ \overline{x^3}\ \underline{\rfloor\, x^2-4} \\ \underline{-x(x^2-4)} \\ \quad 4x \end{array}$$

$$\Longrightarrow \frac{x^3}{x^2-4}=x+\frac{4x}{x^2-4} \qquad (*)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right) = [(*)] \overset{(4)}{=}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4/x}{1-4/x^2} =$$

$$= \frac{0}{1-0} = 0/1 = 0$$

d.v.s. $y=x$ dubbelsidig sned asymptot.

(c) $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-4} = -\dfrac{x^3}{x^2-4} = -f(x)$

$\Longrightarrow$ f udda funktion

(d) • Skärning y-axel: $f(0) = \dfrac{0^3}{0^2-4} = 0$,

d.v.s. $(0,0)$.

• Skärning x-axeln: $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{x^2-4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0$, d.v.s. $(0,0)$ (igen)

(3)(a) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0$ eller $x^2-12=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0$ eller $x=\pm\sqrt{12}=\pm\sqrt{4\cdot 3}=\pm 2\sqrt{3}$

$$f(\pm 3\sqrt{2}) = \frac{(\pm 2\sqrt{3})^3}{(\pm 2\sqrt{3})^2-4} = \frac{\pm 8\cdot 3\sqrt{3}}{12-4} = \pm\frac{8\cdot 3\sqrt{3}}{8} =$$

$$= \pm 3\sqrt{3}$$

kompletade tecken

d.v.s. $(0,0), (\pm 2\sqrt{3}, \pm 3\sqrt{3})$ kritiska punkter

(b) f' ej definierad i $x=\pm 2$.

(c) $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\neq 0, \pm 2$ och $x^2-12>0 \Leftrightarrow x\neq 0, \pm 2$ och

(5) $x^2 > 12 \Leftrightarrow x \neq 0, \pm 2$ och $(x < -2\sqrt{3}$ eller $x > 2\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow$ $x < -2\sqrt{3}$ eller $x > 2\sqrt{3}$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow$ [se ovan] $x \neq 0, \pm 2$ och $x^2 < 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \neq 0, \pm 2$ och $-2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-2\sqrt{3}, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 2\sqrt{3})$

(4) (a) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 8x \dfrac{x^2+12}{(x^2-4)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

d.v.s. $(0, 0)$.

(b) f'' ej definierad i $x = \pm 2$.

(c) $f'' > 0 \Leftrightarrow 8x \dfrac{x^2+12}{(x^2-4)^3} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x > 0$ och $x^2 - 4 > 0)$ eller $(x < 0$ och $x^2 - 4 < 0)$

$\Leftrightarrow (x > 0$ och $(x < -2$ eller $x > 2))$ eller

eller $(x < 0$ och $-2 < x < 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x > 2$ eller $-2 < x < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$

$f'' < 0 \Leftrightarrow$ [se ovan] $(x > 0$ och $x^2 - 4 < 0)$ eller

eller $(x < 0$ och $x^2 - 4 > 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x > 0$ och $-2 < x < 2)$ eller

eller $(x < 0$ och $(x < -2$ eller $x > 2)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < x < 2$ eller $x < -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$

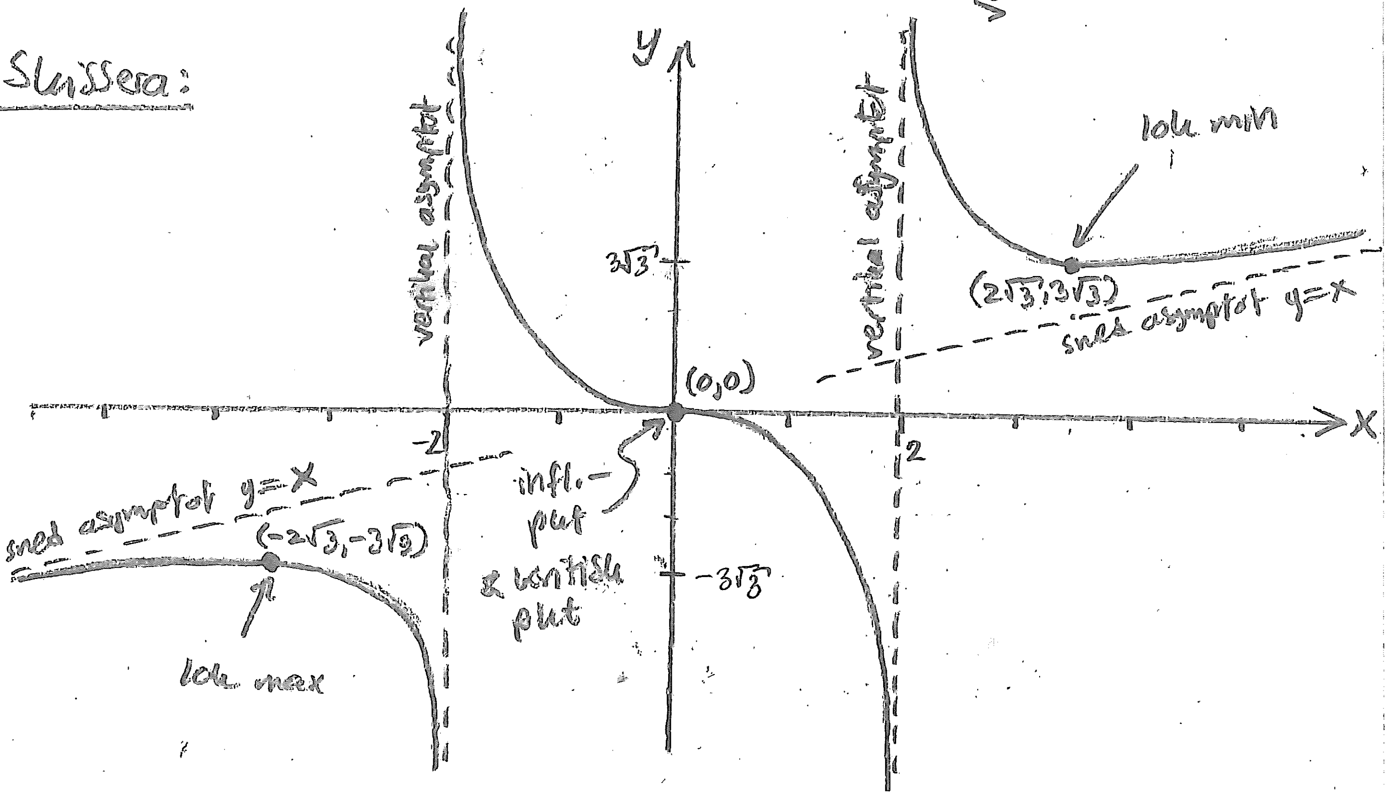
(d) f'' växlar i $x = 0$, d.v.s. $(0,0)$ inflexionspkt.

Notera att vi har bestämt en punkt i varje komponent ($x < -2$, $x \in (-2, 2)$ och $x > 2$) så behöver ej bestämma ytterligare referenspunkter.

Tabell:

x		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$	
f'	+ + + + + +	0	− − − − − −		− − − −	0	− − − −		− − − −	0	+ + + + +
f''	− − − − − −	− −	− − − − − −		+ + + +	0	− − − −		+ + + +	+ +	+ + + + +
f	↗ ∩	lok. max	↘ ∩	vert. asympt.	↘ ∪	infl. pkt	↘ ∩	vert. asympt.	↘ ∪	lok. min	↗ ∪

Skissera:



Vi sammanfattar resultaten:

- **Asymptoter:**
  - Vertikala : $x = \pm 2$
  - Sned : $y = x$
- **Lokala extrempkter:** $(\pm 2\sqrt{3}, \pm 3\sqrt{3})$
- **Inflextionspkt:** $(0,0)$

⑦ **3.** Utveckla $f(x) = e^x$ kring $x=0$ m.h.a. Taylorpolynom $P_n(x)$ och fel $E_n(x)$ (d.v.s. $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$) där

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}(x-0)^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

f.n. $s \in (0, x)$ om $x > 0$.

Notera att:

$$\sqrt{e} = e^{1/2} = f(\tfrac{1}{2}) = P_n(\tfrac{1}{2}) + E_n(\tfrac{1}{2})$$

Vill hitta så litet n som möjligt s.a.

$$|E_n(\tfrac{1}{2})| \leq 0.0007 \qquad (*)$$

kan säkerställas. Vi har:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow f^{(i)}(x) = e^x$$

oavsett i. Därför gäller f.n. $s \in (0, \frac{1}{2})$:

$$|E_n(\tfrac{1}{2})| = \left| \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right| = \frac{e^s}{(n+1)!} \frac{1}{2^{n+1}} \underset{[s < 1/2]}{<}$$

$$< \frac{e^{1/2}}{(n+1)!} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{e}}{(n+1)!} \frac{1}{2^{n+1}} < [\sqrt{e} < 2] <$$

$$< \frac{2}{(n+1)!} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!\, 2^n}$$

Villkor $(*)$ uppfylls om $\frac{1}{(n+1)!\, 2^n} \leq 0.0007 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (n+1)!\, 2^n \geq \frac{1}{0.0007} = \frac{1}{7/10000} = \frac{10000}{7} = 1428 + \frac{4}{7}$$

Notera att VL för olika n-värden är:

$n=0: \quad (0+1)!\,2^0 = 1!\cdot 1 = 1\cdot 1 = 1 < 1428 + 4/7$

$n=1: \quad (1+1)!\,2^1 = 2!\cdot 2 = 2\cdot 2 = 4 < 1428 + 4/7$

$n=2: \quad (2+1)!\,2^2 = 3!\cdot 4 = 6\cdot 4 = 24 < 1428 + 4/7$

$n=3: \quad (3+1)!\,2^3 = 4!\cdot 8 = 24\cdot 8 = 192 < 1428 + 4/7$

$n=4: \quad (4+1)!\,2^4 = 5!\cdot 16 = 120.16 = 1920 > 1428 + 4/7$, ok!

d.v.s. $\displaystyle |E_4(\tfrac{1}{2})| < \frac{1}{(4+1)!\,2^4} = \frac{1}{1920} < \frac{1}{1428 + 4/7} = 0.0007$

Vi kan alltså approximera $\sqrt{e} \approx P_4(\frac{1}{2})$. Vi har:

$$P_4(\tfrac{1}{2}) = \sum_{i=0}^{4} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^i = [f^{(i)}(0) = e^0 = 1 \ \ \forall i] =$$

$$= \sum_{i=0}^{4} \frac{1}{i!\,2^i} = \frac{1}{0!\,2^0} + \frac{1}{1!\,2^1} + \frac{1}{2!\,2^2} + \frac{1}{3!\,2^3} + \frac{1}{4!\,2^4} =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{6\cdot 8} + \frac{1}{24\cdot 16} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} =$$

$$= \frac{384 + 192 + 48 + 8 + 1}{384} = \frac{633}{384} =$$

$$= \frac{211}{128} = 1.6484375$$

d.v.s. $\boxed{\sqrt{e} \approx 1.6484375 \text{ med ett fel mindre än } 0.0007.}$

- - - - - - - - - - - - -

Notera: $\underbrace{|\sqrt{e} - 1.6484375|}_{\substack{= E_4(1/2) \\ \text{(exakt)}}} = 0.000283770\ldots < 0.0007$

(stämmer alltså)

(9) **4.** a) $\int_3^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx = $ [Generaliserad integral av Typ II ty integrand $\to +\infty$ då $x \to 3_+$]

$$= \lim_{c\to 3+} \int_c^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx =$$

$$= \left[\begin{cases} u = x^2-9 \\ du = 2x\,dx \Leftrightarrow x\,dx = \frac{1}{2}du \end{cases}, \begin{cases} x=5 \Rightarrow u = 16 \\ x = c \Rightarrow u = c^2-9 \end{cases}\right] =$$

$$= \lim_{c\to 3+} \int_{c^2-9}^{16} \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2} \lim_{c\to 3+} \int_{c^2-9}^{16} u^{-1/2}\,du =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{c\to 3+} \left(2u^{1/2}\right)\Big|_{c^2-9}^{16} = \lim_{c\to 3+} \left(\sqrt{u}\right)\Big|_{c^2-9}^{16} =$$

$$= \lim_{c\to 3+} \left(\sqrt{16} - \sqrt{c^2-9}\right) = 4 - \sqrt{3^2-9} =$$

$$= 4 - \sqrt{9-9} = 4 - \sqrt{0} = 4 - 0 = \underline{\underline{4}}$$

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = [\text{Generaliserad integral av Typ I}] =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^R x\, \underbrace{e^{-x}\,dx} = \left[\begin{cases} U = x \\ dU = dx \end{cases}, \begin{cases} dV = e^{-x}dx \\ V = -e^{-x} \end{cases}\right] =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(x(-e^{-x})\Big|_0^R - \int_0^R (-e^{-x})\,dx \right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-Re^{-R} + \int_0^R e^{-x}\,dx \right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-Re^{-R} + (-e^{-x})\Big|_0^R \right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[-Re^{-R} + ((-e^{-R}) - (-e^{-0})) \right] =$$

$$= 1 - \lim_{R\to\infty} e^{-R} - \lim_{R\to\infty} \frac{R}{e^R} =$$

= [Se "7 Några standardgränsvärden" i formelsamlingen] =

$= 1 - 0 - 0 = \underline{\underline{1}}$

b) $\int \frac{2x^2+3}{x^3-2x^2+x}\,dx = \int \frac{2x^2+3}{x(x^2-2x+1)}\,dx =$

$= \int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}\,dx = (*)$

Partialbråksuppdela integranden:

$$\frac{2x^2+3}{x(x-1)^2} = [\text{Ansätt}] = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A(x^2-2x+1) + B(x^2-x) + Cx}{x(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (C-2A-B)x + A}{x(x-1)^2}$$

Identifiera:
$$\begin{cases} A+B=2 \\ C-2A-B=0 \\ A=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=2-A=2-3=-1 \\ C=2A+B=2\cdot 3+(-1)=5 \\ A=3 \end{cases}$$

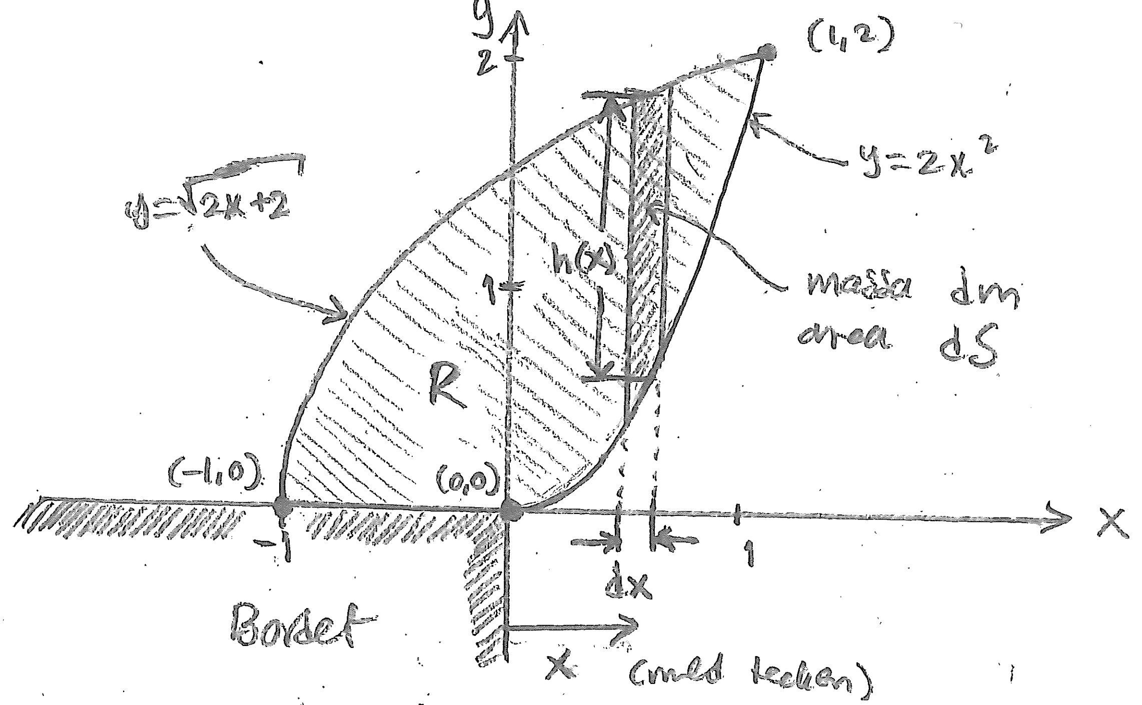
$$\Longrightarrow (*) = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} \right) dx =$$

$$= \boxed{3\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C}$$

---

5. Homogen tunn platta definieras som området R mellan $y=\sqrt{2x+2}$ för $-1 \le x \le 1$ och x-axeln för $-1 \le x \le 0$,

(1.1) $y = 2x^2$ för $0 \le x \le 1$. Bordets kyta är x-axeln, $x \le 0$. Figur:



Notera att plattans ytthäthet är konstant, så låt $\delta(x) = \delta$ (= konst.)

Ytelementet i figuren har bredd dx och höjd $h(x)$ där
$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+2} & , -1 \le x \le 0 \\ \sqrt{2x+2} - 2x^2 & , 0 \le x \le 1 \end{cases}$$
vilket ger ytelementarean $dS = h(x)dx$ och -massan $dm = \delta(x)dS = \delta\, h(x)dx$. Det totala momentet kring origo (bordskanten) är:

$$M_{x=0} = \int_{x=-1}^{x=1} x\,dm = \int_{-1}^{1} x\,\delta\,h(x)dx =$$
$$= \delta\left(\int_{-1}^{0} x\sqrt{2x+2}\,dx + \int_{0}^{1} x(\sqrt{2x+2} - 2x^2)dx\right)$$
$$= \delta\left(\int_{-1}^{1} x\sqrt{2x+2}\,dx - 2\int_0^1 x^3 dx\right) =$$

$$= \delta\left(\int_{-1}^{1} x\sqrt{2x+2}\,dx - 2\left(\tfrac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1\right) =$$

$$= \delta\left(\int_{-1}^{1} x\sqrt{2x+2}\,dx - \frac{1}{2}\right) = \left[\begin{cases} u = 2x+2 \\ du = 2\,dx \end{cases}, \begin{cases} x=1 \Leftrightarrow u=4 \\ x=-1 \Leftrightarrow u=0 \end{cases}\right] =$$

$$= \delta\left(\int_0^4 \frac{u-2}{2}\sqrt{u}\,\frac{1}{2}\,du - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \delta\left(\frac{1}{4}\int_0^4 (u^{3/2} - 2u^{1/2})\,du - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \delta\left[\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} - 2\,\frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_0^4 - \frac{1}{2}\right] =$$

$$= \delta\left[\frac{1}{2^2}\left(\frac{2}{5}2^5 - \frac{4}{3}2^3\right) - \frac{1}{2}\right] = \delta\left(\frac{2}{5}2^3 - \frac{4}{3}2^1 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \delta\left(\frac{16}{5} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2}\right) = \delta\,\frac{96-80-15}{30} = \delta/30$$

Massan är :

$$m = \int_{x=-1}^{x=1} dm = \int_{-1}^{1} \delta h(x)\,dx = \delta\int_{-1}^{1} h(x)\,dx =$$

$$= \delta\left(\int_{-1}^{0} \sqrt{2x+2}\,dx + \int_0^1 (\sqrt{2x+2} - 2x^2)\,dx\right) =$$

$$= \delta\left(\int_{-1}^{1} \sqrt{2x+2}\,dx - 2\int_0^1 x^2\,dx\right) =$$

$$= \delta\left(\sqrt{2}\int_{-1}^{1} (x+1)^{1/2}\,dx - 2\left(\tfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1\right) =$$

$$= \delta\left[\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right)\Big|_{-1}^{1} - \frac{2}{3}\right] =$$

$$= \delta\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(2^{3/2} - 0^{3/2}\right) - \frac{2}{3}\right] =$$

$$= \delta\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\,2\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right) = \delta\,\frac{(2\sqrt{2})^2 - 2}{3} =$$

$$= \delta\,\frac{4\cdot 2 - 2}{3} = \delta\cdot\frac{6}{3} = 2\delta$$

(13) Detta ger masscentrums x-koordinat:

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\delta/30}{2\delta} = \frac{1}{60} > 0$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Plattan kommer välta över ända!}}$

Notera: Det räcker med att bestämma tecknet för $M_{x=0}$ för att se om plattan välter ty $M_{x=0}$ har samma tecken som $\bar{x}$.

6.

a) Positiv Serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$, d.v.s. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

där $a_n = \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$. Kvotkriteriet ty pos. serie ger:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!(2(n+1))!}{(3(n+1))!}}{\frac{n!(2n)!}{(3n)!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{(3n)!}{(3(n+1))!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \frac{(3n)!}{(3n+3)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n!)}{n!} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \frac{(3n)!}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (n+1)(2n+2)(2n+1)\frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2(n+1)(2n+1)}{3(n+1)(3n+2)(3n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} \frac{(n+1)(2n+1)}{(3n+2)(3n+1)} = \frac{2}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)(2+1/n)}{(3+2/n)(3+1/n)} =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{(1+0)(2+0)}{(3+0)(3+0)} = \frac{2}{3}\,\frac{1\cdot 2}{3\cdot 3} = \frac{4}{27} < 1$$ 14

$\Longrightarrow$ Serien konvergerar

b) Alternerande serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$, d.v.s. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

där $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$.

- Absolutkonvergent? Studera $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Notera att $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \approx \frac{1}{\sqrt{n\cdot n}} = \frac{1}{n}$, n stort

Vi ska jämföra med $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n = \frac{1}{n}$.

Vi får gränsvärdet

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(1+1/n)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{1} = 1 \qquad (*)$$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerar mot ∞ (harmoniska serien) och att $L = 1 > 0$ enl. (*) så måste $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ enligt Jämförelsekriterium #2 också divergera (mot ∞); se sid. 9 i F10.

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Serien ej absolutkonvergent.}}$

Forts. sid. 20 !

(15) **7.** Begynnelsevärdesproblem $\begin{cases} y'' + 6y' + 8y = 2e^{-4x} & (*) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

De allmänna lösningarna kan skrivas $y = y_p + y_h$ där y_p är en partikulärlösning till (*) och y_h allmän lösning till (*):s motsvarande homogena ekvation.

- Homogen version av (*): $y'' + 6y' + 8y = 0$

Karakteristisk ekv.: $r^2 + 6r + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r = -3 \pm \sqrt{3^2 - 8} = -3 \pm \sqrt{9-8} =$$
$$= -3 \pm \sqrt{1} = -3 \pm 1 = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y_h(x) = Ce^{-2x} + De^{-4x}$$

- Partikulärlösning till (*): $HL_{(*)} = 2e^{-4x}$, så pröva därför med (se s. 964 i boken eller sid. 10ff i F12):

$$y_p(x) = x^m A e^{-4x}$$

$m = 0 \Rightarrow y_p(x) = Ae^{-4x}$, löser (*):s homogena ekvation så kan ej användas

$m = 1 \Rightarrow y_p(x) = Axe^{-4x}$ väljs därför

$$\Longrightarrow y_p'(x) = Ae^{-4x} + Ax(-4)e^{-4x} = A(1-4x)e^{-4x}$$
$$\Longrightarrow y_p''(x) = A(-4)e^{-4x} + A(1-4x)(-4)e^{-4x} =$$
$$= A(-4-4+16x)e^{-4x} =$$
$$= 8A(2x-1)e^{-4x}$$

Sätt in y_p, y_p' och y_p'' i (*):

$$8A(2x-1)e^{-4x}+6A(1-4x)e^{-4x}+8Axe^{-4x}= \qquad (16)$$

$$=2e^{-4x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\big((16x-8)+(6-24x)+8x\big)e^{-4x}=2e^{-4x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(24x-24x-2)e^{-4x}=2e^{-4x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2Ae^{-4x}=2e^{-4x} \Leftrightarrow -A=1 \Leftrightarrow A=-1$$

$$\Longrightarrow y_p(x)=(-1)xe^{-4x}=-xe^{-4x}$$

$$\Longrightarrow y(x)=y_p(x)+y_h(x)=$$

$$=-xe^{-4x}+Ce^{-2x}+De^{-4x}$$

d.v.s. $y(x)=(D-x)e^{-4x}+Ce^{-2x}$

- $y(0)=0$: $(D-0)\underbrace{e^{-4\cdot 0}}_{=1}+C\underbrace{e^{-2\cdot 0}}_{=1}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow D+C=0 \Leftrightarrow D=-C$$

$$\Longrightarrow y(x)=(-C-x)e^{-4x}+Ce^{-2x}=$$

$$=Ce^{-2x}-(C+x)e^{-4x}$$

$$\Longrightarrow y'(x)=-2Ce^{-2x}-\big(e^{-4x}+(C+x)(-4)e^{-4x}\big)$$

$$=-2Ce^{-2x}+(4(C+x)-1)e^{-4x}$$

- $y'(0)=0$: $-2C\cdot 1+\big(4(C+0)-1\big)\cdot 1=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2C+4C-1=0 \Leftrightarrow 2C=1 \Leftrightarrow C=\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}-\left(\frac{1}{2}+x\right)e^{-4x}}$$

8.

Begynnelsevärdesproblem $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=y\ln x & (**) \\ y(2)=1 \end{cases}$

(17) Bestämma $y(3)$ med steglängd $h=0.25$.

Ett BVP $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ med steglängd h ger

med den förbättrade Eulerstegmetoden:

$$\begin{cases} x_n = x_0 + nh \\ u_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h\dfrac{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},u_{n+1})}{2} \end{cases}$$

Här: $f(x,y) = y\ln x$, $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $h = 0.25$

Detta ger:

$$\begin{cases} x_n = 2 + n\cdot 0.25 = 2 + 0.25\cdot n \\ u_{n+1} = y_n + 0.25\cdot y_n \ln x_n = y_n(1+0.25\cdot \ln x_n) \\ y_{n+1} = y_n + 0.25\cdot\frac{1}{2}(y_n \ln x_n + u_{n+1}\ln x_{n+1}) = \\ \quad = y_n + 0.125\cdot(y_n\ln x_n + u_{n+1}\ln x_{n+1}) = \\ \quad = y_n(1+0.125\cdot\ln x_n) + 0.125\cdot u_{n+1}\ln x_{n+1} \end{cases}$$

Vi får iterationerna:

$$n=1 \begin{cases} x_1 = 2 + 0.25\cdot 1 = 2.25 \\ u_1 = y_0(1+0.25\cdot\ln x_0) = 1\cdot(1+0.25\cdot\ln 2) = \\ \quad = 1.1732867\ldots \\ y_1 = y_0(1+0.125\cdot\ln x_0) + 0.125\cdot u_1 \ln x_1 = \\ \quad = 1\cdot(1+0.125\cdot\ln 2) + 0.125\cdot 1.1732867\ldots\cdot\ln 2.25 = \\ \quad = 1.2055751\ldots \end{cases}$$

$n=2$:

$$\begin{cases} x_2 = 2+0.25\cdot 2 = 2.5 \\ u_2 = y_1(1+0.25\cdot \ln x_1) = 1.2055751\ldots\cdot(1+0.25\cdot \ln 2.25) = 1.4499844\ldots \\ y_2 = y_1(1+0.125\cdot \ln x_1)+0.125\cdot u_2 \ln x_2 = \\ \quad = 1.2055751\ldots\cdot(1+0.125\cdot\ln 2.25)+ \\ \quad\quad + 0.125\cdot 1.4499844\ldots\cdot \ln 2.5 = \\ \quad = 1.4938556\ldots \end{cases}$$

$n=3$:

$$\begin{cases} x_3 = 2+0.25\cdot 3 = 2.75 \\ u_3 = y_2(1+0.25\cdot\ln x_2) = 1.4938556\ldots\cdot(1+0.25\cdot\ln 2.5) = \\ \quad = 1.8360572\ldots \\ y_3 = y_2(1+0.125\cdot\ln x_2)+0.125\cdot u_3 \ln x_3 = \\ \quad = 1.4938556\ldots(1+0.125\cdot\ln 2.5)+ \\ \quad\quad + 0.125\cdot 1.8360572\ldots\cdot\ln 2.75 = \\ \quad = 1.8971260\ldots \end{cases}$$

$x_4 = 2+0.25\cdot 4 = 2+1 = 3$ (framme)

$u_4 = y_3(1+0.25\cdot\ln x_3) = 1.8971260\ldots\cdot(1+0.25\cdot\ln 2.75) =$
$= 2.3769097\ldots$

$y_4 = y_3(1+0.125\cdot\ln x_3)+0.125\cdot u_4 \ln x_4 =$
$= 1.8971260\ldots\cdot(1+0.125\cdot\ln 2.75)+$
$+ 0.125\cdot 2.3769097\ldots\cdot\ln 3 =$
$= 2.4634306\ldots$

d.v.s. $y(3) = y(x_4) \approx y_4 = \underline{\underline{2.4634306\ldots}}$

(19) För att beräkna exakta felet $e_4 = y(x_4) - y_4$ så måste vi först lösa BVP:et. Vi ser att (**) är separabel:

$$\frac{dy}{dx} = y\ln x \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \ln x\, dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \ln x\, dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \int \underbrace{\ln x}_{\downarrow}\, \underbrace{dx}_{\uparrow} = \left[\begin{cases} U = \ln x \\ dU = \frac{dx}{x} \end{cases}, \begin{cases} dV = dx \\ V = x \end{cases}\right] =$$

$$= (\ln x)x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx =$$

$$= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

$y(2) = 1$: $\ln|1| = 2\cdot(\ln 2 - 1) + C \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0 = 2(\ln 2 - 1) + C \Leftrightarrow C = 2(1 - \ln 2)$$

$$\Rightarrow \ln|y| = x(\ln x - 1) + 2(1 - \ln 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{x(\ln x - 1) + 2(1 - \ln 2)} =$$

$$= (e^{\ln x})^x e^{-x} e^2 (e^{\ln 2})^{-2} =$$

$$= x^x e^{-x} e^2 2^{-2} = \frac{1}{4} e^{2-x} x^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{4} e^{2-x} x^x$$, men $y(2) = 1 > 0$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{4} e^{2-x} x^x$$ är exakt lösning

$$\Rightarrow y(3) = \frac{1}{4} e^{2-3} 3^3 = \frac{27}{4e} = 2.4831862\ldots$$

$$\Rightarrow e_4 = y(x_4) - y_4 = y(3) - y_4 =$$

$$= 2.4831862\ldots - 2.4634306\ldots =$$

$= 0.0197555\ldots$

d.v.s. felet vid approximationen ges av $\boxed{e_4 = 0.0197555\ldots}$.

---

6. b) Forts. →

• Betingat konvergent? Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ uppfyller

(i) Serien är alternerande: $a_n a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} =$

$$= \frac{(-1)^{2n+1}}{(n+1)\sqrt{n(n+2)}} = -\frac{1}{(n+1)\sqrt{n(n+2)}} < 0 \quad \forall n$$

(ii) serien har avtagande belopp: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right|} =$

$$= \frac{\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} = \sqrt{\frac{n}{n+2}} < 1 \Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n| \quad \forall n$$

(iii) seriens termer går mot noll: $\lim_{n \to \infty} a_n =$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} = 0$$

Enligt Kriteriet för alternerande serier (s. 2 F11) gäller därför att serien är konvergent. Eftersom den inte var absolutkonvergent så gäller det att

$\boxed{\text{Serien är betingat konvergent.}}$